# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

# SEPTIEMBRE – 2010 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

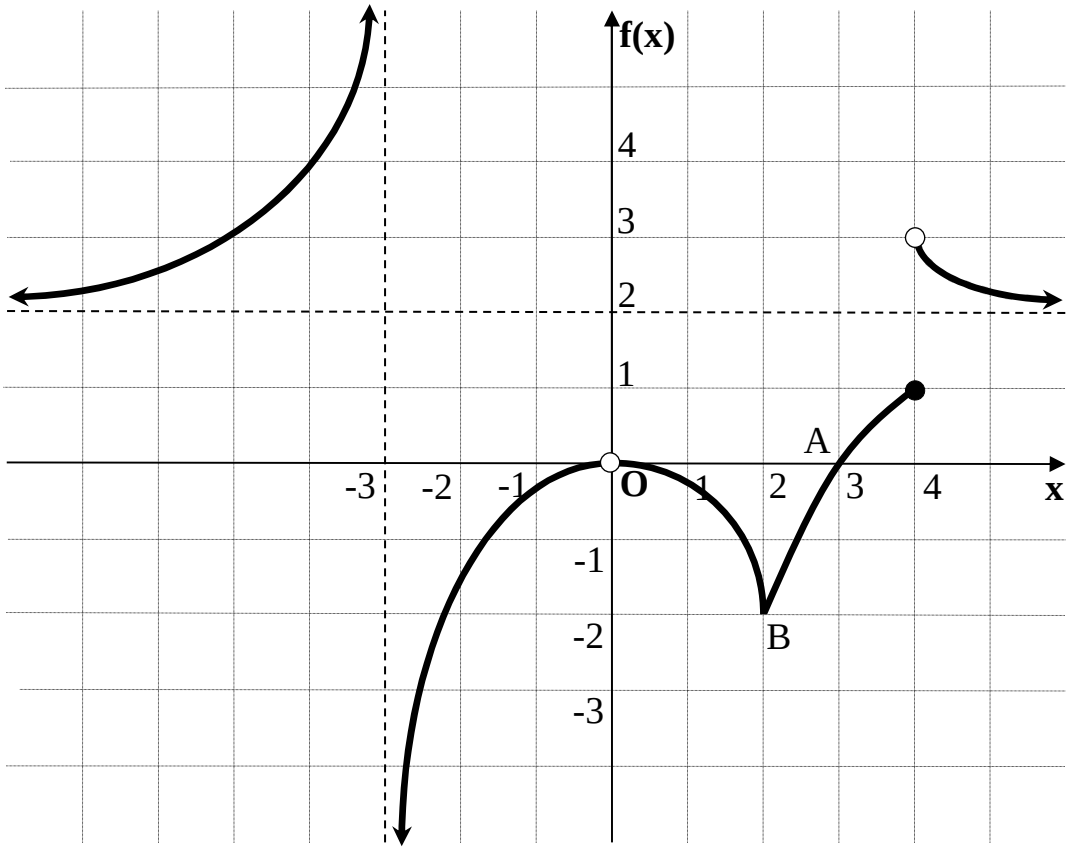
MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

## OPCIÓN A

1º) Determinar dominio, puntos de corte con los ejes coordenados, puntos de discontinuidad, asíntotas, máximos relativos y mínimos relativos de la función cuya gráfica es:




---

El dominio de la función es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-3,\ 0\}}}$.

El recorrido de la función es: $\underline{\underline{R(f) \Rightarrow (-\infty,\ 1] \cup (2,\ +\infty)}}$.

Los puntos de corte con los ejes son: $\begin{cases} Eje\ \ X\ \ \rightarrow\ \ \underline{\underline{A(3,\ 0)}} \\ \\ Eje\ \ Y\ \ \rightarrow\ \ \underline{\underline{No\ \ lo\ \ corta}} \end{cases}$.

La función f(x) tiene una <u>discontinuidad inevitable de salto infinito para x = -2</u>; discontinuidad evitable para <u>x = 0</u> y, por último, una <u>discontinuidad inevitable de salto finito para x = 4</u>.

Las asíntotas de f(x) son las siguientes: $\begin{cases} Horizontales:\ \ \underline{\underline{y = 2}} \\ \\ Verticales:\ \ \underline{\underline{x = -3}} \end{cases}$.

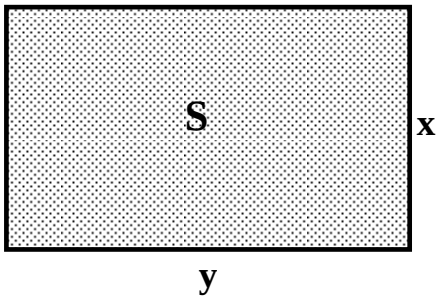
El origen de coordenadas no es un máximo relativo por no estar definida la función en ese punto.

