Septiembre 1997.

OPCIÓN A.

1. *Sea el sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} 3x+4y-5z=6 \\ x-y+z=0 \\ x-y \quad\;\; =2 \end{cases}$. *Se pide:*

a) Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. *(5 puntos)*
b) Modificando una sola de las tres ecuaciones, transformar el sistema dado en un sistema compatible indeterminado y resolverlo. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
NOTA: *Resolver los sistemas por el método de Gauss*

SOLUCIÓN.

a) Para la discusión y la resolución utilizamos el método de Gauss que consiste en la aplicación de las transformaciones elementales hasta conseguir un sistema escalonado equivalente al dado:

$$\begin{cases} 3x+4y-5z=6 \\ x-y+z=0 \\ x-y \quad =2 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+4y-5z=6 \\ x-y=2 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ 7y-8z=6 \\ -z=2 \end{cases} \Rightarrow \text{el sistema es compatible determinado.}$$

Resolviendo las ecuaciones de abajo a arriba: $z=-2$, $7y=6-16 \Rightarrow y=-\dfrac{10}{7}$, $x=-\dfrac{10}{7}+2=\dfrac{4}{7}$ es decir:

$$\boxed{x=\frac{4}{7}\ ,\ y=-\frac{10}{7}\ ,\ z=-2}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) E_2-3E_1 E_3-E_1

b) Se trata de que una de las ecuaciones sea una combinación lineal de las otras dos. Por ejemplo, haciendo que $E_1=E_2+E_3$:

$$\begin{cases} 2x-2y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x-y= \quad 2 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ -z=2 \\ -z=2 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=y-z \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\lambda+2\ ,\ y=\lambda\ ,\ z=-2}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) E_2-E_1 E_3-2E_1 (3) Eliminación de una ecuación repetida

2. *Considerar la función* $f(x)=2x^3-3x^2$. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x) y, en caso afirmativo, calcularlos. *(5 puntos)*
b) ¿Existen puntos de inflexión de f(x)?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x=-1$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El crecimiento y decrecimiento de una función depende del signo que tenga $f'(x)$: $f'(x)=6x^2-6x=6x\cdot(x-1)$

Se tiene:

$f'(x)>0$		$f'(x)<0$		$f'(x)>0$
	0		1	

luego la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ y decreciente en $(0,1)$

Puesto que la función es polinómica y por tanto continua, tiene un máximo relativo en x = 0 (pasa de creciente a decreciente) y un mínimo relativo en en x = 1 (pasa de decreciente a creciente). Por tanto:

$$\text{Máximo: } (0\,,0) \quad \text{Mínimo: } (1\,,-1)$$

b) Un punto de inflexión se caracteriza por anular la segunda derivada y no anular a la tercera derivada:

$f''(x) = 12x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$. Y como $f'''(x) = 12 \neq 0$, f (x) tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{1}{2}$: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

En nuestro caso: $x_0 = -1 \;\Rightarrow\; y_0 = -5$ y $f'(x_0) = f'(-1) = 12$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y + 5 = 12\cdot(x+1) \;\Leftrightarrow\; y + 5 = 12x + 12 \;\Leftrightarrow\; \boxed{12x - y + 7 = 0}$$

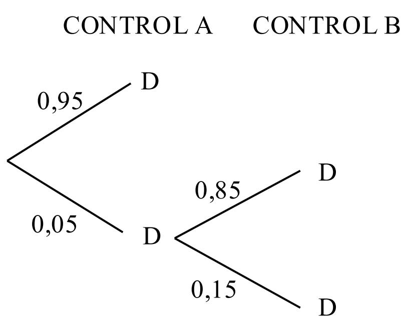
3. *Para que un determinado electrodoméstico salga al mercado debe superar dos controles de calidad, que denominamos A y B. El control de calidad A detecta un electrodoméstico defectuoso con una probabilidad de 0,95 y el B lo detecta con probabilidad 0,85. Calcular la probabilidad de que un electrodoméstico defectuoso:*

a) Sea detectado. *(5 puntos)*
b) No sea detectado. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea D el suceso "detectado" y $\overline{D}$ el suceso "no detectado"

Organicemos el diagrama en árbol de la situación:



Se tiene:

a) $p\,(D) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}85 = 0{,}9925$

b) $p\,(\overline{D}) = 1 - 0{,}9925 = 0{,}0075$

Septiembre 1997.

OPCIÓN B.

1. *En una empresa se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra. Sabiendo que una unidad de queso se vende a 400 pesetas y una de mantequilla a 250 y que se vende todo lo que se produce, se pide:*

a) ¿Cuántas unidades de queso y de mantequilla se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide no producir más de 13 unidades de queso, ¿cambia la solución del apartado a)?. Razonar la respuesta y en caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Debemos construir la función objetivo y el conjunto de restricciones a las que se encuentra sujeta. Para facilitarlo, organicemos en forma de tabla los datos del problema:

Producto	**Nº unidades**	**Leche**	**Mano de obra**	**Beneficio**
Queso	x	10x	6x	400x
Mantequilla	y	5y	8y	250y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	≤ 200	≤ 150	$f(x, y)$

Se tiene:
- Función objetivo (maximizar):
$$f(x, y) = 400x + 250y$$
- Restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 5y \leq 200 \\ 6x + 8y \leq 150 \end{cases}$$

