Septiembre 2001.

OPCIÓN A.

1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2x + bz = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$ *con b un parámetro real, calcular:*

a) El rango de la matriz de coeficientes del sistema según los valores del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Los valores del parámetro b para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y hallar la solución del sistema para los valores de b calculados. *(3 puntos)*
c) Los valores del parámetro b para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado y hallar las soluciones del sistema para los valores de b calculados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea A la matriz de los coeficientes. Se tiene:

$$\text{rg } A = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & b+6 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & b+10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 \leftrightarrow F_3$ (2) $F_3 + 2\,F_1$ (3) $F_3 + F_2$

$\Rightarrow$ Si $b = -10$: rg A = 2 ; si $b \neq -10$: rag A = 3

b) Puesto que se trata de un sistema homogéneo, es compatible determinado cuando rg A = nº de incógnitas = 3, luego lo es para b … ! 10. La única solución es la trivial: $x = y = z = 0$.

c) El sistema es compatible indeterminado cuando rg A < nº de incógnitas, luego lo es para b = ! 10 (rg A = 2).

El sistema dado es equivalente al: $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$ y considerando la incógnita z como un parámetro: $z = \lambda$, se tiene:

$$\begin{cases} -x - y = -3\lambda \\ 2y = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad x = 5\lambda \;,\; y = -2\lambda \;,\; z = \lambda$$

2. *a) Calcular, si existen, los puntos de inflexión de la función* $f(x) = 2x^2 + \ln x$ *(5 puntos)*
b) Determinar una función polinómica cuya derivada sea $x - 1$ *y cuya gráfica pase por el punto* $(1, 1)$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Observemos que $\text{Dom}(f) = R^+$.

Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada y no anulan la tercera derivada:

$f'(x) = 4x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (se desestima $x = -\dfrac{1}{2}$ porque no pertenece al dominio de la función) y como $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \in R^+$, la función tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Sea F(x) la función buscada. Se tiene: $F(x)=\int (x-1)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-x+C$

Como F(1) = 1: $\dfrac{1}{2}-1+C=1 \Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$ y por tanto: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$

3. *De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar, se pide:*

a) Calcular la probabilidad de que la carta extraída no sea un rey *(2 puntos)*
b) Calcular la probabilidad de que la carta extraída no sea un rey, sabiendo que ha sido una figura *(3 puntos)*
c) Si de la misma baraja se extrae otra carta al azar después de introducir la primera, calcular la probabilidad de que al menos una de las dos cartas extraídas haya sido un rey. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: R = “extraer un rey” , F = “extraer una figura”. Se tiene:

a) $p\left(\overline{R}\right)=\dfrac{36}{40}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$

b) $p\left(\overline{R}/F\right)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}=0{,}6667$

c) El suceso “al menos una de las dos cartas extraídas ha sido un rey” es el suceso contrario del suceso “ninguna de las dos cartas extraídas ha sido un rey”. Como se trata de un experimento con reposición, los sucesos son independientes y se tiene:

$p\left(R_1\cup R_2\right)=1-p\left(\overline{R}_1\cap \overline{R}_2\right)=1-0{,}9\cdot 0{,}9=1-0{,}81=0{,}19$

También: $p\left(R_1\cup R_2\right)=p\left(R_1\right)+p\left(R_2\right)-p\left(R_1\cap R_2\right)=\dfrac{4}{40}+\dfrac{4}{40}-\dfrac{4}{40}\cdot\dfrac{4}{40}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{19}{100}=0{,}19$

Septiembre 2001.

OPCIÓN B.

1. *Un taller de cerámica produce jarrones y ceniceros de los que obtiene unos beneficios unitarios de 5 y 6 unidades monetarias, respectivamente. La producción de dichos artículos se realiza a partir de dos factores productivos F_1 y F_2, de los que se utilizan 4 y 2 unidades, respectivamente, por cada jarrón y 2 y 3 unidades por cada cenicero. Sabiendo que la disponibilidad semanal de F_1 es de 110 unidades y de F_2 es de 85 unidades, el taller quiere saber:*

semanales? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Si a partir de un estudio de mercado se concluye que existe más demanda de jarrones que de ceniceros, ¿afectará esta circunstancia a la producción del taller si su objetivo sigue siendo maximizar sus beneficios? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal.

a) Organicemos los datos y las condiciones del problema en una tabla:

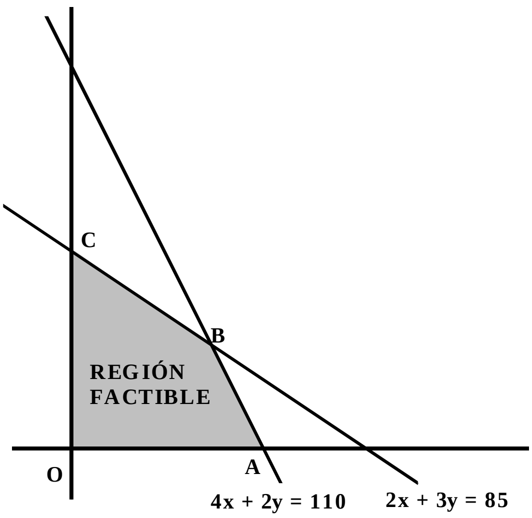
OBJETO	**NÚMERO**	**FACTOR F_1**	**FACTOR F_2**	**BENEFICIOS**
Jarrones	x	4x	2x	5x
Ceniceros	y	2y	3y	6y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$4x + 2y \leq 110$	$2x + 3y \leq 85$	$F(x, y)$

La función objetivo, que debe ser máxima, es la función que expresa los beneficios: $F(x, y) = 5x + 6y$.