La función tiene un <u>mínimo relativo en B(2, -2)</u>, aunque la función no es derivable en ese punto; este tipo de puntos se denominan “críticos”.

**********

2º) Se quiere construir una ventana rectangular de un metro cuadrado de área. El coste del marco es de 12’5 euros por cada metro de altura y de 8 euros por cada metro de anchura. ¿Qué dimensiones debe tener la ventana para que el marco resulte lo más económico posible?

---




$$Coste = C = (2x)\cdot 12'5 + (2y)\cdot 8 = \underline{25x + 16y}.$$

Para expresar el coste en función de una sola variable tenemos en cuenta que la superficie es de 1 cm$^2$:

$$S = x \cdot y = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x}.$$

$$Coste = C(x) = 25x + 16 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\frac{25x^2 + 16}{x} = C(x)}.$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(x) = \frac{50x \cdot x - (25x^2 + 16)\cdot 1}{x^2} = \frac{50x^2 - 25x^2 - 16}{x^2} = \underline{\frac{25x^2 - 16}{x^2} = C'(x)}.$$

$$C'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{25x^2 - 16}{x^2} = 0 \;;;\; 25x^2 - 16 = 0 \;;;\; x^2 = \frac{16}{25} \;;;\; x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \underline{x = \frac{4}{5} = 0'8}.$$

$$\left(La \;\; solución \;\; x = -\frac{4}{5} \;\; carece \;\; de \;\; lógica\right)$$

El valor de y es el siguiente: $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} = \underline{1'25}$.

$$\underline{\underline{Las \;\; dimensiones \;\; de \;\; la \;\; ventana \;\; son \;\; 80 \;\; cm \;\; de \;\; alto \;\; por \;\; 1'25 \;\; cm \;\; de \;\; ancho.}}$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = \frac{50x \cdot x^2 - (25x^2 - 16)\cdot 2x}{x^4} = \frac{50x^2 - 50x^2 + 32}{x^3} = \underline{\frac{32}{x^3} = C''(x)}.$$

$$C''\left(\tfrac{5}{4}\right) = \frac{32}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo, \;\; c.q.j.}}$$

**********

3º) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-2y+2z=m \\ 3x-y+mz=4 \end{cases}$, se pide:

a ) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b ) Resolverlo para m = 0.

---

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix} \;;;\; A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & -1 & m & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix}=-4m+1+6-6+4-m=-5m+5=0 \;;;\; \underline{m=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 1 \Rightarrow\ Rango\ \ A=Rango\ \ A'=3=n^{o}\ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

$$Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A'\ \Rightarrow\ \{C_2=-C_3\} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-16+1+3-6+2-4=6-26=-26\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ Rango\ \ A=2\ \;;;\; Rango\ \ A'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

b )

Resolvemos el sistema para m = 0, que resulta $\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-2y+2z=0 \\ 3x-y=4 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolvemos aplicando la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}}{5}=\frac{8-8-2}{5}=\underline{\underline{-\frac{2}{5}=x}}\quad ;;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}}{5}=\frac{-4-6-16}{5}=\underline{\underline{-\frac{26}{5}=y}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}}{5}=\frac{-16+1-6-4}{5}=\underline{\underline{-5=z}}$$

**********

4º) Dados los puntos A(0, 5, 2) y B(1, 2, -1):

a ) Averiguar si los puntos pertenecen a la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$.

b ) Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones como intersección de dos planos de la recta s que pasa por los puntos A y B.

---

a )

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \\ A(0,\ 5,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0-1}{-1} = \frac{5-2}{3} = \frac{2}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A \in r}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \\ B(1,\ 2,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1-1}{-1} = \frac{2-2}{3} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{B \notin r}}.$$

b )

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ -1) - (0,\ 5,\ 2) = (1,\ -3,\ -3).$$

Considerando por ejemplo el punto A(0, 5, 2), la expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 3\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}}}$$

Para expresar la recta s como intersección de dos planos la expresamos primero por unas ecuaciones continuas: $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-2}{-3}$. Ahora la expresamos como se nos pide: $s \equiv \begin{cases} -3x = y - 5 \\ -3x = z - 2 \end{cases}$. Mejor expresada:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}}}$$

**********

OPCIÓN B

1º) Determinar una función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que su gráfica pasa por el punto P(-1, 2) y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0, -2).