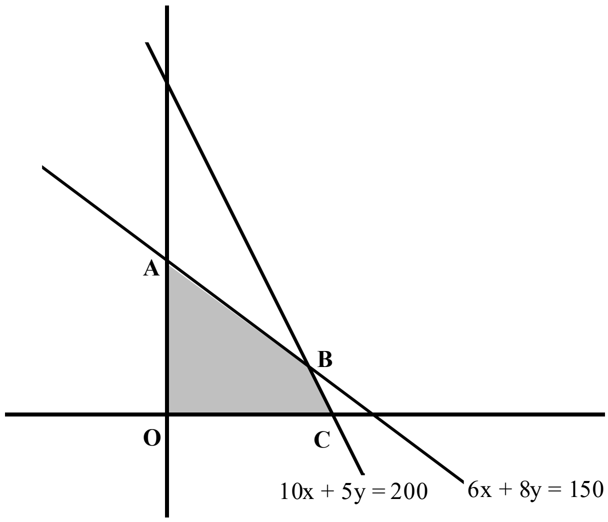
Representemos gráficamente el conjunto de restricciones para dibujar la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

- La recta $10x + 5y = 200$ pasa por los puntos $(20, 0)$ y $(0, 40)$ (por ejemplo). La solución de $10x + 5y \leq 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

- La recta $6x + 8y = 150$ pasa por los puntos $(25, 0)$ y $(-15, 30)$ (por ejemplo). La solución de $6x + 8y \leq 150$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.



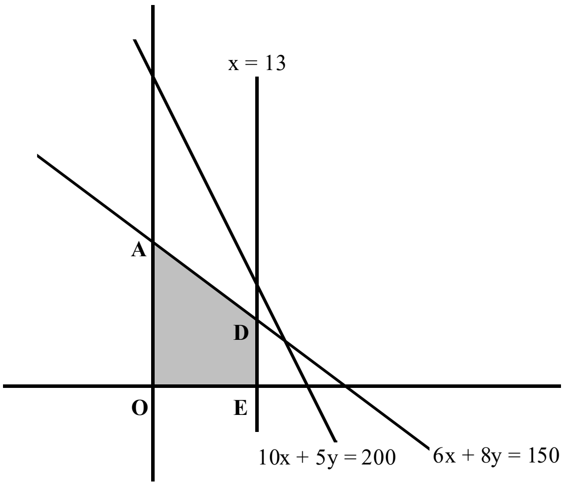
La región factible es el cuadrilátero OABC (en gris). Como la función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible, obtengamos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$; Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow A(0\ ,\ 18{,}75) \Rightarrow f(0\ ,\ 18{,}75) = 4687{,}5$

Vértice B: $\begin{cases} 10x + 5y = 200 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow B(17, 6) \Rightarrow f(17, 6) = 8300$; Vértice C: $C(20, 0) \Rightarrow f(20, 0) = 8000$

Por tanto, los beneficios serán máximos si se producen 17 unidades de queso y 6 de mantequilla.

b) Al conjunto de restricciones hay que añadir $x \leq 13$. La solución de esta inecuación es el semiplano a la izquierda de la recta x = 13 que es paralela al eje de ordenadas. La región factible es ahora el cuadrilátero OADE:



Los nuevos vértices son:

Vértice D: $\begin{cases} x = 13 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow D(13, 9) \Rightarrow f(13, 9) = 7450$

Vértice E: $E(13, 0) \Rightarrow f(13, 0) = 5200$

y además sabemos: $f(0, 0) = 0$ y $f(0\ ,\ 18{,}75) = 4687{,}5$

por lo que, ahora, la nueva solución es: 13 unidades de queso y 9 unidades de mantequilla.

2. *Considerar la función* $f(x) = ax^2 + b\ \ln\ x$ *. Se pide:*

a) Calcular los valores de a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en el punto (1 , 2) . *(6 puntos)*

b) Para a = 1 y b = 0, calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$ *. Interpretar geométricamente esta integral.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si tiene un punto de inflexión en $(1, 2)$ debe ocurrir: $f(1) = 2$ y $f''(1) = 0$

Se tiene: $f'(x) = 2ax + \dfrac{b}{x} \Rightarrow f''(x) = 2a - \dfrac{b}{x^2}$. Entonces: $\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a = 2 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$

b) Tenemos: $f(x) = x^2$ luego: $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_2^4 = \dfrac{64}{3} - \dfrac{8}{3} = \dfrac{56}{3}$ Es el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje de abscisas y las rectas x = 2 y x = 4.

3. *Se sabe que la desviación típica del número de pulsaciones por minuto de los individuos de una cierta población es de 9 pulsaciones por minuto. Se considera una muestra aleatoria de 100 individuos que revela un número medio de pulsaciones por minuto de 68. Con un nivel de confianza del 99%, determinar el intervalo en el que se encontrará el número medio de pulsaciones por minuto de los individuos de esta población. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es: $\sigma = 9$ pulsaciones por minuto.

Para un nivel de confianza del 99%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El radio del intervalo es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{100}} \cong 2{,}3$.

Por tanto, el intervalo es: $(68 - 2{,}3\ ,\ 68 + 2{,}3) = (65{,}7\ ,\ 70{,}3)$ es decir, el número medio de pulsaciones por minuto de la población está entre 65,7 y 70,3 con un nivel de confianza del 99%.