1. Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = xe^{x-x^2}$.

(1) Hallar los máximos y mínimos relativos de esta función.

(2) Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = \left(3x-2x^2\right)e^x$.

(1) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f.

(2) Calcular los máximos y mínimos relativos de f.

3. Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, estudiar razonadamente: Su dominio, continuidad, derivabilidad, crecimiento y decrecimiento. Con este estudio, ¿es posible conocer sus máximos relativos? ¿Cuáles son?

4. Hallar b y c para que la función $f(x) = -x^2+bx+c$ tenga un máximo en el punto $P(4,2)$.

5. Determinar una función cuadrática que pasa por $P(1,-1)$, $Q(2,-4)$ y tiene un mínimo en $M(3,-5)$.

6. Sea k un número real y sea $f:\Re\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = \cos(x)+kx$.

(1) Determinar todos los valores de k para los que la función es creciente en todo su dominio.

(2) Para k=1, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x=0.

7. El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es: $N(t) = 1000\left(25+te^{\frac{-t}{20}}\right)$, para $0 \le t \le 100$. ¿Cuánto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instante se alcanzan, respectivamente, dichos valores?

8. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f:[0,3]\rightarrow\Re$ definida por $f(t) = 300t(3-t)$, donde t mide el tiempo en horas.

(1) Calcular los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

(2) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

9. La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función $P:[2,12]\rightarrow\Re$ dada por $P(t) = \begin{cases} 10+(t-6)^2 & \text{si } 2 \le t \le 10 \\ 28-2^{t-9} & \text{si } 10 < t \le 12 \end{cases}$.

(1) Representar gráficamente la función P e indicar en qué períodos de tiempo crece o decrece la población.

(2) Indicar los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo.

(3) Si la población evoluciona a partir de t=12 con la misma función que para $10<t\le12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta, dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de una curva de ecuación y = f(x), siendo $f:\Re\rightarrow\Re$ la función dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

(1) ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admita recta tangente?

(2) Determinar las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = xe^{x-x^2}$.

(1) Hallar los máximos y mínimos relativos de esta función.

(2) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

---

(1) Derivamos dos veces:

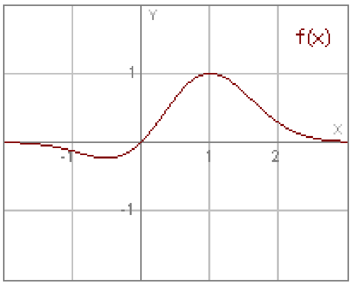
$$f'(x) = e^{x-x^2}+x(1-2x)e^{x-x^2} = \left[-2x^2+x+1\right]e^{x-x^2}.$$

$$f''(x) = (1-4x)e^{x-x^2}+\left[-2x^2+x+1\right](1-2x)e^{x-x^2} = (1-4x)e^{x-x^2}+\left[-2x^2+4x^3+x-2x^2+1-2x\right]e^{x-x^2} = \left[4x^3-4x^2-5x+2\right]e^{x-x^2}.$$

Como los extremos anulan la derivada:

$$\left[-2x^2+x+1\right]e^{x-x^2} = 0 \;;\; -2x^2+x+1 = 0 \;;\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} \quad x = \frac{-1\pm3}{-4} \;;\; x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

La exponencial siempre es positiva.



Comprobamos el signo que toman en la 2ª derivada:

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[-\frac{4}{8}-\frac{4}{4}+\frac{5}{2}+2\right]e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \left[-\frac{1}{2}-1+\frac{5}{2}\right]e^{-\frac{3}{4}} = \left[2-1\right]e^{-\frac{3}{4}} > 0 \Rightarrow \text{es un mínimo.}$$

$$f''(1) = (4-4-5+2)e^{1-1} = -3e^0 = -3 < 0 \Rightarrow \text{es un máximo.}$$

Solución: Máximo para $x = 1$. Mínimo en $x = -\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2-x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminado. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x-1)e^{x^2-x}} = 0.$$

Solución: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Sea $f:\Re \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = \left(3x-2x^2\right)e^x$.

