Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1.

a) *(1,25 puntos)* Estudiar para qué valores de α el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.

b) *(1,25 puntos)* Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A, calcular $\left(A^{-1}\right)^2$ para $\alpha=-1$.

SOLUCIÓN.

a) $rg\,A=3\ \ \forall\alpha$ tal que $|A|\neq 0$: $\quad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{vmatrix}=2(\alpha+1)^2-(\alpha-2)-2-2(\alpha+1)=$

$$=2\alpha^2+4\alpha+2-\alpha+2-2-2\alpha-2=2\alpha^2+\alpha=0 \ \Rightarrow\ \alpha(2\alpha+1)=0 \ \Rightarrow\ \alpha=0\ ,\ \alpha=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el rango de A es máximo para $\forall\alpha\neq-\frac{1}{2}$ y 0.

b) Para $\alpha=-1$ es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y además sabemos que $|A|\neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, A^{-1}$. Calculemos A^{-1}:

- Calculemos la matriz adjunta de A: $\quad A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\ ;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\ ;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\ ;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2\ ;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\ ;\ A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=0\ ;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{luego: } (Adj\,A)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz traspuesta de la adjunta: $\quad (Adj\,A)^t=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- El determinante de A es: $\quad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3-2=1$

- Luego la matriz inversa es: $\quad A^{-1}=\dfrac{(Adj\,A)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora $\left(A^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A2.

a) *(1,75 puntos)* Utilizar el cambio de variable $t^6 = 1 + x$ para calcular $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3} - \sqrt{x+1}}\, dx$

b) *(0,75 puntos)* Para $f(x) = e^{-3x}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cuál de las siguientes opciones es la correcta:

i) $f^{(n)}(x) = 3^n\, e^{-3x}$ ii) $f^{(n)}(x) = (-3)^{(n+1)}\, e^{-3x}$ iii) $f^{(n)}(x) = (-3)^n\, e^{-3x}$

SOLUCIÓN.

a) $t^6 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad 6t^5\, dt = dx$

Se tiene entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3} - \sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^3+2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5\, dt = 6\int \frac{t^3+2}{t^3(t-1)} \cdot t^5\, dt = 6\int \frac{t^3+2}{t-1} \cdot t^2\, dt = 6\int \frac{t^5+2t^2}{t-1}\, dt$$

Dividiendo $t^5 + 2t^2$ entre $t-1$: $\frac{t^5+2t^2}{t-1} = t^4 + t^3 + t^2 + 3t + 3 + \frac{3}{t-1}$ y por consiguiente:

$$6\int \frac{t^5+2t^2}{t-1}\, dt = 6\left[\int \left(t^4 + t^3 + t^2 + 3t + 3 + \frac{3}{t-1}\right) dt\right] = 6\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 3t + 3\ln\left|t-1\right|\right) + k =$$

$= \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 9t^2 + 18t + 18\ln\left|t-1\right| + k$ y deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3} - \sqrt{x+1}}\, dx = \frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + 2(x+1)^{1/2} + 9(x+1)^{1/3} + 18(x+1)^{1/6} + 18\ln\left|(x+1)^{1/6} - 1\right| + k$$

b) $f(x) = e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = (-3)^2\, e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = (-3)^3\, e^{-3x}$

Por lo tanto, la expresión de la derivada n-ésima es la iii): $f^{(n)}(x) = (-3)^n\, e^{-3x}$

A3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

a) *(0,5 puntos)* Calcular su dominio.
b) *(1 punto)* Obtener sus asíntotas.
c) *(1 punto)* Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es función par.

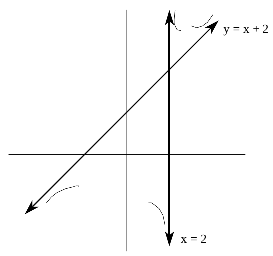
SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{x \,/\, x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) - Asíntotas verticales: $x = 2$ pues $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$. Además: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x-2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+2}{x-2} = +\infty$

- Asíntotas oblicuas: $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} = x + 2 + \frac{6}{x-2} \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la función.

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6}{x-2} = 0^-$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6}{x-2} = 0^+$



c) - Puntos de corte con OX: No tiene pues $x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x$

- Puntos de corte con OY: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \quad \Rightarrow \quad (0, -1)$

- $f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{-x-2} = \frac{x^2+2}{-x-2} \neq f(x) \quad \Rightarrow$ la función no es par.

A4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1,1,2)$

b) *(1 punto)* Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1,1)$. Obtener su producto vectorial.

SOLUCIÓN.

a) Por ser paralelas al plano, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ direccionales de las rectas están contenidos en el plano. Como además conocemos un punto del mismo, disponemos de los elementos necesarios para escribir la ecuación del plano.

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \iff \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{u} = (-1,1,2)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{n}_1 = (2,-1,1) \\ \vec{n}_2 = (-1,1,3) \end{matrix} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - 6\vec{j} - \vec{i} = (-4,-7,1)$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 1 - 8y + 8 + 7z - 14 + 4z - 8 + y - 1 + 14x - 14 = 0 \iff 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

-Otra forma-

Una vez obtenidos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ direccionales de las rectas, el vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k} + 4\vec{k} + \vec{j} + 14\vec{i} = (15,-7,11)$$ es un vector normal al plano.

