PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2016

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x+\lambda y+\lambda z&=4\\ \lambda x+\lambda y+\ z&=6\\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z&=3+\lambda \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, para $\lambda=2$.

SOLUCIÓN

a) La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4\\ \lambda & \lambda & 1 & 6\\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array}\right)$$

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda & 1\\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^3+\lambda=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=\lambda(\lambda-1)^2=0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda=1\end{array}\right.$$

▪ Para $\lambda\neq 0$ y 1: $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=3 \;\Rightarrow\;$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $\lambda=0$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

$\operatorname{rg} A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Orlemos este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} B=3$

Y como $\operatorname{rg} A\neq \operatorname{rg} B \;\Rightarrow\;$ el sistema es incompatible para $\lambda=0$.

▪ Para $\lambda=1$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

$\operatorname{rg} A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4+4-6+4-4+6=0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,B=2$

El sistema es compatible indeterminado para $\lambda=1$ pues $\text{rg}\,A=\text{rg}\,B=2<$ nº de incógnitas.

b) Para $\lambda=2$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 2x+2y+\ z=6 \\ -2x+2y+2z=5 \end{cases}$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{16+24+10-20-8-24}{-4+8-4+8-8+2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{2}=\frac{-12+20-8+24-16+5}{2}=\frac{13}{2} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{2}=\frac{-10+16-24+16-20+12}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)*

a.1) *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}|=|\vec{s}|=2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})$.

a.2) *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2} \qquad s:\ \begin{cases} x-y-\ z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

a.1) Por la propiedad distributiva del producto escalar:

$$\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})=\vec{w}\cdot\vec{w}-\vec{w}\cdot\vec{s}=|\vec{w}||\vec{w}|\cos 0^{\circ}-|\vec{w}||\vec{s}|\cos 60^{\circ}=2\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=4-2=2$$

a.2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=$ donde hemos utilizado que el producto escalar es conmutativo: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=9$ (2)

Restando ordenadamente las igualdades (1) y (2) tenemos: $4\,\vec{u}\cdot\vec{v}=16 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v}=4$

b) Se tiene: $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores direccionales de r y s.

La recta r viene expresada por su ecuación continua. Su vector direccional es: $\vec{u}=(3,2,2)$

La recta s está expresada como intersección de dos planos. Su vector direccional es $\vec{v}=\vec{n}\times\vec{n}'$ siendo $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ vectores normales a cada uno de los planos. En nuestro caso:

$$\vec{v}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}+\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}=-3\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}=(-3,-3,0)\,||\,(1,1,0)$$

Así pues: $\cos\alpha=\dfrac{|\,3+2+0\,|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}\,\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{17}\,\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\simeq 0{,}8575 \;\Rightarrow\; \alpha=30^\circ\,57'\,49{,}52''$

3. *(5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{1}{8x-x^2}$$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,25 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\left((\ln(x^2))\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$, y $g(x)=2x^2-x$.

SOLUCIÓN

a.1) Puesto que se trata de una función racional:

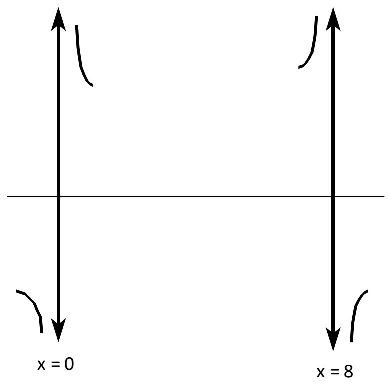
▪ Asíntotas verticales: $8x-x^2=0 \;\Rightarrow\; x(8-x)=0 \;\Rightarrow\; x=0\;,\;x=8$

$x=0$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x(8-x)}=\infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x(8-x)}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(8-x)}=+\infty$

$x=8$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{1}{x(8-x)}=\infty$.

