El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

a) *(0,75 puntos)* Calcular la matriz A^{-1}.

b) *(1 punto)* ¿Cuántas filas y cuántas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación $AD=B$ tenga solución? Resolver la ecuación $AD=B$.

c) *(0,25 puntos)* Estudiar el rango de la matriz C.

d) *(1,5 puntos)* Utilizando los apartados a) y c) resolver el sistema lineal $(AC)X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{F_2-F_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{F_3-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\overset{\substack{-F_2\\F_3/2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_2-F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_1-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

b) $D=A^{-1}B$ y como A^{-1} es una matriz 3×3 y B es una matriz 3×2, la matriz D debe ser 3×2, es decir debe tener tres filas y dos columnas.

$$D=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

c) $$\text{rg}\,C=\text{rg}\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\4&2&2\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2-2F_1\\F_3-4F_1}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{F_3-2F_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\ \text{rg}\,C=2$$

d) $(AC)X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}ACX=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ CX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y como $\text{rg}\,C=2\ \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es equivalente a: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x=0\\y+z=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x=0\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{matrix}$

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$ **a2)** $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 xe^{5x^2}\,dx$.

c) Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?

c2) *(1 punto)* ¿Es posible perder dinero con este fondo de inversión?

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}=(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}(1-\ln x)^{-\frac{3}{2}}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2x\sqrt{(1-\ln x)^3}}$

a2) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}=-\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

b) $\int x\,e^{5x^2}\,dx=\dfrac{1}{10}\int 10x\,e^{5x^2}\,dx=\dfrac{1}{10}e^{5x^2} \Rightarrow \int_0^1 x\,e^{5x^2}\,dx=\left[\dfrac{1}{10}e^{5x^2}\right]_0^1=\dfrac{e^5}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{e^5-1}{10}$

c) **c1)** $R'(x)=\dfrac{\dfrac{5x}{2\sqrt{x}}-5\left(\sqrt{x}-1\right)}{25x^2}=\dfrac{5x-10\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{50x^2\sqrt{x}}=\dfrac{-5x+10\sqrt{x}}{50x^2\sqrt{x}}=\dfrac{-x+2\sqrt{x}}{10x^2\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{-x\sqrt{x}+2x}{10x^3}=\dfrac{-\sqrt{x}+2}{10x^2}=0 \Rightarrow -\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

$R''(x)=\dfrac{-\dfrac{10x^2}{2\sqrt{x}}-20x\left(-\sqrt{x}+2\right)}{100x^4} \Rightarrow R''(4)<0 \Rightarrow x=4$ es un máximo relativo

Se deben invertir 4000 € para obtener el máximo rendimiento

c2) Veamos si para alguna inversión el rendimiento es negativo: $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}<0$

Como $x>0$, debe ser $\sqrt{x}-1<0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x<1$ es decir, se pierde dinero cuando se invierten menos de 1000 euros

3. La cantidad de horas que duermen los vecinos de un pueblo de Zaragoza se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 0,64. Se toma una muestra aleatoria simple y se obtienen los siguientes datos (en horas que duermen cada noche):

6,9	7,6	6,5	6,2	7,8	7,0	5,5	7,6
7,3	6,6	7,1	6,9	6,7	6,5	7,2	5,8

a) *(0,5 puntos)* Calcular la media muestral del número de horas que se duerme cada noche.

b) *(2,5 puntos)* Determinar el nivel de confianza para el cual el intervalo de confianza para la media de horas que se duerme cada noche es $(6{,}65\ ,\ 7)$. Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

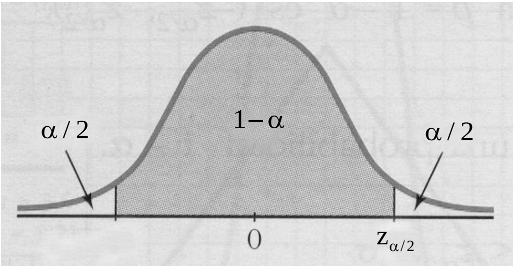
SOLUCIÓN.

a) $\bar{X}=\dfrac{6{,}9+7{,}6+6{,}5+6{,}2+7{,}8+7+5{,}5+7{,}6+7{,}3+6{,}6+7{,}1+6{,}9+6{,}7+6{,}5+7{,}2+5{,}8}{16}=\dfrac{109{,}2}{16}=6{,}825$ horas

b) Aunque la muestra tenga menos de 30 elementos, puesto que la distribución del número de horas que duermen los vecinos es normal, la distribución de las medias también lo es.

