Propuesta A

1A.- a) Enuncia el teorema de valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica **(1 punto)**
b) Calcular un punto del intervalo [0 , 2] en que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=3x^2+2x+1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une a los puntos de f(x) en x = 0 y x = 2 **(1'5 puntos)**

a) **<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>**
Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geométricamente, como **f'(c) es** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

b)

$$\begin{cases} f(0)=3\cdot 0^2+2\cdot 0+1=1 \\ f(2)=3\cdot 2^2+2\cdot 2+1=17 \end{cases} \Rightarrow De\ Lagrange \Rightarrow 17-1=f'(c)(2-0)\Rightarrow f'(c)=\frac{16}{2}=8$$

$$f'(x)=6x+2\Rightarrow f'(c)=8\Rightarrow 6c+2=8\Rightarrow 6c=6\Rightarrow c=1$$

2A.- Calcula las siguiente integral $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$ **(2'5 puntos)**

$$x^3+x^2=0\Rightarrow (x+1)\,x^2=0\Rightarrow \frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{(x+1)\,x^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}=\frac{Ax^2+Bx\,(x+1)+C\,(x+1)}{(x+1)\,x^2}\Rightarrow$$

$$Ax^2+Bx\,(x+1)+C\,(x+1)=x+2\Rightarrow \begin{cases} x=0\Rightarrow A\cdot 0^2+B\cdot 0\,(0+1)+C\,(0+1)=0+2\Rightarrow C=2 \\ x=-1\Rightarrow A\cdot(-1)^2+B\cdot(-1)(-1+1)+C\,(-1+1)=-1+2\Rightarrow A=1 \\ x=2\Rightarrow A\cdot 2^2+B\cdot 2\cdot(2+1)+C\,(2+1)=2+2\Rightarrow 4A+6B+3C=4 \end{cases}$$

$$4\cdot 1+6B+3\cdot 2=4\Rightarrow 6B=-6\Rightarrow B=-1\Rightarrow \frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{(x+1)\,x^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$I=\int\frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dt}{t}-\ln x+2\int x^{-2}dx=\ln t-\ln x+2\cdot\frac{1}{(-1)}x^{-1}=\ln\frac{t}{x}-2\cdot x^{-1}$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt$$

$$I=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}+K$$

3A.- Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula **A^n** cuando $n\in N$ es par **(0'75 puntos)**
b) Resuelve la ecuación matricial **6A^{20}X = B – 3AX**, donde **X** es una matriz cuadrada de orden **3**.
(Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1'75 puntos)**

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I\Rightarrow A^3=I\cdot A=A\Rightarrow A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I\cdots\cdots$$

$$Cuando\ n\in N\Rightarrow\begin{cases}si\ n\ es\ par\Rightarrow A^n=I\\ si\ n\ es\ impar\Rightarrow A^n=A\end{cases}$$

$b)$

$Como\ A^{20}=I$

$$6IX=B-3AX\Rightarrow 6IX+3AX=B\Rightarrow(6I+3A)X=B\Rightarrow 3(2I+A)X=B\Rightarrow(2I+A)X=\frac{1}{3}B\Rightarrow$$

$$(2I+A)^{-1}(2I+A)X=\frac{1}{3}(2I+A)^{-1}B\Rightarrow IX=\frac{1}{3}(2I+A)^{-1}B\Rightarrow X=\frac{1}{3}(2I+A)^{-1}B\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{3}(2I+A)^{-1}\cdot 3\cdot I\Rightarrow X=\frac{3}{3}(2I+A)^{-1}\cdot I=\Rightarrow X=(2I+A)^{-1}$$

$$2I+A=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|2I+A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{vmatrix}=12-3=9\neq 0\Rightarrow Existe\ (2I+A)^{-1}\Rightarrow(2I+A)^{-1}=\frac{1}{|2I+A|}\cdot\left[adj\ (2I+A)^t\right]\Rightarrow$$

$$(2I+A)^t=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (2I+A)^t=\begin{pmatrix}6&0&-3\\0&3&0\\-3&0&6\end{pmatrix}\Rightarrow(2I+A)^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}6&0&-3\\0&3&0\\-3&0&6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda, con\ \lambda \in \Re \\ z = -\lambda \end{cases}$

a) Calcular el valor del parámetro $a \in \Re$ para que **r** y **s** se corten en un punto. Da dicho punto de corte (**1'25 puntos)**
b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a **r** y **s (1'25 puntos)**

a)

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2t = \lambda \\ t = a + \lambda \\ 1 + 3t = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2t = -1 \\ \lambda - t = -a \\ \lambda + 3t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2t = -1 \\ -\lambda - 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow -5t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 0 = -1 \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow -1 + 0 = -a \Rightarrow a = 1$$

$$El\ \ punto\ de\ corte\ P\ de\ r\ \ y\ s\ es \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow P(-1\,,\,0\,,1)$$

b) El plano π queda determinado por los dos vectores directores de las rectas **r** y **s** y por el vector **PG** siendo **G** el punto genérico del plano buscado y P el punto de corte de las rectas hallado en el apartado anterior.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (-1\,,\,0\,,1) = (x+1\,,\,y\,,\,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - 1 + 3y + 2z - 2 - z + 1 - 3x - 3 + 2y = 0 \Rightarrow -4x + 5y + z - 5 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 5y - z + 5 = 0$$