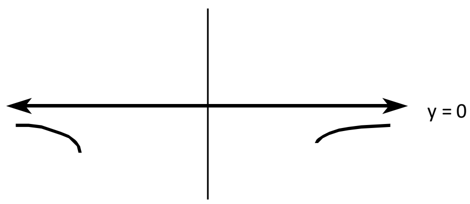
Además: $\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{1}{x(8-x)}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{1}{x(8-x)}=-\infty$



▪ Asíntota horizontal: $y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(8-x)}=0$.

Además, la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota es:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x(8-x)}=0^-$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(8-x)}=0^-$



a.2) $f'(x)=\dfrac{-8+2x}{(8x-x^2)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=4$ (valor crítico)

$$f''(x)=\frac{2(8x-x^2)^2-(-8+2x)\,2\,(8x-x^2)(8-2x)}{(8x-x^2)^4} \;\Rightarrow\; f''(4)>0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ es un mínimo relativo.}$$

La función tiene un mínimo relativo en $\left(4\,,\dfrac{1}{16}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln\left(x^2\right)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)=\infty\cdot 0$ (indeterminación) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x\,(x+1)}{x^2+3}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}(x+1)+2\ln x}{2x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)+2x\ln x}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\ln x+2x\frac{1}{x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+2\ln x}{4x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4x}=0$$

(1), (2) y (3): regla de L'Hôpital

c) Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-2x^2+x$ y calculamos el área limitada por $h(x)$ y el eje OX.

Puntos de corte de $h(x)$ con OX: $x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x\left(x-1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; x=0\;,\;x=1$

$$A=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)-0=\frac{3-8+6}{12}=\frac{1}{12}\,u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea "a" un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro "a":

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.
Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, C_3+C_2 y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

SOLUCIÓN

a) Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\Rightarrow$ el rango de la matriz es como mínimo 2.

Veamos los valores del parámetro para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=-a(a+1)+(a+1)=(a+1)(-a+1)=0 \;\Rightarrow\; a=-1\;,\;a=1$$

Por lo tanto, si $a\neq -1$ y $a\neq 1$: $\operatorname{rg}A=3$

Para cualquier otro valor de a, el rango de A es 2.

b) Sea $C=\left(C_1\;\;C_2\;\;C_3\right)$ la matriz dada cuyo determinante es $|\,C\,|=2$.

$$|\,B\,|=|\,-C_2\;\;C_3+C_2\;\;3C_1\,|\overset{(1)}{=}|\,-C_2\;\;C_3\;\;3C_1\,|+|\,-C_2\;\;C_2\;\;3C_1|\overset{(2)}{=}|\,-C_2\;\;C_3\;\;3C_1\,|\overset{(3)}{=}-3|\,C_2\;\;C_3\;\;C_1\,|\overset{(4)}{=}3|\,C_1\;\;C_3\;\;C_2\,|\overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=}-3|\,C_1\;\;C_2\;\;C_3\,|=-6 \qquad (*)$$

Se tiene: $\left|B\cdot B^{-1}\right|=\left|I_3\right|=1=\left|B\right|\cdot\left|B^{-1}\right|=-6\cdot\left|B^{-1}\right| \;\Rightarrow\; \left|B^{-1}\right|=-\dfrac{1}{6}$

(*) Propiedades utilizadas: (1): El determinante se descompone en suma de otros dos porque la segunda columna es una suma.
(2): El segundo determinante es 0 porque tiene dos columnas iguales.
(3): De la primera columna sacamos el factor común -1 y de la tercera columna el factor 3.
(4) y (5): Al permutar dos columnas el determinante cambia de signo.

2. *(2 puntos)* Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi : mx - 3y + 2z = 1 \,, \quad r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro "m" la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando $m = 1$.

SOLUCIÓN

a) Lo serán cuando el sistema formado por los tres planos (el plano π y los dos planos que definen la recta r) sea compatible determinado.

El menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 - 4 + 18 = 2m + 8 = 0 \;\Rightarrow\; m = -4$

Por lo tanto, cuando $m \neq -4$ el rango de las matrices de los coeficientes y ampliada coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y el plano y la recta son secantes.

b) Para $m = 1$ el plano y la recta son secantes. La ecuación del plano es $\pi : x - 3y + 2z = 1$ y $\vec{n} = (1\,, -3\,, 2)$ es un vector normal al mismo.