---

Por pasar por el punto P(-1, 2):

$$f(-1) = 2 \;\Rightarrow\; a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 2 \;\;;;\; \underline{-a + b - c + d = 2}. \qquad (1)$$

Por pasar por el punto Q(0, -2):

$$f(0) = -2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{d = -2}}.$$

Por ser Q(0, -2) y punto de inflexión tiene que anularse la segunda derivada para el valor x = 0:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\;;;\; f''(x) = 6ax + 2b \;\Rightarrow\; f''(0) = 0 \;\Rightarrow\; 2b = 0 \;\;;;\; \underline{\underline{b = 0}}.$$

Con los datos obtenidos hasta ahora la función es: $f(x) = ax^3 + cx - 2$.

Por tener en Q(0, -2) una tangente horizontal significa que la primera derivada se anula para x = 0:

$$f'(x) = 3ax^2 + c \;\Rightarrow\; f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{c = 0}}.$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos, resulta:

$$-a + b - c + d = 2 \;\Rightarrow\; -a + 0 - 0 - 2 = 2 \;\;;;\; -a = 4 \;\;;;\; \underline{\underline{a = -4}}.$$

La función resulta ser: $\underline{\underline{f(x) = -4x^3 - 2}}$.

**********

2º) Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x$:

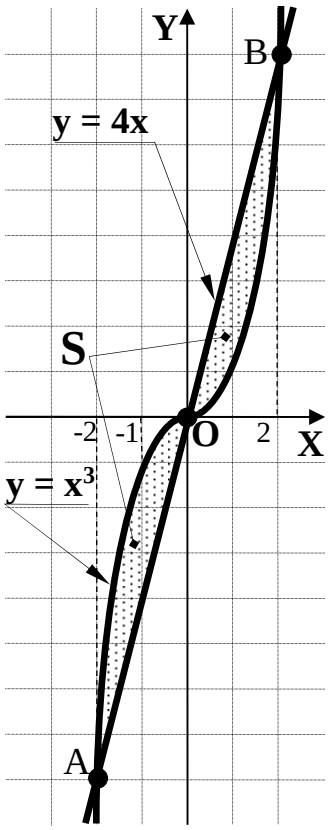
a ) Representar los recintos delimitados por sus gráficas.

b ) Calcula el área de los recintos delimitados.

---

a )

Los puntos de corte de las gráficas se obtienen resolviendo el sistema que forman:




$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 = 4x \;\; ;; \;\; x^3 - 4x = 0 \;\; ;; \;\; x(x^2 - 4) = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{x_1 = 0} \;\; ;; \;\; \underline{x_2 = -2} \;\; ;; \;\; \underline{x_3 = 2}.$$

Los puntos de corte son O(0, 0), A(-2, -8) y B(2, 8).

Es interesente observar que las dos funciones son simétricas con respecto al origen, por cumplirse lo siguiente:

$$f(-x) = -f(x) \text{ y } g(-x) = -g(x).$$

Lo anterior facilita el cálculo del área que delimitan.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.

b )

Como puede observarse, en el intervalo $(0,\ 2)$, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2 \cdot \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(2 \cdot 4 - \frac{16}{4}\right) = 2 \cdot (8 - 4) = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8\ u^2 = S}}$$

**********

3º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$:

a ) Hallar la matriz $N = 2 \cdot A \cdot A^T - 5 \cdot I$, siendo $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b ) Resolver la siguiente ecuación matricial: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

---

a )

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$N = 2 \cdot A \cdot A^T - 5 \cdot I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+4 & -3-10 \\ -3-10 & 9+25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -26 \\ -26 & 68 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -26 & 63 \end{pmatrix} = N}}$$

b )

$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Multiplicando los dos términos por la izquierda por $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}.$$

La matriz $A^{-1}$ la obtenemos por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $A^{-1}$ en la expresión de X:

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15-8 & 5-10 \\ 9+4 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -23 & -5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}}}$$

**********

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y - 3z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x - 3y + z = 2$.

a ) Hallar la ecuación del plano π perpendicular a ambos planos y que pasa por el origen de coordenadas.

b ) Hallar el ángulo formado por los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

---

a )

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ -3)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ -3,\ 1)$.

El plano π puede determinarse por los vectores $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ -3)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ -3,\ 1)$ y por el origen de coordenadas:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x - 6y - 3z - 2z - 9x - y = 0\ ;;\ -8x - 7y - 5z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 8x + 7y + 5z = 0}}$$

b )

El ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ es el mismo que forman sus vectores normales.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ -3) \cdot (2,\ -3,\ 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2 - 3 - 3}{\sqrt{1 + 1 + 9} \cdot \sqrt{4 + 9 + 1}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{154}} = -0'3223 \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = 108^{\circ}\ 48'\ 14''}.$$

Teniendo en cuenta que el ángulo que forman dos planos es el menor de ellos, en este caso, debemos considerar el ángulo β, suplementario de α.

<u>El ángulo que forman los ángulos $\pi_1$ y $\pi_2$ es β = 18º 48’ 14’’.</u>

**********