Propuesta B

1B.- Sabiendo que la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ $a,b\in\Re$ tiene un punto crítico en **(1 , 1)**, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo **(2'5 puntos)**

$$f'(x)=\frac{a\left(x^2+1\right)-2x\left(ax+b\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{a\,x^2+a-2ax^2-2bx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a}{\left(x^2+1\right)^2}$$

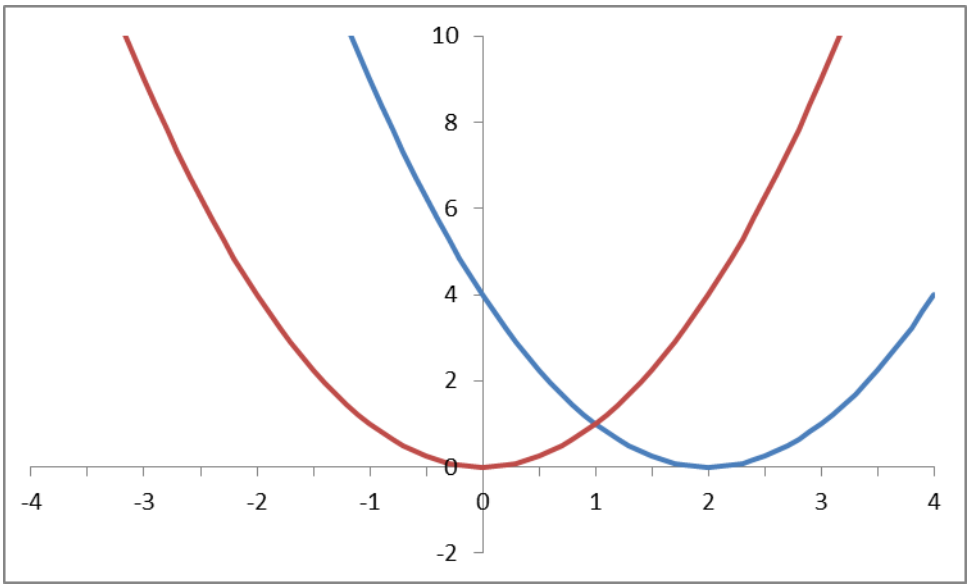
$$\begin{cases} f(1)=1\Rightarrow\dfrac{a\cdot 1+b}{1^2+1}=1\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}=1\Rightarrow a+b=2 \\ f'(1)=0\Rightarrow\dfrac{-a\cdot 1^2-2b\cdot 1+a}{\left(1^2+1\right)^2}=0\Rightarrow\dfrac{-2b}{4}=0\Rightarrow b=0\Rightarrow \end{cases}\Rightarrow a+0=1\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2x+0}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

2.B.- a) Esboza la región encerrada entre el eje de abcisas y las parábolas $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^2-4x+4$ **(0'5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior **(2 puntos)**

a)



$$\textit{Punto de corte de las funciones con OX}\Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}x^2=0\Rightarrow x=0\\ x^2-4x+4=0\Rightarrow\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0\Rightarrow x=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

$$\textit{Punto de corte entre funciones}\Rightarrow x^2=x^2-4x+4\Rightarrow -4x+4=0\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$$

$$A=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2+4\cdot\left[x\right]_1^2$$

$$A=\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(2^3-1^3\right)-2\cdot\left(2^2-1^2\right)+4\cdot(2-1)=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}-6+4=\frac{8}{3}-2=\frac{8-6}{3}=\frac{2}{3}\,u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \Re$

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m-1 \end{cases}$$ **(1'5 puntos)**

b) Calcular la solución cuando sea compatible indeterminado **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & -m & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & m+3 \end{vmatrix} = m^2(m+3) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow m^2(m+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \\ m+3 = 0 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{-3\,,\,0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$Si\ m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = -1 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ 0z = -2 \Rightarrow z = -\dfrac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ m = -3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -3y + z = -3 \Rightarrow 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \Rightarrow -3x + z = 1 \Rightarrow 3x = -1 + z \Rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{3} + z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(-\frac{1}{3} + \lambda\,,\,1 + \frac{\lambda}{3}\,,\,\lambda\right)$$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$ una recta **r'** que pase por **P** y

a) Estudia la posición relativa de π y **r (1'25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta **s** paralela a π que corta a **r** perpendicularmente en el punto **P(0 , 1 , -1) (1 punto)**

a) La recta y el plano pueden ser paralelos, cortarse en un punto o el plano contener a la recta.

En los casos de paralelismo o estar contenida la recta en el plano los vectores directores de recta y plano son perpendiculares y su producto escalar nulo, si no tienen punto en común son paralelas, de tenerlo la recta está contenida en el plano.

Si el producto escalar no es nula, recta y plano se cortan en un punto

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (0\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (0\,,1\,,-1)\cdot(2\,,1\,,1) = 0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow$$

$$Son\ paralelos\ o\ la\ recta\ esta\ contenida\ en\ el\ plano \Rightarrow$$

$$Tomemos\ el\ punto\ R(0\,,1\,,-1)\ \det er\min ado\ en\ la\ ecuación\ de\ r \Rightarrow 1-(-1) = 3 \Rightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow No\ pertenece\ a\ \pi$$

$$El\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos$$

b) Como el vector director de la recta s es perpendicular, a la vez, al vector director del plano y al de la recta, es igual al producto vectorial de ambos vectores

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (0\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2\,,-2\,,-2) \equiv (-1\,,1\,,1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}, \mu \in \Re$$