

## DINÁMICA

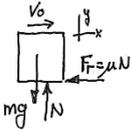
En estos ejemplos resueltos consideramos iguales el coeficiente de rozamiento estático y dinámico.

**Ejemplo 1.** Tenemos un bloque de 40 kg sobre una superficie horizontal moviéndose con una velocidad inicial de 36 km/h. Se pide:

- Tiempo que tarda en pararse si no hay rozamiento.
- Distancia que recorrerá hasta que se pare por completo si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y la pared es de 0,2.

### Solución

Datos:  $m=40\text{ kg}$ ,  $v_0=36\frac{\text{km}}{\text{h}}=10\text{ m/s}$



Como hay deslizamiento entre bloque y suelo, entonces el rozamiento será máximo  $F_r = \mu N$  y con sentido contrario al deslizamiento. Tomo el eje  $x$  en la dirección y sentido de la velocidad inicial, de esta manera la aceleración solo tiene componente  $x$ .

$$\begin{cases} (2L_N)_x: -\mu N = \max \\ (2L_N)_y: -mg + N = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = mg \\ \alpha_x = \frac{-\mu N}{m} = \frac{-\mu mg}{m} \Rightarrow \alpha_x = -\mu g \end{cases}$$

a) ¿ $t_1$  |  $v_{x1}=0$  y  $\mu=0$ ?

$$\mu=0 \Rightarrow \alpha_x = -0,2 \cdot 9,8 = 0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \text{MRU} \Rightarrow \text{no parará nunca}$$

b) ¿ $\Delta s(t_0, t_1)$  |  $v_{x1}=0$  y  $\mu=0,2$ ?

Como no hay cambio de sentido de movimiento:  $\Delta s = |\Delta x|$ .

Tomamos  $x_0=0$ , por lo que solo resta calcular  $x_1$ .

$\alpha_x = -\mu g = -0,2 \cdot 9,8 = -1,96 \text{ m/s}^2 = \text{cte} \Rightarrow \text{MRUA}$ . Así:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} \alpha_x t^2 \Rightarrow x = 10t - 0,98t^2 \Rightarrow v_x = 10 - 1,96t$$

$$v_x = 0 \Rightarrow 10 - 1,96t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{10}{1,96} = 5,10 \text{ s}$$

$$x_1 = 10 \cdot 5,1 - 0,98 \cdot 5,1^2 = 25,51 \text{ m}$$

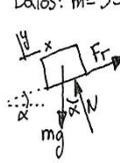
$$\Delta s = |\Delta x| = |x_1 - x_0| = |25,51 - 0| = \boxed{25,51 \text{ m}}$$

**Ejemplo 2.** Se tiene permanentemente en reposo un bloque de 35 kg sobre un plano inclinado  $20^\circ$  respecto a la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el suelo es 0,4, se pide:

- Fuerza de rozamiento.
- Comprobar que el rozamiento está dentro de sus límites.

### Solución

Datos:  $m=35\text{ kg}$ ;  $\alpha=20^\circ$ ;  $\mu=0,4$ ;  $v=0\text{ m/s}$ .



Como está permanentemente en reposo usaremos las ecs. de la estática ( $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$ ) y el rozamiento no tiene por qué tomar su valor máximo, luego  $-\mu N \leq F_r \leq \mu N$ . Se puede afinar aún más,  $0 \leq F_r \leq \mu N$ , puesto que el sentido dibujado para el rozamiento a buen seguro es correcto. Tomo el eje  $x$  paralelo a la rampa para que el rozamiento solo tenga componente  $x$  y la normal solo componente  $y$ .

$$\begin{cases} (2L_N)_x: -mg \sin \alpha + F_r = 0 \\ (2L_N)_y: -mg \cos \alpha + N = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

a) ¿ $F_r$ ?

$$F_r = mg \sin \alpha = 35 \cdot 9,8 \sin 20^\circ = \boxed{117,31 \text{ N}}$$

b) ¿Comprobar desigualdad del rozamiento?

$$\text{De (2): } N = mg \cos \alpha = 35 \cdot 9,8 \cos 20^\circ = 322,31 \text{ N}$$

$$\mu N = 0,4 \cdot 322,31 = 128,93 \text{ N}$$

Efectivamente se cumple  $0 \leq F_r \leq \mu N$ , pues

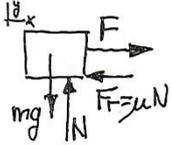
$$0 \leq 117,31 \leq 128,92$$

**Ejemplo 3.** Tenemos un bloque de 30 kg inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Tiramos de él horizontalmente con una fuerza de 200 N, lo que provoca la aceleración del mismo. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,35. Se pide:

- Aceleración del bloque.
- Tiempo que tarda en recorrer 50 m.

**Solución**

Datos:  $m = 30 \text{ kg}$ ;  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ;  $F = 200 \text{ N}$ ;  $a > 0$ ;  $\mu = 0,35$



Como inicialmente está en reposo y se acelera hacia la derecha, entonces la fuerza de rozamiento va hacia la izquierda y tiene módulo máximo:  $F_r = \mu N$ .