Las restricciones a que está sometida la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 2y \leq 110 \\ 2x + 3y \leq 85 \end{cases}$

Dibujemos la región factible (conjunto de los puntos del plano solución del sistema de restricciones):

C La recta de ecuación x = 0 es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
C La recta y = 0 es el eje de abscisas. La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.
C La recta $4x + 2y = 110$ pasa por los puntos $(0, 55)$ y $(20, 15)$!por ejemplo!. El semiplano solución de la inecuación $4x + 2y \leq 110$ es el que contiene al origen de coordenadas pues $(0, 0)$ verifica la inecuación.
C La recta $2x + 3y = 85$ pasa por los puntos $(5, 25)$ y $(20, 15)$!por ejemplo!. El semiplano solución de la inecuación $2x + 3y \leq 85$ es el que contiene al origen de coordenadas pues $(0, 0)$ verifica la inecuación.



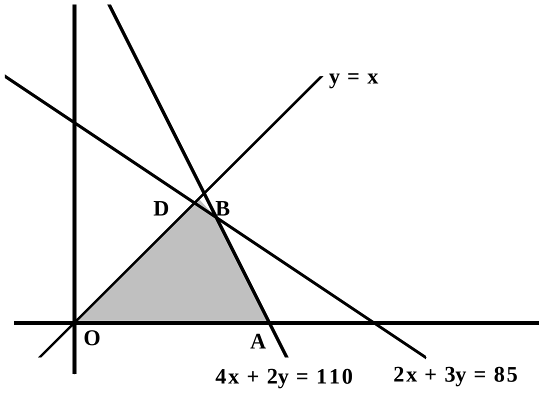
La región factible es el cuadrilátero OABC. La solución del problema serán las coordenadas de alguno de sus vértices. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos y observemos en cuál tiene el valor máximo:

$O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$ $\qquad$ $A\left(\frac{55}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{55}{2}, 0\right) = 5 \cdot \frac{55}{2} + 6 \cdot 0 = 137{,}5$

$B(20,15) \Rightarrow F(20,15) = 5\cdot 20 + 6\cdot 15 = 190$ $\qquad$ $C\left(0, \frac{85}{3}\right) \Rightarrow F\left(0, \frac{85}{3}\right) = 5\cdot 0 + 6\cdot \frac{85}{3} = 170$

Luego los beneficios son máximos cuando fabriquen y vendan 20 jarrones y 15 ceniceros.

b) Ahora hay que añadir la condición $x \geq y$. La nueva región factible es el cuadrilátero OABD:



El valor de la función objetivo en los vértices O, A y B ya es conocido. Veamos su valor en el nuevo vértice D:

$D(17,17) \Rightarrow F(17,17) = 5\cdot 17 + 6\cdot 17 = 187$

Por tanto, la función sigue siendo máxima en el vértice B.

2. *Dada la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *, se pide:*

a) Probar que la recta $y = -x$ *es tangente a la curva* $y = f(x)$ *en algún punto.* *(4 puntos)*

b) Determinar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$ *y el eje de abscisas.* *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La pendiente de la recta $y = -x$ es ! 1. Si esta recta es tangente a la gráfica de la función, su pendiente debe coincidir con el valor de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \quad x = 1 \ , \ x = 3$$

Por tanto, la recta puede ser tangente a la gráfica de la función en dos puntos: $(1,3)$ y $(3,-3)$. En $(1,3)$ no lo es pues la recta $y = -x$ no pasa por dicho punto. En cambio sí lo es en $(3, -3)$ pues este punto pertenece a la tangente.

b) Puesto que la función es polinómica y, por tanto, continua, los puntos de corte con el eje OX serán los extremos de los recintos limitados por la función y el eje de abscisas:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2\ ,\ x = 4.$$

Obtengamos una primitiva de la función: $F(x) = \int \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$

Con lo que: $S_1 = \left| F(2) - F(0) \right| = 4$ $\qquad$ $S_2 = \left| F(4) - F(2) \right| = \left| -4 \right| = 4$ y por tanto: $S = S_1 + S_2 = 8\ u^2$

3. *Las puntuaciones en cierta asignatura de una universidad siguen una distribución normal de media desconocida y varianza 4. Calcular, con un nivel de confianza del 98%, un intervalo para la puntuación media sabiendo que en una muestra de 64 estudiantes se obtuvo una puntuación media de 5. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Si la varianza es 4, la desviación típica es $\sigma = \sqrt{4} = 2$

$1 - \alpha = 98\% = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 0{,}02 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Rightarrow p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ y mirando en la tabla, esta probabilidad corresponde a un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$. El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5 - 2{,}33\cdot\frac{2}{8}\ ,\ 5 + 2{,}33\cdot\frac{2}{8}\right) = (4'4175\ ,\ 5'5825)$$