(1) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f.

(2) Calcular los máximos y mínimos relativos de f.

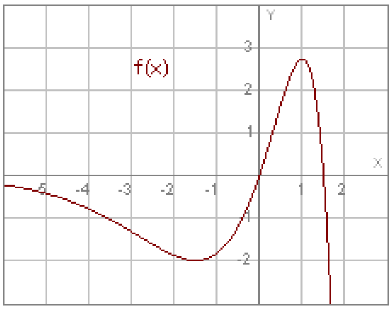
---

(1) La función es creciente si la derivada es positiva:

$$f'(x) = (3-4x)e^x+\left(3x-2x^2\right)e^x = \left(3-x-2x^2\right)e^x$$

$$\left(3-x-2x^2\right)e^x > 0 \Rightarrow 3-x-2x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2+x-3 < 0$$

La exponencial siempre es positiva.



Descomponemos en producto de factores:

$$2x^2+x-3 = 0 \ ; \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} \ ; \ x = \frac{-1\pm 5}{4} \ ; \ x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

La inecuación queda:

$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) < 0$. Estudiamos los signos:

	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+\frac{3}{2}$	- - -	+ + +	+ + +
$x-1$	- - -	- - -	+ + +

Es negativo en $\left(-\frac{3}{2},1\right)$.

Solución: Creciente en $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

Decreciente en $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2) Según el apartado anterior, la derivada se anula para $x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Como es una función continua y para $x = -\frac{3}{2}$ la función pasa de decreciente a creciente, tiene un mínimo. Lo contrario ocurre para $x = 1$, luego tiene un máximo.

Podemos determinarlos también por el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = (-1-4x)e^x+\left(3-x-2x^2\right)e^x = \left(2-5x-2x^2\right)e^x.$$

$$f''\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(2+\frac{15}{2}-\frac{9}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}} = (2+3)e^{-\frac{3}{2}} > 0 \Rightarrow \text{es un mínimo.}$$

$$f''(1) = (2-5-2)e^1 = -5e < 0 \Rightarrow \text{es un máximo.}$$

Solución: Mínimo para $x = -\frac{3}{2}$. Máximo para $x = 1$.

EJERCICIO 3

Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, estudiar razonadamente: Su dominio, continuidad, derivabilidad, crecimiento y decrecimiento. Con este estudio, ¿es posible conocer sus máximos relativos? ¿Cuáles son?

Dominio. La función no está definida si el denominador se anula.

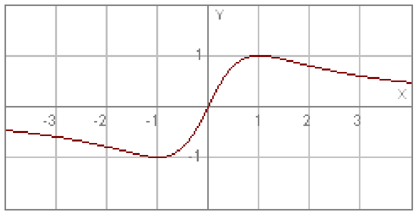
$x^2+1 = 0$; $x^2 = -1$. Imposible. Siempre está definida.

Domino: $\Re$.

Continuidad. Como la función es racional y siempre está definida, siempre es continua.

Continuidad: $\Re$.

Derivabilidad. Análogo.



$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Derivabilidad: $\Re$. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Crecimiento. La derivada debe ser positiva:

$$\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0 \Rightarrow -2x^2+2 > 0 \Rightarrow 2x^2-2 < 0 \Rightarrow x^2-1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Si cambiamos de signo en una desigualdad, debemos cambiar el sentido.

Crecimiento: $(-1,1)$.
Decrecimiento: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Como es una función continua y para $x = -1$ pasa de decreciente a creciente, tiene un mínimo. Lo contrario ocurre para $x = 1$, por lo que tiene un máximo.

Mínimo para $x = -1$. Máximo para $x = 1$.

Hallar b y c para que la función $f(x) = -x^2+bx+c$ tenga un máximo en el punto $P(4,2)$.

