PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{pmatrix}$. Sea B la matriz que resulta al realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma, después se cambian de lugar la fila segunda y la tercera y finalmente se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2. Calcular el determinante de la matriz B, usando para ello las propiedades de los determinantes.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}=6\cdot(18+4+3-2-12-9)=6\cdot 2=12$$

Teniendo en cuenta el valor del determinante de A y las siguientes propiedades de los determinantes:

--- El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices.

--- Si en una matriz se intercambian dos líneas (filas o columnas) entre sí, el valor del determinante de la matriz cambia de signo.

--- Si los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante de la matriz queda multiplicado o dividido por dicho número.

El valor del determinante de la matriz B es el siguiente:

$$|B| = [|A|]^2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 12^2 \cdot 2 = 144 \cdot 2 = \underline{\underline{288 = |B|}}$$

****

Problema A.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ Ax+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=A \end{cases}$. Estudiar la compatibilidad del sistema en función de A. Resolver para A = 5.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ A & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro A es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+2A+4-6-4-A = A-3 = 0 \Rightarrow \underline{A=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; A \neq 3 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

Para A = 3 la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente, teniendo en cuenta que las dos primeras columnas son iguales:

$$Rang\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6+6-3-9 = 12-12 = 0 \Rightarrow \underline{Rang\ \ M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; A = 3 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para A = 5 resulta el sistema $S \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 5x+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5-3} = \frac{6+10-15-3}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3+25-6-10}{2} = \frac{12}{2} = \underline{\underline{6 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{15+6-6-25}{2} = \frac{-10}{2} = \underline{\underline{-5 = z}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sean los puntos P(a, b, 0) y Q(1, 2, 3). ¿Existen valores de a y b para los cuales la recta r que pasa por los puntos P y Q contenga al punto R(0, 0, 1)? Razonar la respuesta en caso negativo. Si la respuesta es positiva calcular los valores de a y b.

Para que la recta que pasa por los puntos P y Q contenta al punto R es necesario que los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{RP}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{RQ}$ sean linealmente dependientes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{RP} = P - R = (a,\ b,\ 0) - (0,\ 0,\ 1) = (a,\ b,\ -1) \\ \\ \vec{v} = \overrightarrow{RQ} = Q - R = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 0,\ 1) = (1,\ 2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2} \\ \hline b = -1 \end{array}\right.$$

$$\underline{\underline{Para\ que\ la\ recta\ r\ contenga\ al\ punto\ R\ tienen\ que\ ser\ a = -\frac{1}{2}\ y\ b = -1}}$$

****

Problema B.- Calcular unas ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano π que contiene a los puntos A(1, 0, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 1, 1). ¿Existe algún valor de u tal que el punto P(3, 2u, u+3) pertenezca al plano? Razonar la respuesta, calculando el valor de u en caso de que sea afirmativa.

Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 1, 1) determinan los vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 1)$$

Considerando el punto A(1, 0, 0) y los vectores $\vec{u} = (-1,\ 1,\ 1)\ y\ \vec{v} = (0,\ 1,\ 1)$, la expresión del plano π en forma de unas ecuaciones paramétricas es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu + \lambda\ ;\ \forall\{\mu,\ \lambda\} \in R \\ z = \mu + \lambda \end{cases}}}$$

La expresión cartesiana o implícita del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x - 1 - z - (x-1) + y = 0\ ;;\ x - 1 - z - x + 1 + y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv y - z = 0}}$$

Para que el plano π contenga al punto P(3, 2u, u+3) es necesario que satisfaga su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y - z = 0 \\ P(3,\ 2u,\ u+3) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2u - (u+3) = 0\ ;;\ 2u - u - 3 = 0\ ;;\ u - 3 = 0\ ;;\ \underline{u = 3}$$

$$\underline{\underline{\textit{Para que el punto P pertenezca al plano } \pi \textit{ tiene que ser } u = 3}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea h una función derivable en todos los puntos, de la que se conocen los siguientes valores: h(2) = 3 y h'(2) = 1. Se considera la función $f(x)=\sqrt{[h(x)]^2+x^2+3}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x = 2.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual al valor de la derivada de la función en ese punto.

La derivada de la función f es la siguiente:

$$f'(x)=\frac{2\cdot h(x)\cdot h'(x)+2x}{2\sqrt{[h(x)]^2+x^2+3}}=\underline{\frac{h(x)\cdot h'(x)+x}{\sqrt{[h(x)]^2+x^2+3}}}$$

El valor de la derivada (pendiente) para x = 2 es el siguiente:

$$f'(2)=m=\frac{h(2)\cdot h'(2)+2}{\sqrt{[h(2)]^2+2^2+3}}=\frac{3\cdot 1+2}{\sqrt{3^2+2^2+3}}=\frac{5}{\sqrt{9+4+3}}=\frac{5}{\sqrt{16}}=\underline{\frac{5}{4}=m}$$

El punto de tangencia se obtiene para x = 2:

$$f(2)=\sqrt{[h(2)]^2+2^2+3}=\sqrt{3^2+4+3}=\sqrt{16}=4\ \Rightarrow\ \underline{P(2,\ 4)}$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la tangente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, la tangente pedida es:

$$y-4=\frac{5}{4}(x-2)\ ;;\ 4y-16=5x-10\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Tangente: t\equiv 5x-4y+6=0}}$$

****

Problema C.- Sea la función $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$. Encontrar las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos. Dibuja un esquema de la gráfica de h.