Si el intervalo de confianza es $(6,65\ ,\ 7) \Rightarrow \mu = \frac{6,65+7}{2} = 6,825$ horas y el error máximo admisible es:

$E = 6,825 - 6,65 = 0,175$ y como $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,175 \cdot 4}{0,64} = 1,09375$



Miramos en la tabla la probabilidad $p(z \leq 1,09) = 0,8621$

Por tanto:

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,8621 = 0,1379 \Rightarrow \alpha = 0,2758 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,7242$

El nivel de confianza es entonces de un 72,42%

OPCIÓN B

1. Se va a organizar una planta en una empresa de electrodomésticos donde van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado es necesario que haya mayor o igual número de electricistas que de mecánicos y que el número de electricistas no supere al doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

a) *(1 punto)* Plantear un problema lineal que nos permita averiguar cuántos trabajadores de cada clase se deben de contratar para maximizar el beneficio que obtiene la empresa por mes, sabiendo que por cada mecánico se obtienen 2000 € de beneficio mensual y por cada electricista 2500 €.

b) *(1,5 puntos)* Calcular cuántos mecánicos y cuántos electricistas se deben de contratar para obtener un beneficio máximo, si el beneficio mensual que se obtiene por cada trabajador es el expuesto en el apartado a).

c) *(1 punto)* Si cada mecánico y cada electricista cuestan a la empresa 300 € mensuales y podemos disponer de todos los mecánicos que se necesiten, ¿cuántos trabajadores de cada clase habrá de contratar la empresa para que el coste sea mínimo?

SOLUCIÓN.

a) Organicemos los datos del problema en una tabla:

	Número	**Beneficio**	**Coste**
Mecánicos	x	2000x	300x
Electricistas	y	2500y	300y

Las restricciones son:

$x \geq 0\ ;\ \ y \geq x\ ;\ \ y \leq 2x\ ;\ \ y \geq 20\ ;\ \ x \leq 30$

La función objetivo para el apartado b) (beneficio máximo) es: $F(x, y) = 2000x + 2500y$

La función objetivo para el apartado c) (coste mínimo) es: $G(x, y) = 300x + 300y$. En este apartado debemos eliminar la última de las restricciones $x \leq 30$.

b) Resolvamos el sistema de restricciones para obtener la región factible:

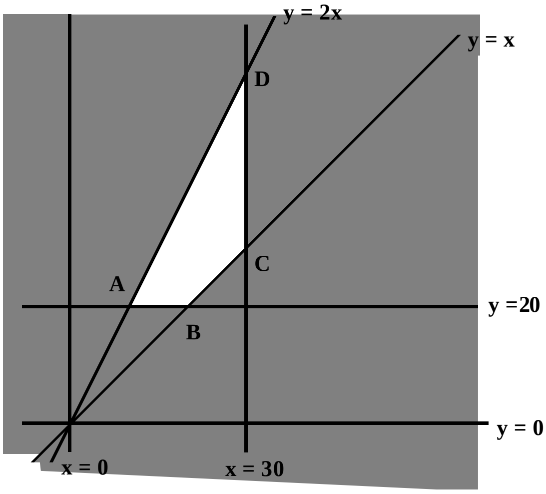
La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y el semiplano solución de la inecuación $x \geq 0$ es el de la derecha (en gris el semiplano no solución).

La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. El semiplano solución de $y \geq x$ es el que contiene al punto $(1,2)$ por ejemplo.

La recta $y = 2x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$. El semiplano solución de $y \leq 2x$ es el que contiene al punto $(1,0)$, por ejemplo.

La recta $y = 20$ es horizontal. El semiplano solución de $y \geq 20$ es el semiplano superior.

La recta $x = 30$ es vertical. La solución de la inecuación $x \leq 30$ es el semiplano de la izquierda.



Dibujados los semiplanos solución del conjunto de restricciones, la solución común a todos ellos (región factible) es el cuadrilátero ABCD.

Como la solución óptima de la función objetivo se obtiene en los vértices de la región factible, calculemos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo $F(x, y) = 2000x + 2500y$ en cada uno de ellos:

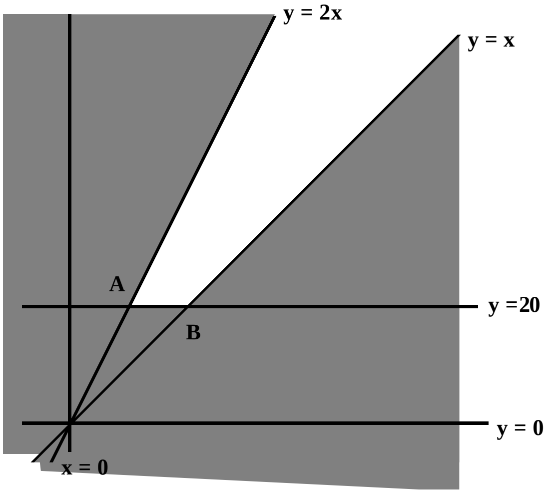
$A(10, 20) \quad \Rightarrow \quad F(10, 20) = 20000 + 50000 = 70000$ €

