Junio 1997.

OPCIÓN A.

1. *Sea S la región del plano definida por las tres inecuaciones siguientes:* $x-y-1\le 0 \quad , \quad y\ge 3-3x \quad , \quad x+3y\ge 5$

a) Representar gráficamente la región S. *(2 puntos)*
b) Considerar la función f(x , y) = x + 3y. Calcular, si existen, los valores de (x , y) que hacen máxima y los que hacen mínima la función f(x , y) en la región S. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*
c) Suponer que en la tercera inecuación se cambia la desigualdad, es decir las inecuaciones que definen S son:

$$x-y-1\le 0 \quad , \quad y\ge 3-3x \quad , \quad x+3y\le 5$$

¿Cuáles son ahora las respuestas del apartado b)?. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*

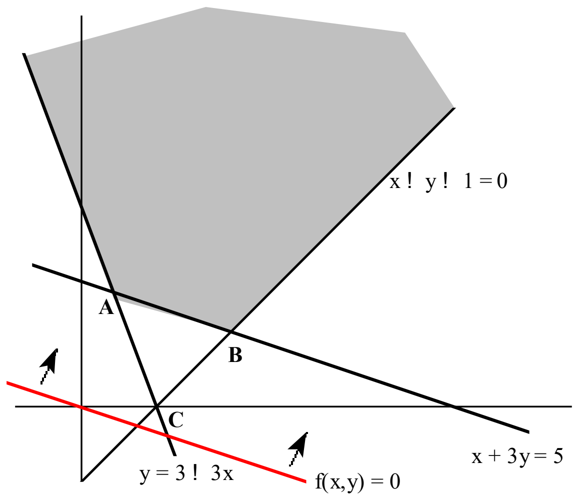
SOLUCIÓN.

a) - La recta $x-y-1=0$ pasa por los puntos $(0,-1)$ y $(1,0)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $x-y-1\le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

- La recta $y=3-3x$ pasa por los puntos $(0,3)$ y $(1,0)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $y\ge 3-3x$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

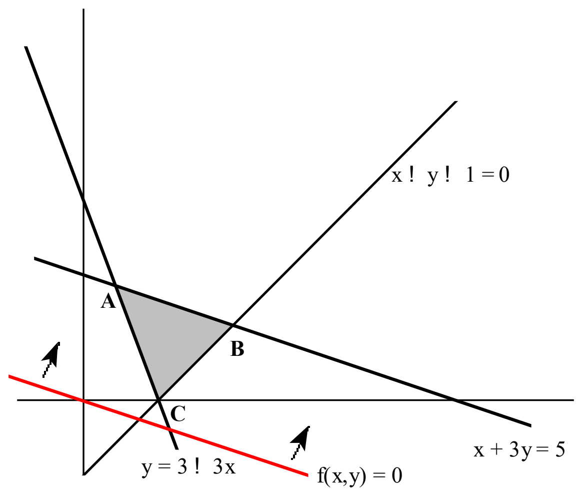
- La recta $x+3y=5$ pasa por los puntos $(5,0)$ y $(2,1)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $x+3y\ge 5$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región S, que satisface las tres desigualdades, está señalada en gris.



b) Representamos la función $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x+3y=0$. Se trata de una recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(3,-1)$ (por ejemplo). Puesto que es paralela al lado AB de S, al trasladarla en dirección a S, los primeros puntos de la región S que toca es el lado AB y como la región S es abierta, no existe un punto de la misma que sea el más alejado. En consecuencia, la función $f(x,y)$ alcanza su mínimo valor en cualquier punto del segmento AB y no alcanza un valor máximo en S.

c) Ahora la región S es el triángulo ABC. Al trasladar la función $f(x,y)=0$ paralelamente a sí misma hacia S, el primer vértice que toca es el $C(1,0)$ donde alcanza el mínimo y los dos últimos el A y el B por lo que alcanza el máximo en cualquier punto del segmento AB.