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2} \\ \underline{x_2=-2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-2,\ 2\}}}$$

La función pasa por el origen de coordenada: f(0) = 0.

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o a menos infinito: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1$.

<u>La recta y = 1 es una asíntota horizontal de la función.</u>

Las asíntotas verticales son los valores reales que anulan el denominador de la función: $x^2-4=0$.

<u>Las recta x = -2 y x = 2 son asíntotas verticales de la función.</u>

Para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que el numerador de la función tenga un grado mayor en una unidad al grado del denominador, por lo cual, en el caso que nos ocupa, <u>no existen asíntotas oblicuas.</u>

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=\underline{\frac{-8x}{(x^2-4)^2}=f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo, solamente estudiaremos el numerador.

$$f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow\begin{cases} \underline{\underline{f'(x)>0 \ \Rightarrow\ \underline{x<0} \ \Rightarrow\ Creciente\Rightarrow(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 0)}} \\ \underline{\underline{f'(x)<0 \ \Rightarrow\ x>0 \ \Rightarrow\ Decreciente\Rightarrow(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)}} \end{cases}$$

Los máximos y mínimos posible son:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-8x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow -8x=0 \;\; ;; \;\; \underline{x=0}$$

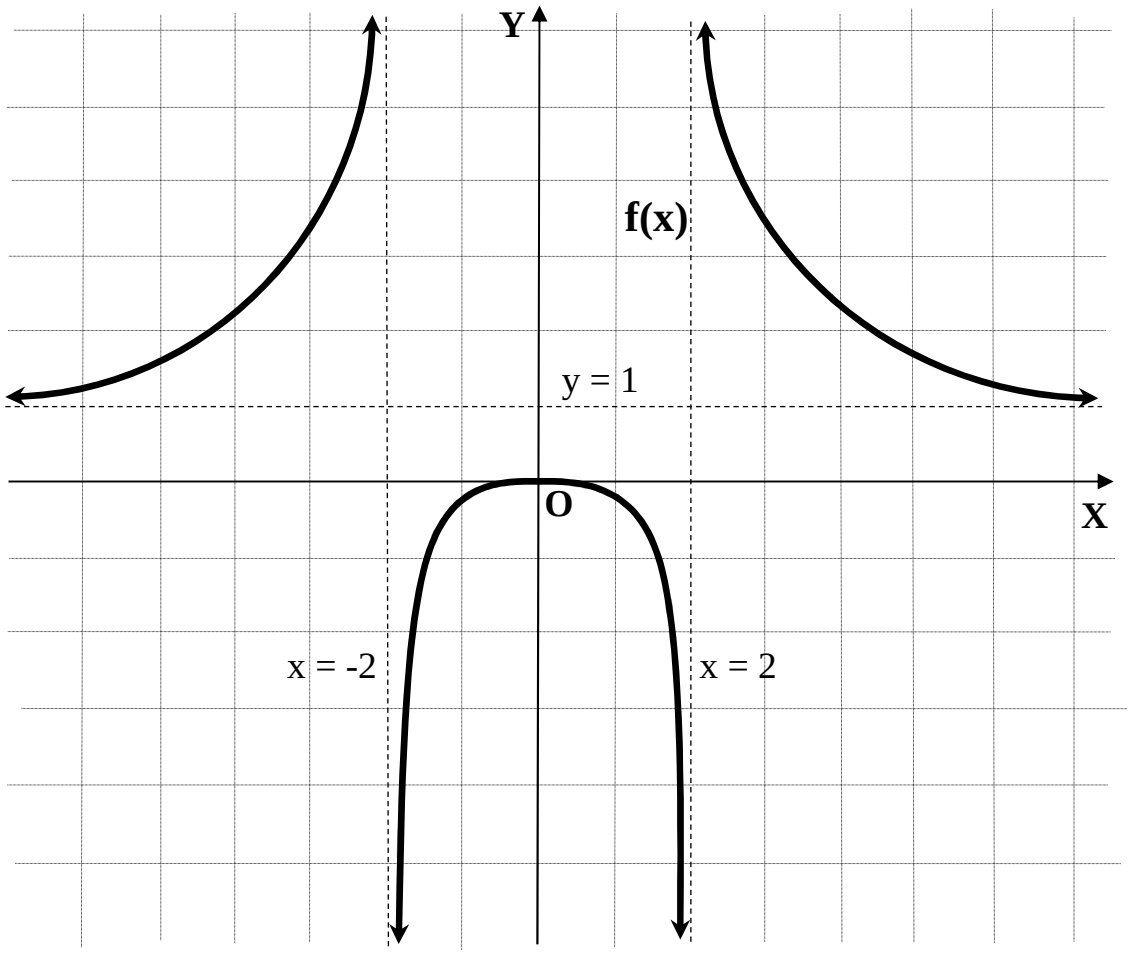
$$f''(x)=\frac{-8\cdot\left(x^2-4\right)^2+8x\cdot 2\cdot\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{-8\cdot\left(x^2-4\right)+32x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{-8x^2+32+32x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=$$