Obtengamos un vector direccional de la recta. Para ello obtengamos dos puntos de la misma:

$$\left.\begin{cases} 3x + y = 1 & \text{Para } x = 0: \; y = 1 \;,\; z = 1 \;\Rightarrow\; A(0\,,1\,,1) \\ 2x - y + 2z = 1 & \text{Para } x = 2: \; y = -5 \;,\; z = -4 \;\Rightarrow\; B(2\,,-5\,,-4) \end{cases}\right| \;\Rightarrow\; \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2\,,-6\,,-5)$$

El ángulo α que forman π y r es el complementario del que forman $\vec{n}$ y $\vec{u}$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\,|\vec{u}|} = \frac{|2+18-10|}{\sqrt{1+9+4}\,\sqrt{4+36+25}} = \frac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{65}} = \frac{10}{\sqrt{910}} \simeq 0{,}3315 \;\Rightarrow\; 90^\circ - \alpha = 70^\circ\, 38'\, 25{,}26'' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha = 19^\circ\, 21'\, 34{,}74''$$

3. *(5 puntos)*

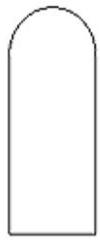
a) *(1,5 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(x)\ \cos(x)}{1-\cos(x)}\,dx$$

c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

SOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{2x-1}-\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^{\infty}=1^{\infty}$ (indeterminación)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10x+2-6x+3}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4x+5}{4x-2}-1\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{4x-2}{7}\cdot\frac{7}{4x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{7}{4x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}}=e^{\frac{7}{2}}$$

También:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}-1\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5-4x+2}{4x-2}\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{4x-2}\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}\right)}=e^{\frac{7}{2}}$$

b) $t=\cos x\ \Rightarrow\ dt=-\operatorname{sen}x\,dx\ \Rightarrow\ dx=-\dfrac{dt}{\operatorname{sen}x}$

Obtengamos una primitiva: $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\operatorname{sen}x\,t}{1-t}\left(-\frac{dt}{\operatorname{sen}x}\right)=-\int\frac{t}{1-t}dt=\int\frac{t}{t-1}dt=(1)$

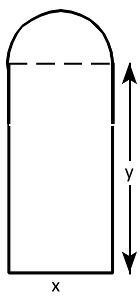
$$\begin{array}{r|l} t & t-1 \\ \cline{2-2} -t+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$(1)=\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=t+\ln|t-1|=\cos x+\ln|\cos x-1|=\cos x+\ln(1-\cos x)$$

Así pues: $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}dx=\left[\cos x+\ln(1-\cos x)\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}:\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ln\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}-\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$$

c)



La función que debe ser máxima es la superficie: $S(x)=xy+\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=xy+\dfrac{1}{8}\pi x^2$

Relación entre las variables x e y:

$$x+2y+\frac{1}{2}2\pi\frac{x}{2}=5\ \Rightarrow\ 2y=5-x-\frac{\pi}{2}x\ \Rightarrow\ y=\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)x=\frac{5}{2}-\frac{2+\pi}{4}x$$

La función es entonces: $S(x)=\frac{5}{2}x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2=\frac{5}{2}x-\frac{4+\pi}{8}x^2$

Veamos dónde tiene su máximo: $S'(x)=\frac{5}{2}-\frac{4+\pi}{4}x=0 \ \Rightarrow \ x=\frac{5}{2}:\frac{4+\pi}{4}=\frac{10}{4+\pi}$

Comprobemos que se trata de un máximo: $S''(x)=-\frac{4+\pi}{4}<0 \ \Rightarrow$ se trata, en efecto, de un máximo.

El valor de y: $y=\frac{5}{2}-\frac{2+\pi}{4}\cdot\frac{10}{4+\pi}=\frac{5}{2}-\frac{10+5\pi}{8+2\pi}=\frac{40+10\pi-20-10\pi}{16+4\pi}=\frac{20}{16+4\pi}=\frac{5}{4+\pi}$