Imponemos las condiciones:

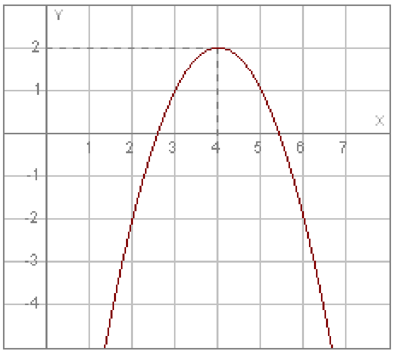
1. Pasa por P(4,2). $f(4) = 2$: $-16+4b+c = 2$; $4b+c = 18$.

2. Máximo para x = 4. Su derivada se anula:

$f'(x) = -2x+b$. $f'(4) = 0$: $-8+b = 0$; $b = 8$.

Sustituyendo en la 1ª condición: $32+c = 18$; $c = -14$.

Solución: $b = 8$; $c = -14$.



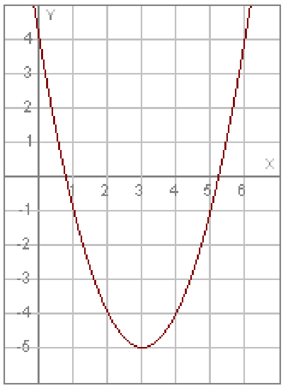
$f(x) = -x^2+8x-14$

Determinar una función cuadrática que pasa por $P(1,-1)$, $Q(2,-4)$ y tiene un mínimo en $M(3,-5)$.

Sea $f(x) = ax^2+bx+c$. Deben cumplirse las condiciones:

1. Pasa por $P(1,-1)$. $f(1) = -1$: $a+b+c = -1$.
2. Pasa por $Q(2,-4)$. $f(2) = -4$: $4a+2b+c = -4$.
3. Pasa por $M(3,-5)$. $f(3) = -5$: $9a+3b+c = -5$.
4. Mínimo para $x = 3$. La derivada se anula:

$f'(x) = 2ax+b$; $f'(3) = 0$; $6a+b = 0$.



$y = x^2-6x+4$

Se forma el sistema: $\left.\begin{array}{r} a+b+c = -1 \\ 4a+2b+c = -4 \\ 9a+3b+c = -5 \\ 6a+b = 0 \end{array}\right\}$

Como tiene más ecuaciones que incógnitas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1ª, 2ª y 4ª y comprobamos a continuación que la solución también satisface la 2ª:

$\left.\begin{array}{r} a+b+c = -1 \\ 4a+2b+c = -4 \\ 6a+b = 0 \end{array}\right\}$. Si restamos a la 2ª la 1ª:

$\left.\begin{array}{l} 3a+b = -3 \\ 6a+b = 0 \end{array}\right\}$ $3a = 3$; $a = 1$. (1ª) $3+b = -3$; $b = -6$.

Sustituyendo el la 1ª anterior: $1-6+c = -1$; $c = 4$.

Comprobamos, por último, que la solución cumple la 3ª ecuación inicial:

$9-18+4 = -5$. Cierto. La solución es válida.

Solución: $f(x) = x^2-6x+4$.

Sea k un número real y sea $f:\Re \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = \cos(x)+kx$.

(1) Determinar todos los valores de k para los que la función es creciente en todo su dominio.

(2) Para k=1, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x=0.

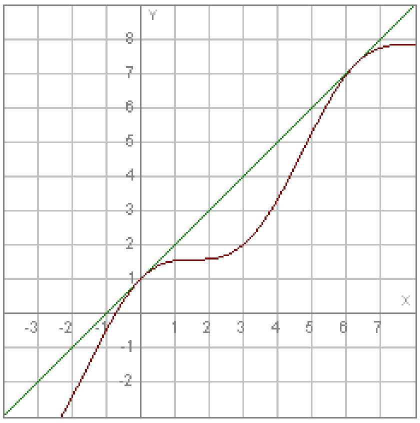
(1) La función es creciente si su derivada es positiva:

$f'(x) = -\text{sen}x+k$

$-\text{sen}x+k > 0$; $k > \text{sen}x$.