La ecuación del plano es: $15x - 7y + 11z + D = 0$ y haciendo que contenga al punto A:

$$15 - 7 + 22 + D = 0 \Rightarrow D = -30 \Rightarrow 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$ es la ecuación del plano.

b) $$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90º$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} = (0,-3,3)$$

OPCIÓN B

B1.

a) *(1 punto)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{pmatrix}$. Estudiar qué valores de α y β hacen que sea cierta la igualdad: $\left(det\left(A\right)\right)^2-2\,det\left(A\right)\,det\left(B\right)+1=0$

b) *(1,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} \text{ con a, b, c, d} \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN.

a) $det\left(A\right)=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix}=cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$ $\qquad det\left(B\right)=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{vmatrix}=\beta\,cos^2\alpha+\beta\,sen^2\alpha=\beta$

$$\left(det\left(A\right)\right)^2-2\,det\left(A\right)\,det\left(B\right)+1=0 \;\Rightarrow\; 1-2\beta+1=0 \;\Rightarrow\; 2\beta=2 \;\Rightarrow\; \beta=1$$

Por lo tanto, la igualdad se cumple para todo valor de α y para $\beta=1$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a+3 & b+4 \\ 1 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}\overset{(1)}{=}2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2\left(ad-bc\right)$ $\qquad (1):\ F2-F1\ ,\ F3-F1$

B2.

a) *(1,25 puntos)* Se considera la función $f\left(x\right)=\begin{cases} ln\,x & 0<x<1 \\ ax^2+b & 1\le x<+\infty \end{cases}$. Si $f\left(2\right)=3$, obtener los valores de a y b que hacen que $f\left(x\right)$ sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(x^2-9\right)$ y $\lim\limits_{x\to3^+}\log\left(x^2-9\right)$

SOLUCIÓN.

a)
- $f\left(2\right)=3 \;\Rightarrow\; 4a+b=3 \quad (*)$
- $f\left(x\right)$ debe ser continua en $x=1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right) \;\Rightarrow\; \ln1=a+b \;\Rightarrow\; a+b=0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\begin{cases} 4a+b=3 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=3 \\ -a-b=0 \end{cases} \Rightarrow\; 3a=3 \;\Rightarrow\; a=1\ ,\ b=-1$

b)
- Puesto que la función $f\left(x\right)=x^2-9$ tiende a $+\infty$ cuando $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(x^2-9\right)=+\infty$
- Cuando $x\to3^+$, $f\left(x\right)=x^2-9$ tiende a 0^+ y por tanto: $\lim\limits_{x\to3^+}\log\left(x^2-9\right)=-\infty$

B3. Sea $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}$.

a) *(0,5 puntos)* Determinar su dominio
b) *(1 punto)* Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) *(1 punto)* Analizar sus puntos de inflexión

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $D\left(f\right)=\mathbb{R}-\left\{x\,/\left(x-1\right)^2=0\right\}=\mathbb{R}-\left\{1\right\}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2\,(x-1)^2-x^3\,2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left(3x^3-3x^2-2x^3\right)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0\;\;\Rightarrow\;\; x^2\,(x-3)=0\;\;\Rightarrow\;\; x=0\;,\;x=3$$

Tenemos:

	f' > 0		f'> 0		f' < 0		f' > 0
		0		1		3	

Creciente: $(-\infty\,,1)\cup(3\,,+\infty)$

Decreciente: $(1\,,3)$

c) Los puntos de inflexión deben verificar $f''(x)=0$:

$$f''(x)=\frac{\left(3x^2-6x\right)(x-1)^3-\left(x^3-3x^2\right)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2\left(3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2\right)}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4}=0\;\;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\;\; x=0$ (posible punto de inflexión)

Como además: $f'''(x)=\dfrac{6(x-1)^4-6x\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8}\;\;\Rightarrow\;\; f'''(0)\neq 0\;\;\Rightarrow$ En $x=0$ hay un punto de inflexión: $(0\,,0)$

B4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A\,(1\,,-2\,,4)$, $B\,(0\,,3\,,2)$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

b) *(1 punto)* En caso de que sea posible, escribir el vector $\vec{v}=(1\,,2\,,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(1\,,0\,,1)$, $\vec{b}=(1\,,1\,,0)$, $\vec{c}=(0\,,1\,,1)$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes contenidos en el plano. El punto puede ser el $A(1\,,-2\,,4)$ y los vectores: $\overrightarrow{AB}=(-1\,,5\,,-2)$ y el direccional de la recta $\vec{u}=(4\,,1\,,2)$ que son linealmente independientes. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\;\;\Leftrightarrow\;\; 10x-10-8y-16-z+4-20z+80+2y+4+2x-2=0\;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; 12x-6y-21z+60=0\;\;\Leftrightarrow\;\; 4x-2y-7z+20=0$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1\neq 0\;\;\Rightarrow\;\; \vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ linealmente independientes $\Rightarrow$ constituyen una base del espacio vectorial y cualquier vector puede ser escrito como combinación lineal de los mismos.

$$\vec{v}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}\;\;\Leftrightarrow\;\; (1\,,2\,,4)=\lambda_1\,(1\,,0\,,1)+\lambda_2\,(1\,,1\,,0)+\lambda_3\,(0\,,1\,,1)\;\;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 \quad\quad =1 \\ \quad\;\; \lambda_2+\lambda_3=2 \\ \lambda_1 \quad\;\; +\lambda_3=4 \end{cases}\;\;\Rightarrow\;\; \lambda_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+4-2}{1+1}=\frac{3}{2}\;\;;\;\; \lambda_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+1-4}{2}=-\frac{1}{2}\;\;;$$

$$\lambda_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2}=\frac{4+2-1}{2}=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto: $\vec{v}=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{5}{2}\vec{c}$