$B(20, 20) \quad \Rightarrow \quad F(20, 20) = 40000 + 50000 = 90000$ €

$C(30, 30) \quad \Rightarrow \quad F(30, 30) = 60000 + 75000 = 135000$ €

$D(30, 60) \quad \Rightarrow \quad F(30, 60) = 60000 + 150000 = 210000$ €

Por tanto, para maximizar los beneficios deben contratarse 30 mecánicos y 60 electricistas.



c) Ahora la función objetivo es $G(x, y) = 300x + 300y$ y debemos prescindir de la condición $x \leq 30$

La región factible es abierta. Sus vértices y el valor de la función objetivo en ellos son:

$A(10, 20) \quad \Rightarrow \quad G(10, 20) = 3000 + 6000 = 9000$ €

$B(20, 20) \quad \Rightarrow \quad G(20, 20) = 6000 + 6000 = 12000$ €

Por tanto, para minimizar los costes habrá que contratar a 10 mecánicos y 20 electricistas.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ **a2)** $g(x) = e^{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

c) Considerar la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$.

c2) *(1,25 puntos)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos si $x < 3$.

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^x-1\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x-1} = \dfrac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{e^{2x}-1} = -\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

a2) $g'(x) = e^{\sqrt{x-x^2}} \cdot \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$

b) Calculemos una primitiva de la función: $\int \left(x^2 - 5x + x^{-2}\right) dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{x^{-1}}{-1} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$

Entonces, por la fórmula de Barrow:

$$\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 10 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} - 1\right) = \frac{7}{3} - 7 = -\frac{14}{3}$$

c) **c1)** • $\exists\, f(3) = 0$

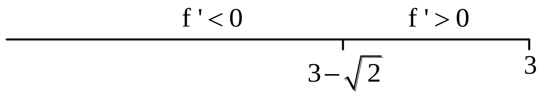
• $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x):$ $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = \infty \end{array}\right.$ $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow$ la función es discontinua

c2) Para $x < 3$: $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \dfrac{x-3}{x^2-9x+20}$

$$f'(x) = \frac{x^2-9x+20-(x-3)(2x-9)}{\left(x^2-9x+20\right)^2} = \frac{-x^2+6x-7}{\left(x^2-9x+20\right)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+6x-7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-28}}{-2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 3 - \sqrt{2} \quad \text{pues la otra raíz } 3+\sqrt{2} > 3$$

Se tiene:



Es decir, la función es decreciente en $\left(-\infty, 3-\sqrt{2}\right)$ y creciente en $\left(3-\sqrt{2}, 3\right)$.

Como la función es continua en $(-\infty, 3)$, en $x = 3-\sqrt{2}$ tiene un mínimo relativo.

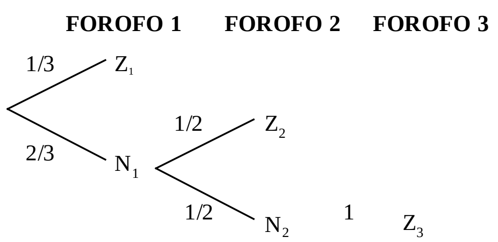
3. Tres forofos del Real Zaragoza van al fútbol y desean hacerlo con la bufanda de su equipo, pero solamente tienen una. La ponen en una bolsa junto con otras dos bufandas negras y los tres van sacando, por orden, la bufanda que han de llevar.

a) *(2 puntos)* ¿Alguno de los tres amigos tiene ventaja?: el que saca la bufanda en primer lugar, el que la saca en segundo lugar o el último?. Razonar la respuesta.

b) *(1 punto)* Si se meten tres bufandas negras en la bolsa en lugar de dos, además de la bufanda del equipo, calcular la probabilidad de que ninguno saque la de su equipo.

SOLUCIÓN.

a) Organicemos la situación en un diagrama en árbol. Z_i representa el suceso "el forofo i-ésimo saca la bufanda del Zaragoza" y N_i el suceso "el forofo i-ésimo saca una bufanda negra"



$p(Z_1) = \dfrac{1}{3}$

$p(Z_2) = p(N_1 \cap Z_2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

$p(Z_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap Z_3) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$

Luego los tres tienen la misma probabilidad.

b) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) \cdot p(N_3 / N_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$