Como el máximo valor que toma senx es 1, deberá ser: $k > 1$. Podemos considerar también la igualdad, que ocurre en puntos aislados.

Solución: $k \geq 1$.



y = cosx+x | y = x+1

(2) La función es: $f(x) = \cos x+x$; $f'(x) = -\text{sen}x+1$.

$f(0) = \cos 0+0 = 1$; $f'(0) = -\text{sen}0+1 = 1$.

La ecuación de la recta tangente es:

$y-f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$; $y-1 = x$; $y = x+1$.

Solución: $y = x+1$.

El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es: $N(t) = 1000\left(25+te^{\frac{-t}{20}}\right)$, para $0 \le t \le 100$. ¿Cuánto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instante se alcanzan, respectivamente, dichos valores?

Derivamos dos veces:

$$N'(t) = 1000\left(e^{\frac{-t}{20}} + t\frac{-1}{20}e^{\frac{-t}{20}}\right) = 1000e^{\frac{-t}{20}}\left(1-\frac{t}{20}\right).$$

$$N''(t) = 1000\frac{-1}{20}e^{\frac{-t}{20}}\left(1-\frac{t}{20}\right)+1000e^{\frac{-t}{20}}\frac{-1}{20} = \frac{-1000}{20}e^{\frac{-t}{20}}\left(2-\frac{t}{20}\right) = -500e^{\frac{-t}{20}}\left(2-\frac{t}{20}\right).$$

La derivada se anula si:

$$1000e^{\frac{-t}{20}}\left(1-\frac{t}{20}\right) = 0 \Rightarrow 1-\frac{t}{20} = 0 \;;\; 20-t = 0 \;;\; t = 20.$$

La exponencial siempre es positiva.

Comprobamos el signo que toma en la 2ª derivada:

$$N''(20) = -500e^{-1}(2-1) = -500e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{es un máximo.}$$

El valor correspondiente es:

$$N(20) = 1000\left(25+20e^{-1}\right) = 1000\left(25+\frac{20}{e}\right) \approx 1000(25+7.358) = 32358.$$

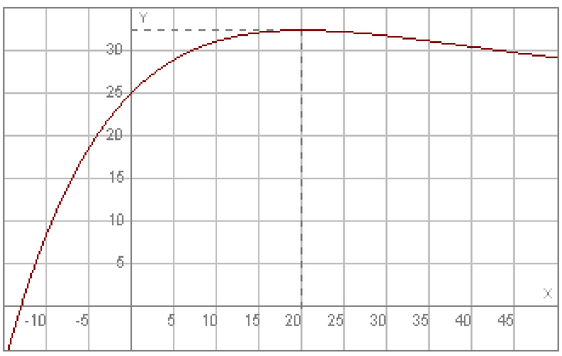
Comprobamos el valor que toma en los extremos del intervalo de definición:

$$N(0) = 1000(25+0) = 25000.$$

$$N(100) = 1000\left(25+100e^{-5}\right) \approx 1000(25+0.674) = 25674.$$

Como la función es continua, el menor valor lo alcanza para t = 0.

Solución: Máximo en (20,32358).
Mínimo en (0,25000).



$y = 25+xe^{\frac{-x}{20}}$

La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f:[0,3]\rightarrow\Re$ definida por $f(t) = 300t(3-t)$, donde t mide el tiempo en horas.

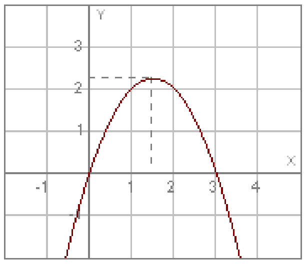
(1) Calcular los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

(2) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

(1) La función es creciente si su derivada es positiva:

$f(t) = 900t-300t^2$; $f'(t) = 900-600t$.

