El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Un número de tres cifras es tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23, la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y las decenas más el doble de las unidades es 15.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular dicho número y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*

b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cifra de las centenas, y la de las decenas, z la de las unidades. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z+2y=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ x+y+4z=30 \end{array}\right. \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ -y+3z=7 \end{array}\right. \overset{E_2\leftrightarrow E_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ -y+3z=7 \\ 5y+3z=37 \end{array}\right. \overset{E_3+5E_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ -y+3z=7 \\ 18z=72 \end{array}\right. \Rightarrow \quad z=4 \;,\; y=5 \;,\; x=9$$ luego el número buscado es el 954.

b) La tercera ecuación cambia. El nuevo sistema es:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z+2y=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ 3x+y=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ 3x+y=25 \end{array}\right. \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-3E_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ -5y-3z=-44 \end{array}\right.$$

y el sistema es incompatible (ver la segunda y tercera ecuaciones) por lo que no podremos resolverlo.

2. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x) \;, \qquad g(x)=\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}} \;, \qquad h(x)=\sqrt{e^{3x}-\frac{5+\ln x}{3x+5}}$$

b) Razone cuál es el dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f en su dominio. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)

- $f'(x)=2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\left(2\ln x-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{2\ln^2 x-1}{x\ln x}$

- $g(x)=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x+3) \;\Rightarrow\; g'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{4(x+3)-x}{2x(x+3)}=\dfrac{3x+3}{2x^2+6x}$

- $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{3x}-\dfrac{5+\ln x}{3x+5}}}\cdot\left(3e^{3x}-\dfrac{\frac{1}{x}(3x+5)-3(5+\ln x)}{(3x+5)^2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{3x}-\dfrac{5+\ln x}{3x+5}}}\cdot\left(3e^{3x}-\dfrac{-12x+5-3x\ln x}{x(3x+5)^2}\right)$

b) Se trata de una función racional. Su dominio está formado por todos los números reales excepto los que anulen el denominador:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

C Estudiemos los máximos o mínimos relativos de la función:

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{\left(x^2 - x - 6\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{(punto crítico)}$$

$$f''(x) = \frac{-2\left(x^2 - x - 6\right)^2 - (-2x+1)\,2\left(x^2 - x + 6\right)(2x-1)}{\left(x^2 - x - 6\right)^4} \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{en el punto } \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{25}\right) \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

3. En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar.

a) Calcule la probabilidad de que ninguna sea hombre. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que haya exactamente un hombre. *(1 punto)*
c) Calcule la probabilidad de que haya más de un hombre. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

El problema puede resolverse con ayuda de un diagrama en árbol.

Sean los sucesos: M_1 6 "la primera persona es una mujer", H_1 6 "la primera persona es un hombre", M_2 6 "la segunda persona es una mujer", etc. Se tiene:

a) $$p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = p(M_1) \cdot p(M_2 / M_1) \cdot p(M_3 / M_1 \cap M_2) \cdot p(M_4 / M_1 \cap M_2 \cap M_3) =$$
$$= \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{83}{173} \cdot \frac{82}{172} \simeq 0{,}0536$$

b) $$p\left(H_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap H_2 \cap M_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap M_2 \cap H_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap H_4\right) =$$
$$= \frac{90}{175} \cdot \frac{85}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{90}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{90}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{83}{173} \cdot \frac{90}{172} = 4 \cdot \frac{90}{175} \cdot \frac{85}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} =$$
$$= 0{,}2355$$

c) El suceso "haya más de un hombre" es el contrario de "haya ningún hombre o uno sólo". Por tanto:

$$p(\text{haya más de un hombre}) = 1 - 0{,}0536 - 0{,}2355 = 0{,}7109$$

OPCIÓN B

1. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €.

a) ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible? *(2 puntos)*

b) Si la empresa dispusiera de 5 conductores más, ¿cuál sería el número de autocares de cada tipo que habría que contratar para que la excursión fuera lo más barata posible? *(1,5 puntos)*