Elijo el eje x en la dirección del suelo, así el rozamiento solo tiene componente x y la normal solo componente y. La aceleración solo tiene componente x.

$$\begin{aligned} (2LN)_x: & F - \mu N = m a_x \quad (1) \\ (2LN)_y: & -mg + N = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

a) ¿ $a_x$ ?

$$\begin{aligned} \text{De (2): } N &= mg; \text{ De (1): } F - \mu mg = m a_x \Rightarrow \\ \Rightarrow a_x &= \frac{1}{m} (F - \mu mg) = \frac{1}{30} (200 - 0,35 \cdot 30 \cdot 9,8) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_x &= \boxed{3,24 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

b) ¿ $t_1$  |  $x_0 = 0 \text{ m}$  y  $x_1 = 50 \text{ m}$ ?

Tomamos  $x_0 = 0 \text{ m}$ . Como  $a_x = \text{cte}$ , entonces MRUA

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow x = 1,62 t^2 \text{ (SI)}$$

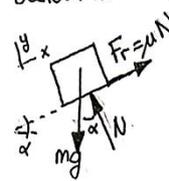
$$x_1 = 50 \Rightarrow 1,62 t_1^2 = 50 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{50}{1,62}} = \boxed{5,56 \text{ s}}$$

**Ejemplo 4.** Tenemos un bloque de 5 kg inicialmente en reposo sobre un plano inclinado  $30^\circ$  respecto la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,4. Se pide:

- Aceleración del bloque.
- Tiempo que tarda en bajar una altura de 10 m.

**Solución**

Datos:  $m = 5 \text{ kg}$ ;  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\mu = 0,4$



Por el enunciado está inicialmente en reposo y se acelerará hacia abajo por tanto, el rozamiento será máximo y de sentido hacia arriba.

Elijo el eje x paralelo a la rampa para que rozamiento y aceleración solo tengan componente x, y la normal solo componente y.

$$\begin{aligned} (2LN)_x: & -mg \sin \alpha + \mu N = m a_x \quad (1) \\ (2LN)_y: & -mg \cos \alpha + N = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

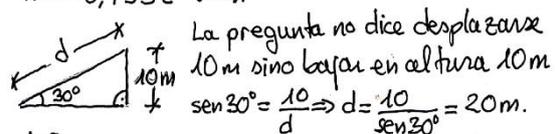
a) ¿ $a_x$ ?

$$\begin{aligned} \text{De (2): } N &= mg \cos \alpha \\ \text{De (1): } -mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha &= m a_x \Rightarrow \\ a_x &= -g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha = -9,8 \sin 30^\circ + 0,4 \cdot 9,8 \cos 30^\circ \\ a_x &= \boxed{-1,51 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

La componente x de la aceleración es negativa porque el eje x es positivo rampa arriba mientras que la aceleración tiene sentido rampa abajo.

b) ¿Tiempo en bajar una altura de 10 m?

$$\begin{aligned} \text{Como } a_x = \text{cte} \Rightarrow \text{MRUA} \Rightarrow x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ x &= -0,753 t^2 \text{ (SI)} \end{aligned}$$



La pregunta no dice desplazarse 10 m sino bajar en altura 10 m

$$\sin 30^\circ = \frac{10}{d} \Rightarrow d = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ m.}$$

Así  $x_0 = 0 \text{ m}$  y  $x_1 = -20 \text{ m}$ . Quiero hallar  $t_1$

$$-0,753 t_1^2 = -20 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{20}{0,753}} = \boxed{5,16 \text{ s}}$$

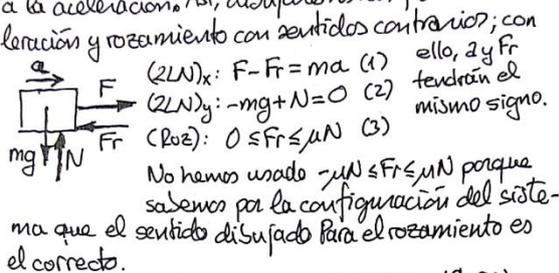
**Ejemplo 5.** Tenemos un bloque de 8 kg inicialmente en reposo sobre el que actúa la fuerza  $F$  inicialmente nula y que aumenta progresivamente hasta 100 N. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es  $\mu = 0,25$ . Se pide:

- Valores de  $F$  para los que el bloque está en reposo.
- Gráfica de la aceleración respecto de  $F$ .
- Gráfica de la fuerza de rozamiento  $F_r$  respecto de  $F$ .



**Solución**

Datos:  $m = 8 \text{ kg}$ ;  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ;  $0 \leq F \leq 100 \text{ N}$ ;  $\mu = 0,25$   
 Estamos ante un caso de velocidad inicial nula, luego la velocidad tendrá el mismo sentido que la aceleración; por tanto, el rozamiento tendrá sentido opuesto a la aceleración. Así, dibujaremos las flechas de aceleración y rozamiento con sentidos contrarios; con



(2):  $N = mg \Rightarrow \mu N = \mu mg = 0,25 \cdot 8 \cdot 9,8 = 19,6 \text{ N}$

(1):  $a = \frac{1}{m}(F - F_r) \Rightarrow a = \frac{F - F_r}{8}$  (1')

(3):  $0 \leq F_r \leq 19,6 \text{ N}$  (2')

Con (1') y (2') el problema está 'chupado'.

a) ¿ $F$  si  $a = 0$ ?

