Junio 1996.

OPCIÓN A.

1. *Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg. de color azul, 400 kg. de color verde y 225 kg. de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras, A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg. de lana azul y 2 kg. de lana verde y para fabricar una de tipo B, 2 kg. de lana azul, 1 kg. de lana verde y 1kg. de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2.000 pesetas y cada una de tipo B por 3.000 pesetas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:*

a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo?, ¿cuál es ese beneficio máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(8 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Es un problema de Programación Lineal. Debemos construir la función objetivo y las restricciones a que está sometida. Elaboremos una tabla con lo datos y condiciones expresados en el enunciado:

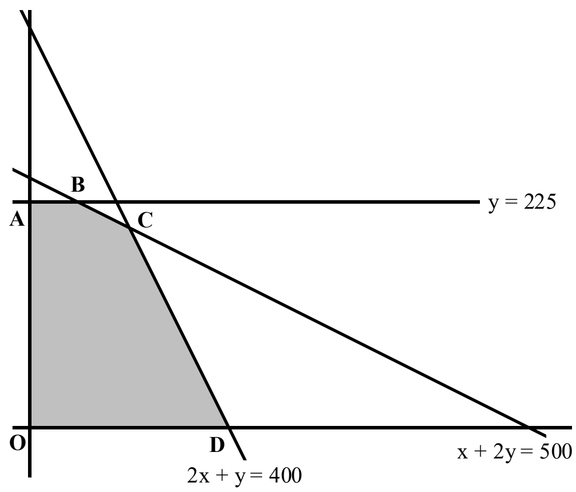
Tipo	**número**	**Lana azul**	**Lana verde**	**Lana roja**	**Beneficio**
A	x	x	2x	0x	2000x
B	y	2y	y	y	3000y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 500	≤ 400	≤ 225	$f(x, y)$

• Función objetivo (maximizar): $f(x, y) = 2000x + 3000y$

• Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$

Construyamos la región factible que es la solución del conjunto de restricciones:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior.
- La recta $x + 2y = 500$ pasa por los puntos $(500, 0)$ y $(0, 250)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \leq 500$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $2x + y = 400$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 400)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2x + y \leq 400$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $y = 225$ es paralela al eje de abscisas y la solución de $y \leq 225$ es el semiplano inferior.



La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor que tiene la función objetivo en los mismos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$
Vértice A: $A(0, 225) \Rightarrow f(0, 225) = 3000 \cdot 225 = 675000$

Vértice B: $\begin{cases} x+2y=500 \\ y=225 \end{cases} \Rightarrow B(50\,,225) \Rightarrow f(50\,,225)=2000\cdot 50+3000\cdot 225=775000$

Vértice C: $\begin{cases} x+2y=500 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow C(100\,,200) \Rightarrow f(100\,,200)=2000\cdot 100+3000\cdot 200=800000$

Vértice D: $\begin{cases} y=0 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow D(200\,,0) \Rightarrow f(200\,,0)=2000\cdot 200=400000$

Por tanto, la función objetivo se maximiza en el vértice C. Interesa fabricar 100 alfombras del tipo A y 200 del tipo B.

b) La lana de cada color que se gasta es: Azul: $100+400=500\text{ kg} \Rightarrow$ no sobra .
Verde: $200+200=400\text{ kg} \Rightarrow$ no sobra.
Roja: $0+200=200\text{ kg} \Rightarrow$ sobran 25 kg.

2. *a) Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razonar la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y=x^2-9$ *,* $y=7$*.* *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x el número buscado. La función que debe ser máxima es: $f(x)=x-x^2$. Estudiemos para qué valor de x la función alcanza su máximo: $f'(x)=1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Como $f''(x)=-2<0 \Rightarrow$ f(x) es máxima en $x=\frac{1}{2}$.

El número buscado es pues $x=\frac{1}{2}$.