$$=\frac{24x^2+32}{\left(x^2-4\right)^3}=\underline{\frac{8\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{8(0+4)}{(0-4)^3}=\frac{32}{-64}=-\frac{1}{2}<0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo \Rightarrow O(0,\;0)}}$$

No existe ningún valor real de x que anule la segunda derivada, por lo cual no tiene puntos de inflexión.

Teniendo en cuenta que se trata de una función par, f(x) = f(-x), la representación aproximada de la función es la siguiente:



****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular el valor de la integral indefinida $I=\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)\cdot dx$, en función de los parámetros a, b y c.

$$I=\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c} x^2+bx+c=u\rightarrow du=(2x+b)\cdot dx \\ e^{ax}\cdot dx=dv\rightarrow v=\dfrac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(x^2+bx+c\right)\cdot\frac{1}{a}e^{ax}-\int\frac{1}{a}e^{ax}(2x+b)\cdot dx=\frac{1}{a}\left(x^2+bx+c\right)e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}(2x+b)\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\left(x^2+bx+c\right)e^{ax}-\int e^{ax}(2x+b)\cdot dx\right]=\underline{\frac{1}{a}\left[\left(x^2+bx+c\right)e^{ax}-I_1\right]=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int e^{ax}(2x+b)\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c} 2x+b=u\rightarrow du=2\,dx \\ e^{ax}\cdot dx=dv\rightarrow v=\dfrac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; I_1=(2x+b)\frac{1}{a}e^{ax}-\int\frac{1}{a}e^{ax}\cdot 2dx=$$

$$=\frac{1}{a}(2x+b)e^{ax}-\frac{2}{a}\int e^{ax}\cdot dx=\frac{1}{a}(2x+b)e^{ax}-\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{ax}+C=\underline{\frac{e^{ax}}{a^2}(2ax+ab-2)+C=I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1, queda:

$$I=\frac{1}{a}\left[\left(x^2+bx+c\right)e^{ax}-\frac{e^{ax}}{a^2}(2ax+ab-2)\right]+C=\frac{e^{ax}}{a^3}\left[a^2\left(x^2+bx+c\right)-(2ax+ab-2)\right]+C=$$

$$=\underline{\underline{\frac{e^{ax}}{a^3}\left[a^2x^2+a(ab-2)x+\left(a^2c-ab+2\right)\right]+C=I}}$$

****

Problema D.- Sea P_1 la parábola de ecuación $y = x(4-x)$, y sea P_2 la parábola de ecuación $y = (x-4)(x-2)$. Dibujar un esquema gráfico del recinto finito del plano limitado por dichas parábolas. Hallar el área del recinto mediante cálculo integral.

La parábola P_1 corta al eje OX en los puntos O(0, 0) y A(4, 0) y su mínimo es el punto siguiente:

$$y = x(4-x) = 4x - x^2 \;\; ;; \;\; y' = 4 - 2x = 2(2-x) = 0 \;\; ;; \;\; x = 2$$

$$y_{(2)} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Vértice}: \; V_1(2,\; 4)}$$

La parábola P_2 corta al eje OX en los puntos A(4, 0) y B(2, 0) y su máximo es el punto siguiente:

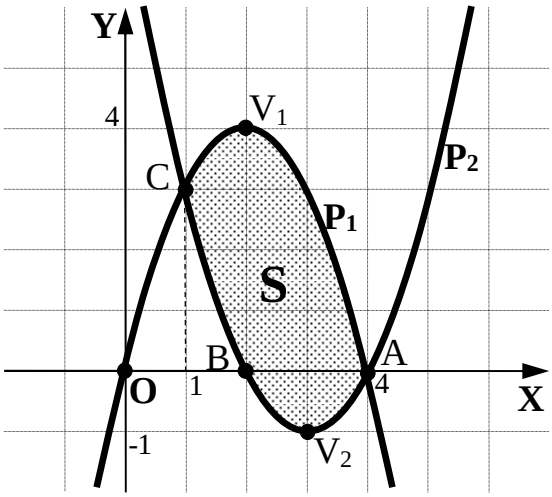
$$y = (x-4)(x-2) = x^2 - 6x + 8 \;\; ;; \;\; y' = 2x - 6 = 2(x-3) = 0 \;\; ;; \;\; x = 3$$

$$y_{(3)} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Vértice}: \; V_2(3,\; -1)}$$