$a = 0 \stackrel{(1')}{\Rightarrow} F - F_r = 0 \Rightarrow F_r = F \stackrel{(2')}{\Rightarrow}$

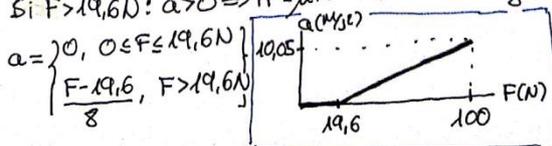
Reposo  $\Leftrightarrow 0 \leq F \leq 19,6 \text{ N}$

Si  $F > 19,6 \text{ N}$ , entonces el sistema se acelera hacia la derecha ( $a > 0$ ).

b) ¿Gráfica  $a = a(F)$ ?

$a = 0 \Leftrightarrow 0 \leq F \leq 19,6 \text{ N}$

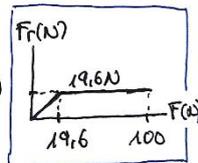
Si  $F > 19,6 \text{ N}$ :  $a > 0 \Rightarrow F_r = \mu N = 19,6 \text{ N} \Rightarrow a = \frac{F - 19,6}{8}$



c) ¿Gráfica  $F_r = F_r(F)$ ?

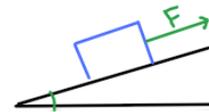
Hemos visto:  $F_r = F$  si  $F \leq 19,6 \text{ N}$   
 $F_r = 19,6 \text{ N}$  si  $F > 19,6 \text{ N}$

$F_r = \begin{cases} F, & 0 \leq F \leq 19,6 \text{ N} \\ 19,6 \text{ N}, & F > 19,6 \text{ N} \end{cases}$



**Ejemplo 6.** El bloque de la figura es de 15 kg, se encuentra inicialmente en reposo y sobre él actúa la fuerza  $F \geq 0 \text{ N}$ . La inclinación de la rampa es de  $30^\circ$  y el coeficiente de rozamiento es de 0,2. Se pide:

- Valores de  $F$  para el reposo.
- Vectores aceleración y rozamiento si  $F = 120 \text{ N}$ .
- Igual que b) si  $F = 90 \text{ N}$ .
- Igual que b) si  $F = 60 \text{ N}$
- Igual que b) si  $F = 30 \text{ N}$ .



**Solución**

Datos:  $m = 15 \text{ kg}$ ;  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ;  $F \geq 0$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\mu = 0,2$

(2LN)<sub>x</sub>:  $-mg \sin \alpha + F - F_r = ma$  (1)  
 (2LN)<sub>y</sub>:  $-mg \cos \alpha + N = 0$  (2)  
 (Roz):  $-\mu N \leq F_r \leq \mu N$  (3)

Elijo eje  $x$  paralelo a la rampa. Elijo flechas de  $a$  y  $F_r$  con sentidos distintos para que tengan mismo signo.

De (2):  $N = mg \cos \alpha$

De (1):  $a = \frac{1}{m}(-mg \sin \alpha + F - F_r)$  } sustituyendo

De (3):  $-\mu mg \cos \alpha \leq F_r \leq \mu mg \cos \alpha$  }  $m, \alpha$  y  $\mu$  por sus valores

$a = \frac{1}{15}(-73,5 + F - F_{roz})$  |  $-25,46 \leq F_r \leq 25,46 \text{ (N)}$

a) ¿ $F$  |  $a = 0$ ?

$a = 0 \Rightarrow -73,5 + F - F_{roz} = 0 \Rightarrow F_{roz} = -73,5 + F \Rightarrow$

$\begin{cases} -25,46 \leq -73,5 + F \Rightarrow F \geq 48,04 \text{ N} \\ -73,5 + F \leq 25,46 \Rightarrow F \leq 98,96 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow$

Reposo  $\Leftrightarrow 48,04 \text{ N} \leq F \leq 98,96 \text{ N}$

Observando la figura deducimos que si  $F < 48,04 \text{ N}$ , entonces se acelera rampa abajo. Si  $F > 98,96 \text{ N}$ , entonces se acelera rampa arriba ( $a > 0$ )

b) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $F = 120 \text{ N}$ ?

$F = 120 \text{ N} > 98,96 \text{ N} \Rightarrow a > 0$  y  $F_r = \mu N = 25,46 \text{ N}$

$a = \frac{1}{15}(-73,5 + 120 - 25,46) = 1,40 \text{ m/s}^2$

$\vec{a} = a \vec{e} = 1,40 \vec{e} \text{ m/s}^2$  |  $\vec{F}_r = -F_r \vec{e} = -25,46 \vec{e} \text{ N}$

c) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $F = 90 \text{ N}$ ?

$F = 90 \text{ N} \in [48,04 \text{ N}, 98,96 \text{ N}] \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$

$F_{roz} = -73,5 + 90 = 16,5 \text{ N}$

$\vec{a} = a \vec{e} = 0 \text{ m/s}^2$  |  $\vec{F}_r = -F_r \vec{e} = -16,5 \vec{e} \text{ N}$

d) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $F = 60 \text{ N}$ ?

$F = 60 \text{ N} \in [48,04 \text{ N}, 98,96 \text{ N}] \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$

$F_{roz} = -73,5 + 60 = -13,5 \text{ N}$

$\vec{a} = a \vec{e} = 0 \text{ m/s}^2$  |  $\vec{F}_r = -F_r \vec{e} = +13,5 \vec{e} \text{ N}$

e) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $F = 30 \text{ N}$ ?