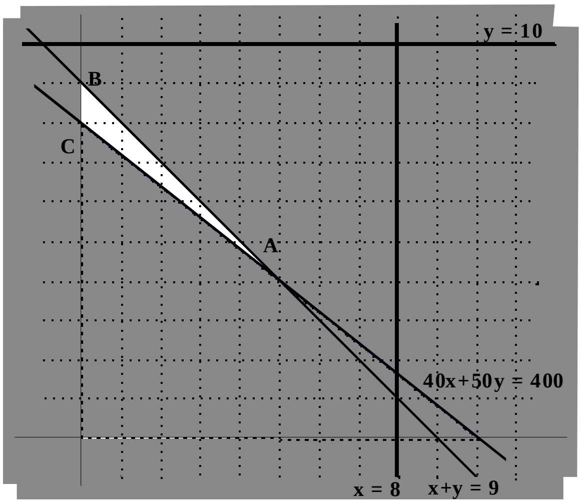
SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Sea ***x*** el número de autocares de 40 plazas e ***y*** el de autocares de 50 plazas. Las restricciones a que está sometida la solución son:

$0 \le x \le 8$ (número de autocares de 40 plazas)
$0 \le y \le 10$ (número de autocares de 50 plazas)
$x + y \le 9$ (número máximo de autocares que pueden circular por el número de conductores de que se dispone)
$40x + 50y \ge 400$ (Los autocares deben garantizar un mínimo de 400 plazas)

La función objetivo es el coste: $F(x , y) = 60x + 80y$ que en este caso debe ser mínima.

Obtengamos la región factible (solución del sistema de inecuaciones):



C $0 \le x \le 8$ tiene como solución la parte del plano comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 8$.

C $0 \le y \le 10$ tiene como solución la parte del plano comprendida entre las rectas $y = 0$ e $y = 10$.

C La recta $x + y = 9$ pasa por los puntos $(9 , 0)$ y $(0 , 9)$. La inecuación $x + y \le 9$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

C La recta $40x + 50y = 400 \Leftrightarrow 4x + 5y = 40$ pasa por los puntos $(10 , 0)$ y $(0 , 8)$. La inecuación $40x + 50y \ge 400$ tiene como solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La solución común de todas las inecuaciones es el triángulo ABC (en blanco).

Como la función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible, obtenemos sus coordenadas y calculamos el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -36 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow y = 4 \ , \ x = 5 \Rightarrow A(5 , 4) \Rightarrow F(5 , 4) = 384$ €

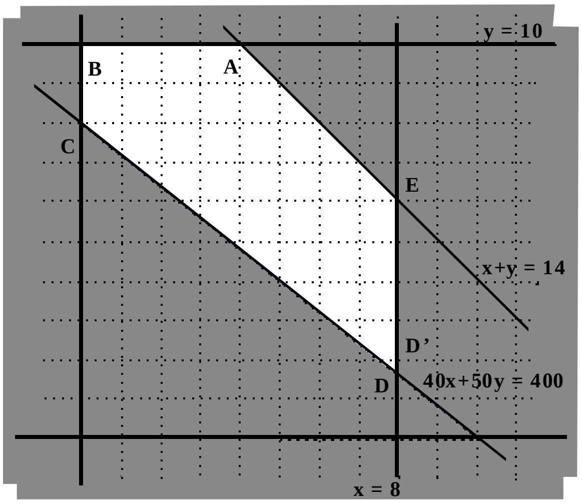
Vértice B: $B(0 , 9) \Rightarrow F(0 , 9) = 720$ €

Vértice C: $C(0 , 8) \Rightarrow F(0 , 8) = 640$ €

Por tanto, para que el coste sea el menor posible dentro de las condiciones existentes deben contratarse 5 autocares pequeños y 4 autocares grandes.

b) Si el número de conductores pasara a ser de 14, la restricción $x+y\le 9$ se convierte en $x+y\le 14$.