$900-600t > 0$; $3-2t > 0$; $2t < 3$; $t < \frac{3}{2}$; $t <$ 1h. 30min.



y = x(3-x)

Solución: Crece en la primera hora y media.
Decrece a partir de ese momento.

(2) Como la función es continua y a la hora y media la capacidad pasa de ser creciente a decreciente, en ese momento es máxima.

Solución: El mejor momento es a la hora y media.

La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función $P:[2,12]\rightarrow\Re$ dada por $P(t) = \begin{cases} 10+(t-6)^2 & \text{si } 2 \le t \le 10 \\ 28-2^{t-9} & \text{si } 10 < t \le 12 \end{cases}$.

(1) Representar gráficamente la función P e indicar en qué períodos de tiempo crece o decrece la población.

(2) Indicar los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo.

(3) Si la población evoluciona a partir de t=12 con la misma función que para $10<t\le12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta, dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

(1) Representamos las dos expresiones, en sus respectivos intervalos:

1. $y = 10+(t-6)^2 = 10+t^2-12t+36 = t^2-12t+46$.

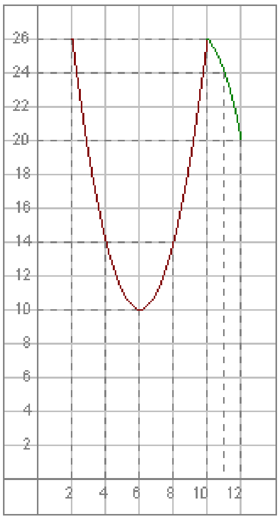
Como es una parábola, hallamos el vértice y damos valores:

$y' = 2t-12$; $2t-12 = 0$; $t = 6$.

2. $y = 28-2^{t-9}$. Es una función exponencial. Como no tiene extremos, damos valores en su dominio:

x	$t^2-12t+46$
6	10
4	14
2	26
8	14
10	26

x	$28-2^{t-9}$
10	26
11	24
12	20



Vemos por la gráfica que la función es creciente desde x=6 hasta x=10.

Solución: Crece desde los 6 hasta los 10 años.
Decrece desde los 2 a los 6 años y a partir de los 10.

(2) El valor mínimo lo alcanza a los 6 años y los máximo a los 2 y 12 años.

Solución: Mínimo a los 6 años.
Máximo a los 2 y 12 años.

(3) Se extingue si N(t) se hace cero, a partir de los 12 años. La función se anula si:

$28-2^{t-9} = 0$; $2^{t-9} = 28$; $t-9 = \log_2 28$; $t = 9+\log_2 28$; $t \approx 13.81$.

Solución: Se extinguiría a los 13 años y 296 dias.

Una partícula se desplaza a lo largo de una curva de ecuación $y = f(x)$, siendo $f:\Re\to\Re$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(1) ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admita recta tangtente?

(2) Determinar las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

---

(1) Estudiamos la derivabilidad de la función.

Comprobamos primero que es continua en el 0:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0. \text{ Es continua.}$$

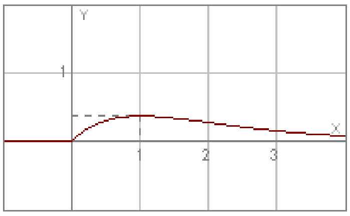
Hallamos la función derivada (excepto en 0) y estudiamos la derivabilidad en el 0:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}-xe^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) = e^0-0 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{No es derivable para } x = 0.$$

Solución: No admite recta tangente para $x = 0$.

(2) Estudiamos la expresión $y = xe^{-x}$:



$y' = e^{-x}-xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$; $y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(2-x)$.

La derivada se anula si:

$e^{-x}(1-x) = 0$; $1-x = 0$; $x = 1$.

Para ese valor es: $y'' = -e^{-1} < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Si transformamos: $f(1) = 1\cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Solución: $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$