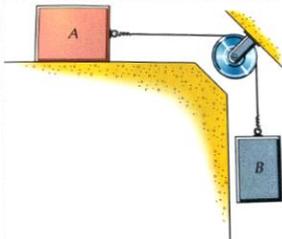
$F = 30 \text{ N} < 48,04 \text{ N} \Rightarrow a < 0$  y  $F_r = -\mu N = -25,46 \text{ N}$

$a = \frac{1}{15}(-73,5 + 30 - (-25,46)) = -1,20 \text{ m/s}^2$

$\vec{a} = a \vec{e} = -1,20 \vec{e} \text{ m/s}^2$  |  $\vec{F}_r = -F_r \vec{e} = 25,46 \vec{e} \text{ N}$

**Ejemplo 7\***. El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo. El bloque A tiene una masa de 125 kg. El bloque B tiene una masa de 40 kg. Se pide:

- Valores de  $\mu$  entre el bloque A y el suelo para que el sistema permanezca en reposo.
- Vectores aceleración y rozamiento del bloque A si  $\mu = 0,1$ .
- Vectores aceleración y rozamiento del bloque A si  $\mu = 0,4$ .



**Solución**

Datos:  $m_A = 125 \text{ kg}$ ,  $m_B = 40 \text{ kg}$   
 Como inicialmente está en reposo, aceleración y rozamiento tendrán sentidos opuestos, así que los dibujaremos con sentidos opuestos. Usamos la misma aceleración 'a' para los dos bloques, pues el módulo de su aceleración coincide (si A se acelera hacia la derecha, B acelera hacia abajo).

$$\left. \begin{aligned} (2LN)_x^{\text{A}}: T - F_r &= m_A a & (1) \\ (2LN)_y^{\text{A}}: -m_A g + N &= 0 & (2) \\ (Roz)^{\text{A}}: 0 \leq F_r \leq \mu N & & (3) \end{aligned} \right\}$$

$$(2LN)_y^{\text{B}}: T - m_B g = -m_B a & (4)$$

Como es seguro que el rozamiento tiene el sentido dibujado no hace falta hacer  $-\mu N \leq F_r \leq \mu N$  en (3).

Como no sabemos si seguirá en reposo o acelerará hacemos lo siguiente:  
 - Eliminar todas las incógnitas salvo 'a',  $F_r$  y la incógnita de los apartados (en este caso 'a'). Por tanto eliminaremos 'T' y 'N' de las ecs.  
 - Despejar 'a' en función de  $F_r$  y la incógnita del problema (en este caso 'a'). No para nada si al despejar 'a' no aparecen  $F_r$  y 'a' a la vez; de hecho, mejor.  
 - Trabajar en (3) para que no aparezca N.

Veámoslo.  
 (1)-(4):  $T - F_r - T + m_B g = m_A a - (-m_B a)$   
 $-F_r + m_B g = (m_A + m_B) a \Rightarrow a = \frac{m_B g - F_r}{m_A + m_B} \quad (1')$

(2):  $N = m_A g \Rightarrow 0 \leq F_r \leq \mu m_A g \quad (2')$   
 Sustituimos los datos en (1') y (2):

$$a = \frac{392 - F_r}{165} \quad (1'') \quad 0 \leq F_r \leq 1225 \mu \quad (2'')$$

Hecho esto el problema ya está chupado.

a) ¿ $\mu$  si  $a=0$ ?  
 $a=0 \Rightarrow 392 - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 392 \text{ N} \Rightarrow 0 \leq 392 \leq 1225 \mu \Rightarrow \mu \geq \frac{392}{1225} \Rightarrow \mu \geq 0,32$   
 Reposo  $\Leftrightarrow \mu \geq 0,32$   
 Si  $\mu < 0,32$ , el bloque A se acelera hacia la derecha.

b) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $\mu = 0,1$ ?  
 $\mu = 0,1 < 0,32 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow F_r = \mu N = 0,1 \cdot 1225 \Rightarrow F_r = 122,5 \text{ N}$   
 $a = \frac{392 - 122,5}{165} = 1,63 \text{ m/s}^2$   
 $\vec{a} = a\vec{i} = 1,63\vec{i} \text{ m/s}^2$ ;  $\vec{F}_r = -F_r\vec{i} = -122,5\vec{i} \text{ N}$

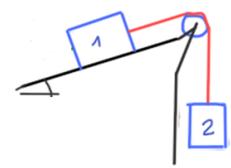
c) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_{roz}$  si  $\mu = 0,4$ ?  
 $\mu = 0,4 > 0,32 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 392 - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 392 \text{ N}$   
 $\vec{a} = a\vec{i} = \vec{0} \text{ m/s}^2$ ;  $\vec{F}_r = -F_r\vec{i} = -392\vec{i} \text{ N}$

**Ejemplo 8\***. El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo. El cuerpo 1 tiene una masa  $m_1$  desconocida y un coeficiente de rozamiento con la rampa de 0,25. La rampa tiene una inclinación de  $30^\circ$  y el cuerpo 2 una masa de 18 kg. Se pide:

- Valores de  $m_1$  para los que el sistema permanece en reposo.
- Valor de  $m_1$  para el rozamiento sea nulo.

En los siguientes apartados se pide los vectores aceleración y rozamiento si...