Los puntos de corte de ambas parábolas se obtienen igualando sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \Rightarrow y = 4x - x^2 \\ \\ P_2 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 4x - x^2 = x^2 - 6x + 8 \;\; ;; \;\; 2x^2 - 10x + 8 = 0 \;\; ;; \;\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\; ;;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 4 \;\rightarrow\; \underline{A(4,\; 0)} \\ \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; \underline{C(1,\; 3)} \end{cases}$$



Por ser las ordenadas de la parábola P_1 mayores o iguales que las correspondientes de la parábola P_2, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^4 \left[(4x - x^2) - (x^2 - 6x + 8) \right] \cdot dx =$$

$$= \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8) \cdot dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 5x^2 - 8x \right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{-128}{3} + 80 - 32 \right) - \left(\frac{-2}{3} + 5 - 8 \right) = -\frac{126}{3} + 51 =$$

$$= 51 - 42 = \underline{\underline{9 \; u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Nerea eligió 3 dígitos distintos y escribió todos los números de tres cifras que se forman con ellos, sin repeticiones. Luego sumó todos los números que obtuvo. Hallar la suma de Nerea, sabiendo que la suma de los dígitos originales es igual a 14.

Sean a, b y c los dígitos elegidos por Nerea. El número de números que se puede formar con ellos, sin repetirse ninguno de ellos, es: $N = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Cada uno de los dígitos ocupa cada uno de los tres lugares: $\frac{6}{3} = 2$ veces.

Teniendo en cuenta que el valor de los dígitos, según el lugar que ocupan, tienen el valor de unidades, decenas y centenas, el valor de la suma pedida es el siguiente:

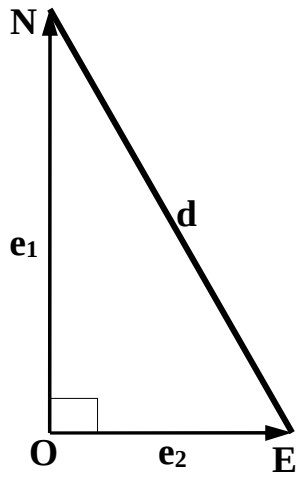
$$S = 2 \cdot a + 20 \cdot a + 200 \cdot a + 2 \cdot b + 20 \cdot b + 200 \cdot b + 2 \cdot c + 20 \cdot c + 200 \cdot c =$$

$$= 2a \cdot (1 + 10 + 100) + 2b \cdot 111 + 2c \cdot 111 = 2 \cdot 111 \cdot (a + b + c) = 222 \cdot 14 = \underline{\underline{3108 = S}}$$

Nótese que la suma es invariante, dependiendo de los dígitos elegidos por Nerea.

****

Problema E.- Dos lanchas parten simultáneamente desde un mismo lugar, una en dirección norte a 120 kilómetros por hora y la otra en dirección este a 64 kilómetros por hora. ¿Al cabo de siete minutos y medio que distancia separa a ambas lanchas?



Después de siete minutos y medio el espacio recorrido por cada una de las lanchas es el siguiente:

$$e_1 = v_1 \cdot t = \frac{120\ km}{1\ hora} \cdot 7'5\ \text{minutos} = \frac{120.000\ m}{3.600\ s} \cdot 7'5 \cdot 60\ s =$$

$$= \frac{1200\ m}{36} \cdot 75 \cdot 6 = \frac{200\ m}{6} \cdot 75 \cdot 6 = 200 \cdot 75 = \underline{15.000\ metros = e_1}$$

$$e_2 = v_2 \cdot t = \frac{64\ km}{1\ hora} \cdot 7'5\ \text{minutos} = \frac{64.000\ m}{3.600\ s} \cdot 7'5 \cdot 60\ s =$$

$$= \frac{640\ m}{36} \cdot 75 \cdot 6 = \frac{640\ m}{6} \cdot 75 = 320 \cdot 25 = \underline{8.000\ metros = e_2}$$

La distancia d entre ambos en ese instante es la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$$d = \sqrt{15.000^2 + 8000^2} = \sqrt{225 \cdot 10^6 + 64 \cdot 10^6} = \sqrt{225 + 64} \cdot 10^3 = \sqrt{289} \cdot 10^3 =$$

$$= 17 \cdot 10^3 = 17.000\ metros = \underline{17\ km = d}$$

<u>A los siete minutos y medio las barcas están a 17 km de distancia.</u>

****