2. *Sea la función f(x) = ln (1 + x*^{2}*). Se pide:*

a) Determinar el dominio de definición de f(x). *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos. En caso afirmativo, calcularlos. *(6 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $D(f) = \{x \in \Re \ / \ 1 + x^2 > 0\} = \Re$

b) Los intervalos ce crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$. Se tiene:

$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$

luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.
La función es continua por lo que tiene un mínimo en x = 0 ya que pasa en dicho punto de ser decreciente a ser creciente. Por tanto, la función tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$.

c) Puesto que en $(0, 0)$ la función tiene un mínimo, la tangente es horizontal de ecuación y = 0.

3. *En una bolsa hay 5 bolas verdes y 4 marrones. Se extraen al azar dos bolas. Calcular razonadamente la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color si:*

a) se extraen simultáneamente. *(5 puntos)*
b) se extrae una bola, se devuelve a la bolsa y se extrae otra bola. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Extraerlas simultáneamente equivale a extraer una y, sin reponerla, extraer la otra. En este caso, la extracción de la segunda bola está condicionada por la primera extracción. Se tiene:

$$p\left[(V_1 \cap V_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = p(\mathrm{V}_1) \cdot p(V_2 / V_1) + p(\mathrm{M}_1) \cdot p(M_2 / M_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{32}{72} = 0{,}44$$

b) Ahora la extracción de la segunda bola se realiza en las mismas condiciones que la primera. Por tanto:

$$p\left[(V_1 \cap V_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = p(\mathrm{V}_1) \cdot p(V_2) + p(\mathrm{M}_1) \cdot p(M_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{41}{81} = 0{,}506$$

Junio 1997.

OPCIÓN B.

1. *Considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ *siendo m un parámetro real. Se pide:*

a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro m. *(3 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución según los valores del parámetro m. En caso afirmativo, resolver el sistema.* *(4 puntos)*

c) Para m = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular del mismo rango:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m-9 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & m-7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si m} = 7: & \text{rg A} = 2 \\ \text{Si m} \neq 7: & \text{rg A} = 3 \end{cases}$$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - 3F_1$ (2) $F_3 - F_2$

b) El sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + mz = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ (m-7)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales: (1) las mismas que en el apartado anterior

$$\begin{cases} \text{Si } m \neq 7: \text{ el sistema es compatible determinado. La única solución es la trivial: } x = y = z = 0 . \\ \text{Si } m = 7: \text{ el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son: } x = -5\lambda \text{ , } y = 2\lambda \text{ , } z = \lambda \end{cases}$$

c) El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 3 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 2z = -4 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 2z = -4 \\ 0z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ el sistema es incompatible.}$$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - 3F_1$ (2) $F_3 - F_2$

2. *Una empresa emplea un único factor para producir un bien de acuerdo con la función de producción* $q(x) = 4\sqrt{x}$ *, donde x es el número de unidades de factor utilizadas en el proceso de producción y q(x) representa el número de unidades de bien obtenidas en dicho proceso. Cada unidad del bien se vende a 100 unidades monetarias y una unidad de factor cuesta 50. Se pide:*

a) Determinar una función que represente los beneficios de la empresa en función de la cantidad de factor que se utiliza. *(3 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de factor se ha de utilizar para maximizar los beneficios de la empresa?, ¿cuál es el máximo beneficio que alcanza la empresa?. Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas. *(7 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Los beneficios se obtienen como diferencia entre los ingresos y los gastos:

$$B(x) = I(x) - G(x) = 100 \cdot 4\sqrt{x} - 50x = 400\sqrt{x} - 50x$$

b) Veamos para qué valor de x la función B(x) es máxima: $B'(x) = \dfrac{400}{2\sqrt{x}} - 50 = \dfrac{200}{\sqrt{x}} - 50 = 0 \Rightarrow 200 - 50\sqrt{x} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (valor crítico)

Como además: $B''(x) = \dfrac{-200 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{100}{x\sqrt{x}} \Rightarrow B''(16) < 0 \Rightarrow$ máximo

Por tanto deben utilizarse 16 unidades de factor.

3. *Se sabe que la desviación típica de la duración de las lámparas eléctricas fabricadas en cierta empresa es de 250 horas. Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, se pueda estimar la duración media de las lámparas con un error menor que 40 horas. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es: $\sigma = 250$ horas

Para un nivel de confianza del 95%: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es $E = 40$ horas. Se tiene:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 250^2}{40^2} = 150{,}06 \Rightarrow$ debe elegirse una muestra de 151 lámparas como mínimo.