- ...  $m_1 = 15 \text{ kg}$ .
- ...  $m_1 = 30 \text{ kg}$ .
- ...  $m_1 = 50 \text{ kg}$ .
- ...  $m_1 = 70 \text{ kg}$ .



**Solución**

Datos:  $v_0 = 0$ ;  $m_1 = ?$ ;  $\mu = 0,25$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $m_2 = 18 \text{ kg}$

$$\left. \begin{aligned} (2LN)_x^{\text{1}}: -m_1 g \sin \alpha - F_r + T &= m_1 a & (1) \\ (2LN)_y^{\text{1}}: -m_1 g \cos \alpha + N &= 0 & (2) \\ (Roz)^{\text{1}}: -\mu N \leq F_r \leq \mu N & & (3) \end{aligned} \right\}$$

$$(2LN)_y^{\text{2}}: T - m_2 g = -m_2 a \quad (4)$$

Notar que en ambos bloques he escrito el escalón 'a' para la aceleración (si 1 va rampa arriba, entonces 2 desciende)

En ① he dibujado las flechas de  $\vec{z}$  y  $F_r$  con sentido contrario para que tengan el mismo signo. Vamos a eliminar  $T$  y  $N$  de las ecs. Para eliminar  $T$  hacemos (1)-(4):

$$-m_1 g \sin \alpha - F_r + T - T + m_2 g = m_1 a - (m_2 a) \Rightarrow$$

$$-m_1 g \sin \alpha - F_r + m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 g \sin \alpha - F_r + m_2 g) \quad (1')$$

Para eliminar  $N$  hacemos (2):  $N = m_1 g \cos \alpha$ . En (3):

$$\mu m_1 g \cos \alpha \leq F_r \leq \mu m_1 g \cos \alpha \quad (2')$$

Como vemos, la estrategia ha sido despejar  $a$  en función de la incógnita  $m_1$  y de  $F_r$  (el resto es conocido). También hemos establecido la desigualdad de  $F_r$  en función de la incógnita  $m_1$  y de  $a$  (en este caso  $a$  no ha aparecido y el resto es conocido). Ahora en (1') y (2') sustituimos los valores de  $\mu, \alpha, m_2$ .

$$a = \frac{176,4 - F_r - 4,9 m_1}{m_1 + 18} \quad (1'') \quad -2,122 m_1 \leq F_r \leq 2,122 m_1 \quad (2'')$$

Con (1'') y (2'') el resto está 'chupado'.

a) ¿ $m_1$  |  $a=0$ ?

$$a=0 \Rightarrow 176,4 - F_r - 4,9 m_1 = 0 \Rightarrow F_r = 176,4 - 4,9 m_1 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,122 m_1 \leq 176,4 - 4,9 m_1 \Rightarrow 2,778 m_1 \leq 176,4 \\ 176,4 - 4,9 m_1 \leq 2,122 m_1 \Rightarrow 176,4 \leq 7,022 m_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \leq 63,50 \text{ kg} \\ m_1 \geq 25,12 \text{ kg} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Reposo} \Leftrightarrow 25,12 \text{ kg} \leq m_1 \leq 63,50 \text{ kg}$$

Observando la figura:  $*m_1 < 25,12 \text{ kg} \Rightarrow a > 0$ , pues al ser  $m_1$  pequeño, entonces  $m_2$  eleva a  $m_1$ .  
 $*m_1 > 63,50 \Rightarrow a < 0$ , pues al ser  $m_1$  muy pesado, entonces es  $m_1$  quien eleva a  $m_2$ .

b) ¿ $m_1$  |  $F_r=0$  y  $a=0$ ?

$$a=0 \text{ y } F_r=0 \Rightarrow 176,4 - 4,9 m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = 36 \text{ kg}$$

c) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_r$  si  $m_1=15 \text{ kg}$ ?

$$m_1 = 15 \text{ kg} < 25,12 \text{ kg} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow F_r = \mu N \Rightarrow$$

$$F_r = 0,25 \cdot 15 \cdot 9,8 \cos 30^\circ = 31,83 \text{ N} \Rightarrow$$

$$a = \frac{176,4 - 31,83 - 4,9 \cdot 15}{15 + 18} = 2,15 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = a \vec{e} = +2,15 \vec{e} \text{ m/s}^2 \quad \vec{F}_r = -F_r \vec{e} = -31,83 \vec{e} \text{ N}$$

Lo que significa que la aceleración es paralela a la rampa, sentido hacia arriba, de módulo  $2,15 \text{ m/s}^2$ ; el rozamiento es paralelo a la rampa, sentido hacia abajo de módulo  $31,83 \text{ N}$ .

d) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_r$  si  $m_1=30 \text{ kg}$ ?

$$m_1 = 30 \text{ kg} \in [25,15 \text{ kg}, 63,50 \text{ kg}] \Rightarrow a=0 \Rightarrow$$

$$176,4 - F_r - 4,9 \cdot 30 = 0 \Rightarrow F_r = 29,4 \text{ N}$$

$$\vec{a} = a \vec{e} = 0 \text{ m/s}^2 \quad \vec{F}_r = -F_r \vec{e} = -29,4 \vec{e} \text{ N}$$

El sistema está en reposo y el rozamiento va rampa abajo con módulo  $29,4 \text{ N}$

e) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_r$  si  $m_1=50 \text{ kg}$ ?