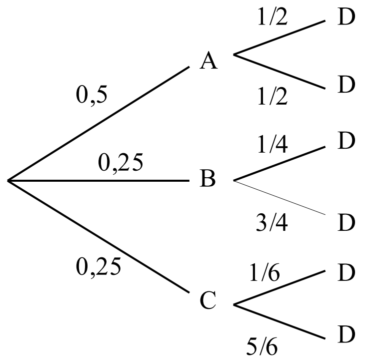
b) Escribamos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x)=x^2-9-7=x^2-16$.
Los puntos de corte de esta función con el eje OX (límites de integración) son: $x^2-16=0 \Rightarrow x=-4\ ,\ x=4$.
Por tanto:

$$\int_{-4}^{4}\left(x^2-16\right)=\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-4}^{4}=\left(\frac{64}{3}-64\right)-\left(\frac{-64}{3}+64\right)=\frac{64}{3}-64+\frac{64}{3}-64=\frac{128}{3}-128=-\frac{256}{3} \Rightarrow S=\frac{256}{3}u^2$$

3. *Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos, la B el 25% y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es en la cadena A de 1/2, en la B de 1/4 y en la C de 1/6. Calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A. *(2 puntos)*
b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso. *(4 puntos)*
c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.



a) $p(D \cap A)=p(A)\cdot p(D/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D)=p(A)\cdot p(D/A)+p(B)\cdot p(B/D)+p(C)\cdot p(D/C)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}=\frac{12}{48}+\frac{3}{48}+\frac{2}{48}=\frac{17}{48}\cong 0{,}35$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(C/\overline{D})=\frac{p(C)\cdot p(\overline{D}/C)}{p(A)\cdot p(\overline{D}/A)+p(B)\cdot p(\overline{D}/B)+p(C)\cdot p(\overline{D}/C)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{10}{31}\cong 0{,}32$$

Junio 1996.

OPCIÓN B.

1. *Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 pesetas. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 pesetas que paga B, C paga 3 pesetas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)
$$\begin{cases} A+B+C=8600 \\ A=3\cdot(B+C) \\ \dfrac{B}{C}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=8600 \\ A-3B-3C=0 \\ 3B-2C=0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} A+B+C=8600 \\ A-3B-3C=0 \\ 3B-2C=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ A-3B-3C=0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ -4B-4C=-8600 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ -20C=-25800 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ C = 1290 , B = 860 , A = 6450

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones
(2) $E_3 - E_1$
(3) (3) $3E_3 + 4E_2$

es decir: A paga 6450 ptas., B paga 860 ptas. y C paga 1290 ptas.

2. *El coste total de fabricación de q unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ dólares. Se define coste medio por unidad como el cociente C(q) / q . Se pide:*

a) ¿En qué nivel de producción será menor el coste medio por unidad?. Razonar la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Tiene la función coste medio por unidad puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La función "coste medio por unidad" es: $f(q)=\dfrac{3q^2+5q+75}{q}$. Veamos para qué valor de q alcanza su mínimo:

$$f'(q)=\frac{(6q+5)\cdot q-(3q^2+5q+75)}{q^2}=\frac{3q^2-75}{q^2}=0 \Rightarrow 3q^2-75=0 \Rightarrow q=\pm 5 \text{ (puntos críticos)}$$

$$f''(q)=\frac{6q\cdot q^2-(3q^2-75)\cdot 2q}{q^4}=\frac{150}{q^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(5)>0 \Rightarrow \text{mínimo} \\ f''(-5)<0 \Rightarrow \text{máximo} \end{cases}$$

luego el coste medio por unidad es mínimo para una producción de q = 5.

b) La función no tiene puntos de inflexión porque $f''(q) \neq 0 \quad \forall q$

3. *Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una cierta población es de 6 Kg. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de considerar para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio de los individuos de la población con un error inferior a 1 Kg. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma = 6\,kg$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es E = 1kg: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 6^2}{1^2} = 138{,}3$ luego el tamaño de la muestra debe ser de 139 individuos como mínimo.