La recta $x+y=14$ pasa por los puntos $(10\,,4)$ y $(4\,,10)$ y la inecuación $x+y\le 14$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. De este modo la región factible es ahora el pentágono ABCDE en alguno de cuyos vértices la función objetivo se minimizará:



Vértice A: $\begin{cases} y=10 \\ x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=4\ ,\ y=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(4\,,10) \Rightarrow F(4\,,10)=1040$ €

Vértice B: $B(0\,,10) \Rightarrow F(0\,,10)=800$ €

Vértice C: $C(0\,,8) \Rightarrow F(0\,,8)=640$ €

Vértice D: $\begin{cases} x=8 \\ 4x+5y=40 \end{cases} \Rightarrow x=8\ ,\ y=\dfrac{8}{5}=1{,}6\approx 2$

$\Rightarrow D'(8\,,2) \Rightarrow F(8\,,2)=640$ €

(aproximamos el valor de y al nº natural más próximo que además pertenece a la región factible)

Vértice E: $\begin{cases} x=8 \\ x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=8\ ,\ y=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(8\,,6) \Rightarrow F(8\,,6)=960$ €

Podríamos entonces elegir entre dos soluciones: 8 autocares de 50 plazas o 8 autocares de 40 plazas y 2 de 50 plazas.

2. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}\ ,\qquad g(x)=\ln\frac{3x^2}{x-5}\ ,\qquad h(x)=e^{5x}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x+3}{x^2-3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Estudie la continuidad de f en $x=2$. Analice el crecimiento de la función $f(x)$ si $x>2$. ¿Tiene f algún máximo o mínimo relativo si $x>2$?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) • $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{\sqrt{3x^3}}{\sqrt{x^3}}-\dfrac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}=\sqrt{3}-\sqrt[6]{\dfrac{4x^2}{x^9}}=\sqrt{3}-\sqrt[6]{\dfrac{4}{x^7}}=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\cdot x^{-\frac{7}{6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=-\sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot x^{-\frac{13}{6}}=\frac{7\sqrt[3]{2}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^{13}}}=\frac{7\sqrt[3]{2}}{6x^2\sqrt[6]{x}}$$

• $g(x)=\ln\dfrac{3x^2}{x-5}=\ln\left(3x^2\right)-\ln(x-5) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x}{3x^2}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2x-10-x}{x(x-5)}=\dfrac{x-10}{x^2-5x}$

• $h'(x)=5e^{5x}+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}=5e^{5x}-\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot(x-1)^2}=5e^{5x}-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-1)^4}{x-1}}}=$

$$=5e^{5x}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

b) C Continuidad de $f(x)$ en $x=2$:

$\exists\, f(2)=5$

$$\exists \lim_{x\to 2} f(x): \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2-3}=5 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \quad \Rightarrow$ la función es continua en $x=2$.

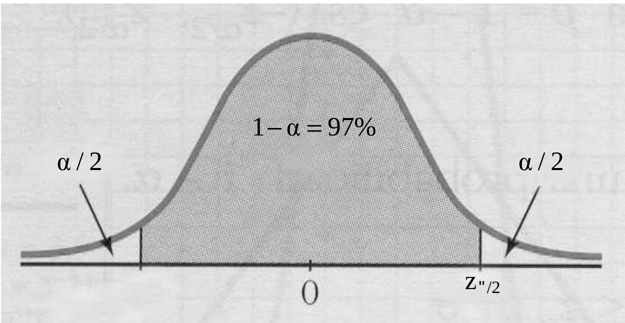
C Para $x>2$: $\quad f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{x^2-3-(x+3)2x}{\left(x^2-3\right)^2}=\dfrac{-x^2-6x-3}{\left(x^2-3\right)^2}=-\dfrac{x^2+6x+3}{\left(x^2-3\right)^2}<0 \quad \forall\, x>2$

luego la función es decreciente.

C No, pues la función es decreciente $\forall\, x>2$.

3. El consumo bimestral de energía eléctrica de una población de 100 personas se distribuye normalmente con una media de 59 kwh y una desviación típica de 6 kwh. Calcule el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 97%. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.



El radio del intervalo de confianza es $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 97%, $\sigma=6$ es la desviación típica poblacional y $n=100$ es el número de individuos de la muestra.

Obtengamos, a partir de la tabla, el valor de $z_{\alpha/2}$: $\quad 1-\alpha=0,97 \;\Rightarrow\; \alpha=1-0,97=0,03 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0,015 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2}=0,985$. En la tabla encontramos: $\quad p\left(z\le z_{\alpha/2}\right)=0,985 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2}=2,17$

Por tanto: $\quad E=2,17\cdot\dfrac{6}{10}=1,302$ y el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x}-E\,,\,\bar{x}+E\right)=\left(59-1.302\,,\,59+1.302\right)=\left(57.698\,,\,60.302\right)$$