$$m_1 = 50 \text{ kg} \in [25,15 \text{ kg}, 63,50 \text{ kg}] \Rightarrow a=0 \Rightarrow$$

$$176,4 - F_r - 4,9 \cdot 50 = 0 \Rightarrow F_r = -68,6 \text{ N}$$

$$\vec{a} = a \vec{e} = 0 \text{ m/s}^2 \quad \vec{F}_r = -F_r \vec{e} = -(-68,6) \vec{e} = 68,6 \vec{e} \text{ N}$$

El sistema está en reposo y el rozamiento va rampa arriba con módulo  $68,6 \text{ N}$ .

f) ¿ $\vec{a}$  y  $\vec{F}_r$  si  $m_1=70 \text{ kg}$ ?

$$m_1 = 70 \text{ kg} > 63,5 \text{ kg} \Rightarrow a < 0 \Rightarrow F_r = -\mu N \Rightarrow$$

$$F_r = -0,25 \cdot 70 \cdot 9,8 \cos 30^\circ = -148,52 \text{ N} \quad (\text{también podríamos haber hecho: } F_r = -2,122 \cdot 70 = -148,54 \text{ N})$$

$$a = \frac{176,4 - (-148,52) - 4,9 \cdot 70}{70 + 18} = -0,21 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = a \vec{e} = -0,21 \vec{e} \text{ m/s}^2 \quad \vec{F}_r = -F_r \vec{e} = 148,52 \vec{e} \text{ N}$$

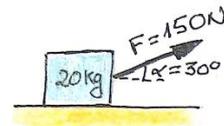
La aceleración es rampa abajo, de módulo  $0,21 \text{ m/s}^2$ . El rozamiento es rampa arriba, de módulo  $148,52 \text{ N}$ .

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**Nota a los ejercicios de esta sección.** Salvo que se diga lo contrario, consideramos iguales el coeficiente de rozamiento estático y dinámico. Cuando se pida una aceleración o una fuerza nos referimos a su valor vectorial o bien a su módulo y sentido, pues la dirección siempre será conocida.

1.1. Tenemos un bloque de  $20 \text{ kg}$  inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Tiramos de él con una fuerza de  $150 \text{ N}$  que tiene una inclinación de  $30^\circ$  sobre la horizontal, provocando la aceleración del bloque. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es de  $0,15$ , se pide:

- Aceleración del bloque.
- Velocidad cuando haya recorrido  $80 \text{ m}$ .

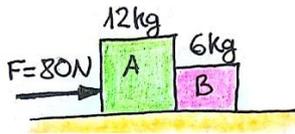


Sol. a)  $5,59 \text{ m/s}^2$  (hacia la derecha);

b)  $29,91 \text{ m/s}$  (hacia la derecha).

1.2. Se tienen dos bloques A y B en contacto sobre una superficie horizontal como indica la figura, inicialmente en reposo; el A de  $12 \text{ kg}$  y el B de  $6 \text{ kg}$ . Aplicamos  $80 \text{ N}$  sobre A. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento de ambos bloques con el suelo es del  $0,1$ , se pide:

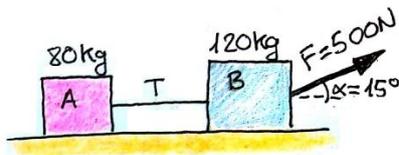
- Aceleración de los dos bloques.
- Fuerza normal entre ambos bloques.



Sol. a)  $3,46 \text{ m/s}^2$  (hacia la derecha);  
 b)  $26,67 \text{ N}$  (la normal aplicada en A hacia la izquierda y la normal en B hacia la derecha).

**1.3.** Se tienen dos bloques unidos por una cuerda como indica la figura, inicialmente en reposo; el A de  $80 \text{ kg}$  y el B de  $120 \text{ kg}$ . Aplicamos sobre B una fuerza de  $500 \text{ N}$  inclinada  $15^\circ$ , provocando la aceleración del conjunto. El coeficiente de rozamiento de A con el suelo es  $0,1$  y el de B con el suelo es de  $0,2$ , se pide:

- Aceleración de los dos bloques.
- Tensión de la cuerda (módulo).



Sol. a)  $0,976 \text{ m/s}^2$  (hacia la derecha);  
 b)  $156,48 \text{ N}$  (la tensión aplicada en A hacia la derecha y la tensión en B hacia la izquierda).

**1.4.** Se tiene permanentemente en reposo un bloque de  $35 \text{ kg}$  sobre un plano inclinado  $20^\circ$  sobre la horizontal. Se pide:

- Fuerza de rozamiento.
- Rango de valores del coeficiente de rozamiento.

Sol. a)  $117,34 \text{ N}$  (rampa arriba);  
 b)  $\mu \geq 0,364$ .

**1.5.** Sabemos que el coeficiente de rozamiento entre un bloque de  $60 \text{ kg}$  situado sobre un plano inclinado es de  $0,25$ . Se pide:

- Ángulo de inclinación del plano para que comience a deslizar si inicialmente está en reposo.
- Razonar si ha influido la masa del bloque en la resolución del apartado anterior.

Sol. a)  $14,04^\circ$ ; b) No influye, pues en la expresión de la inclinación no aparece la masa del bloque.

**1.6\***. (En este problema se diferenciará entre coeficiente de rozamiento estático y dinámico) El bloque de  $5 \text{ kg}$  se encuentra inicialmente en reposo y la fuerza  $F$  es inicialmente nula y aumenta progresivamente. El coeficiente de rozamiento estático es  $\mu_e = 0,35$  y el de rozamiento dinámico es  $\mu_d = 0,25$ . Se pide:

- Gráfica de la aceleración  $a$  respecto de  $F$ .
- Gráfica de la fuerza de rozamiento  $F_r$  respecto de  $F$ .



Sol. Las expresiones de las gráficas en el SI son:

$$a = \begin{cases} 0, & 0 \leq F \leq 17,15 \text{ N} \\ \frac{F-12,25}{5}, & F > 17,15 \text{ N} \end{cases}$$

$$F_{roz} = \begin{cases} F, & 0 \leq F \leq 17,15 \text{ N} \\ 12,25 \text{ N}, & F > 17,15 \text{ N} \end{cases}$$

**1.7\*\***. (En este problema se diferenciará entre coeficiente de rozamiento estático y dinámico) Se tiene un cuerpo de  $10 \text{ kg}$  inicialmente en reposo sobre un plano inicialmente horizontal. Se va inclinando el plano de manera que cuando la inclinación es de  $20^\circ$  el cuerpo comienza a bajar por el plano; además se verifica que cuando se ha desplazado  $18 \text{ m}$  la velocidad es de  $5 \text{ m/s}$ . Se pide:

- Coeficiente de rozamiento estático.
- Coeficiente de rozamiento dinámico.
- Fuerza de rozamiento para una inclinación de  $10^\circ$ .
- Fuerza de rozamiento para una inclinación de  $30^\circ$ .

Sol. a)  $0,268$ ; b)  $0,194$ ; c)  $17,02 \text{ N}$  (rampa arriba);  
 d)  $16,46 \text{ N}$  (rampa arriba).

**1.8\***. Inicialmente tenemos un bloque de  $30 \text{ kg}$  moviéndose en sentido ascendente a  $90 \text{ km/h}$  a lo largo de un plano inclinado  $15^\circ$  respecto la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es  $0,4$ , se pide:

- Altura máxima que alcanza.
- Razonar si una vez que se pare continuará parado o comenzará a bajar.

Sol. a)  $12,79 \text{ m}$ ; b) permanece en reposo, pues  $0,4 > \text{tg}(15^\circ)$ .

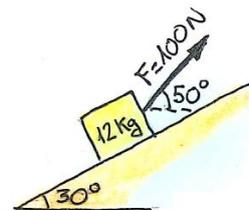
**1.9\***. Inicialmente tenemos un bloque de  $10 \text{ kg}$  moviéndose en sentido ascendente a  $18 \text{ km/h}$  a lo largo de un plano inclinado  $35^\circ$  respecto la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es  $0,25$ , se pide:

- Altura máxima que alcanza.
- Tiempo que tarda en volver al punto inicial.

Sol. a)  $0,94 \text{ m}$ ; b)  $0,95 \text{ s}$ .

**1.10.** Un bloque de  $12 \text{ kg}$  se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano inclinado  $30^\circ$ . Sobre él actúa una fuerza  $F = 100 \text{ N}$  que forma un ángulo de  $50^\circ$  sobre la horizontal, provocando el deslizamiento del bloque rampa arriba. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es  $0,25$ , se pide:

- Fuerza de rozamiento.
- Aceleración del bloque.

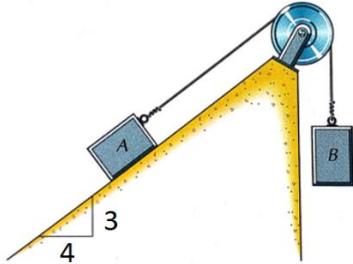


Sol. a)  $16,91 \text{ N}$  (rampa abajo); b)  $1,52 \text{ m/s}^2$  (rampa arriba).

**1.11.** El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo. La masa del bloque A es  $m_A = 50 \text{ kg}$ . El

coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el suelo es  $\mu = 0,25$ . Se pide la aceleración de A y el rozamiento para los siguientes valores de la masa del bloque B  $m_B$ :

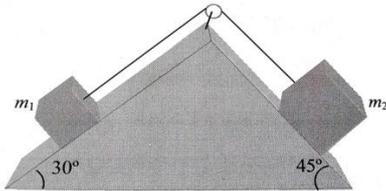
- Si  $m_B = 8$  kg; sabiendo que en este caso el bloque A desciende por la rampa.
- Si  $m_B = 25$  kg; sabiendo que en este caso el bloque A permanece en reposo.
- Si  $m_B = 60$  kg; sabiendo que en este caso el bloque A asciende por la rampa.



Sol. a)  $2,03 \text{ m/s}^2$  (rampa abajo),  $98 \text{ N}$  (rampa arriba);  
 b)  $0 \text{ m/s}^2$ ,  $49 \text{ N}$  (rampa arriba);  
 c)  $1,78 \text{ m/s}^2$  (rampa arriba),  $98 \text{ N}$  (rampa abajo).

**1.12.** Un bloque de masa  $m_2 = 25$  kg desciende por un plano inclinado  $45^\circ$  y tira, mediante una cuerda inextensible que pasa por la polea, de otro bloque de masa  $m_1 = 10$  kg, y lo hace subir por un plano inclinado  $30^\circ$ . El coeficiente de rozamiento entre los bloques y los planos es  $\mu = 0,3$ . Se pide:

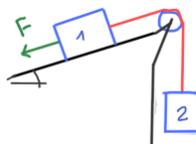
- Aceleración del conjunto.
- Módulo de la tensión de la cuerda.



Sol. a)  $1,34 \text{ m/s}^2$  ( $m_1$  rampa arriba y  $m_2$  rampa abajo);  
 b)  $87,83 \text{ N}$ .

**1.13\*.** El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo. El bloque 1 tiene una masa de 30 kg y sobre él actúa la fuerza  $F \geq 0$  N. El bloque 2 tiene una masa de 40 kg. La inclinación de la rampa es de  $30^\circ$  y el coeficiente de rozamiento entre el bloque 1 y la rampa es de 0,25. Se pide:

- Valores de F para los que el sistema permanece en reposo.
- Aceleración y rozamiento si  $F = 100$  N.
- Aceleración y rozamiento si  $F = 200$  N.
- Aceleración y rozamiento si  $F = 300$  N.
- Aceleración y rozamiento si  $F = 400$  N.



Sol. a)  $181,35 \text{ N} \leq F \leq 308,65 \text{ N}$ ;  
 b)  $1,16 \text{ m/s}^2$  (rampa arriba),  $63,65 \text{ N}$  (rampa abajo);  
 c)  $0 \text{ m/s}^2$ ,  $45 \text{ N}$  (rampa abajo);  
 d)  $0 \text{ m/s}^2$ ,  $55 \text{ N}$  (rampa arriba);  
 e)  $1,31 \text{ m/s}^2$  (rampa abajo),  $63,65 \text{ N}$  (rampa arriba).

**1.14\*.** El bloque de 20 kg se encuentra inicialmente en reposo y sobre él actúa la fuerza  $F \geq 0$  (N). La inclinación de la fuerza es de  $20^\circ$  sobre la horizontal y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es de  $\mu = 0,3$ . Se pide:

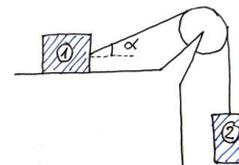
- Valores de F para los que el bloque permanece en reposo.
- Aceleración y fuerza de rozamiento si  $F = 50$  N.
- Aceleración y fuerza de rozamiento si  $F = 100$  N.
- ¿A partir de qué valor de F se levantaría el bloque del suelo?



Sol. a)  $0 \text{ N} \leq F \leq 56,39 \text{ N}$ ;  
 b)  $0 \text{ m/s}^2$ ,  $47 \text{ N}$  (hacia la izquierda);  
 c)  $2,28 \text{ m/s}^2$  (hacia la derecha),  $48,5$  (hacia la izquierda);  
 d)  $573,1 \text{ N}$ .

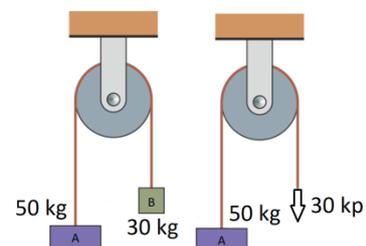
**1.15\*\*.** El sistema de la figura se encuentra inicialmente en reposo. El cuerpo 1 es de masa  $m_1 = 125$  kg y el cuerpo 2 es de masa  $m_2 = 40$  kg. El ángulo de inclinación de la rampa es  $\alpha = 30^\circ$ . El coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre el bloque 1 y la rampa es desconocido. Se pide:

- Valores de  $\mu$  para el reposo.
- En los dos aparatos siguientes se pide la aceleración y rozamiento del bloque 1 en el instante indicado si...
- ...  $\mu = 0,1$ .
  - ...  $\mu = 0,8$ .



Sol. a)  $\mu \geq 0,33$ ;  
 b)  $1,46 \text{ m/s}^2$  (hacia la der.),  $105,83 \text{ N}$  (hacia la izq.);  
 c)  $0 \text{ m/s}^2$ ,  $339,48 \text{ N}$  (hacia la izq.).

**1.16.** La masa A es de 50 kg y la masa B es de 30 kg. La fuerza representada es de 30 kp. Se pide razonar si el módulo de la aceleración del bloque A y de la tensión de la cuerda será la misma en los dos casos y calcularlas. Nota:  $1 \text{ kp} = 9,8 \text{ N}$ . Despreciar rozamientos.



*Sol. No será igual en ambos casos. En el primer caso:  $2,45 \text{ m/s}^2$  y  $367,5 \text{ N}$ . En el segundo caso:  $3,92 \text{ m/s}^2$  y  $294 \text{ N}$ .*

**1.17\***. Una pelota de golf de  $45 \text{ g}$  se lanza desde el suelo a una velocidad de  $50 \text{ m/s}$ , con una inclinación de  $35^\circ$  sobre la horizontal. Una ráfaga de viento ejerce sobre la pelota una fuerza horizontal  $0,4 \text{ N}$  a favor del movimiento de la pelota. Se pide:

- Altura máxima que alcanza la pelota.
- Alcance máximo de la pelota.
- ¿Ha influido la ráfaga en la altura máxima? ¿Y en el alcance máximo?

*Sol. a)  $41,97 \text{ m}$ ; b)  $391,56 \text{ m}$ ; c) La ráfaga no influye en la altura máxima, pero sí en el alcance máximo, pues la fuerza de la ráfaga solo tiene componente  $x$ .*