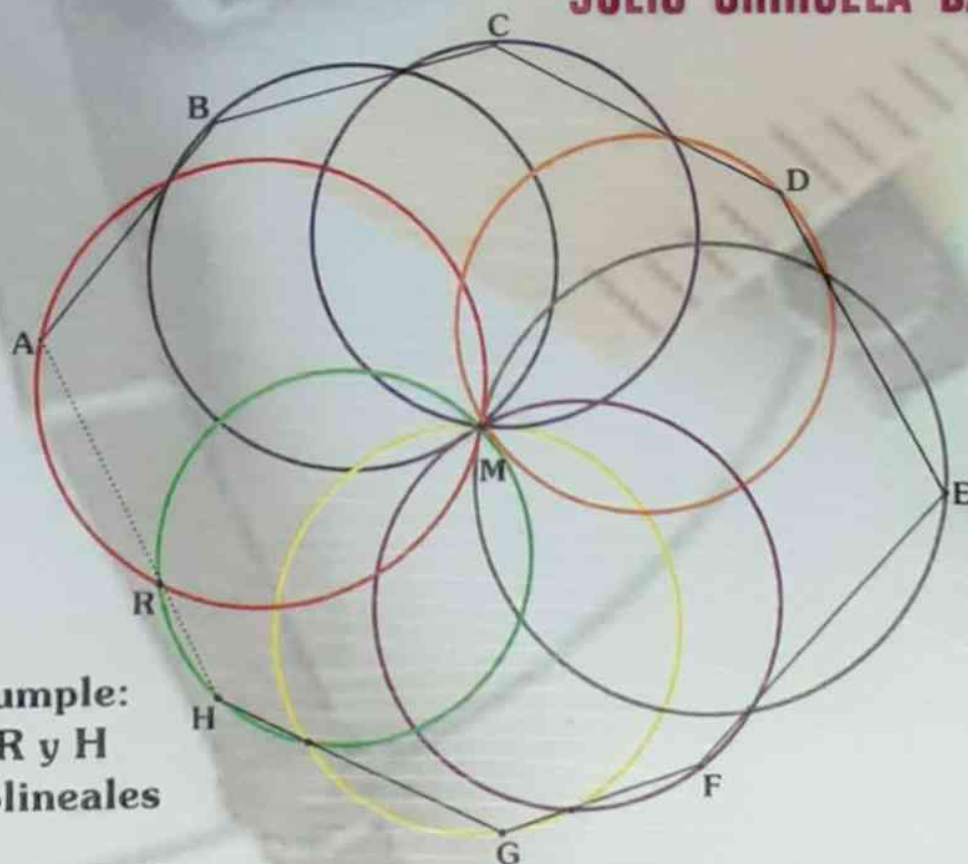


6 GEOMETRÍA CIRCUNFERENCIA

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Se cumple:
A , R y H
son colineales

GEOMETRÍA

CIRCUNFERENCIA

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos

300 Problemas Propuestos

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



♦ CIRCUNFERENCIA	7
- Definición	
- Elementos asociados a la circunferencia	
- <i>Cuerda</i>	
- <i>Arco</i>	
- <i>Flecha o sagita</i>	
- <i>Posiciones en un plano entre una recta y una circunferencia</i>	
- Medida angular de la circunferencia - Medida de arcos	
♦ ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA	15
- Ángulo central	
- Ángulo inscrito	
- Ángulo semi inscrito	
- Ángulo interior	
- Ángulo exterior	
- Ángulo exinscrito	
♦ TEOREMAS EN LA CIRCUNFERENCIA	24
♦ POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO	29
- <i>Circunferencias exteriores</i>	
- <i>Circunferencias tangentes exteriores</i>	
- <i>Circunferencias secantes</i>	
- <i>Circunferencias tangentes interiores</i>	
- <i>Circunferencias concéntricas</i>	
- Ángulo entre dos circunferencias	
- Circunferencias ortogonales	
- Propiedades sobre posiciones relativas de dos circunferencias	

Indice

♦ POLÍGONO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA	49
- Polígono inscrito	
- Polígono circunscrito	
- Polígono inscriptible	
♦ ESTUDIO DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA	51
- Propiedades	
♦ CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA	55
- Algunos cuadriláteros inscriptibles	
♦ TEOREMA DE STEINER - LEHMUS	75
♦ ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS	80
- Ángulo entre curvas	
♦ TEOREMAS DE PAPILÓN	81
♦ APLICACIONES DE LOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES	85
- Teorema	
♦ RECTA DE SIMSON - WALLAGE	88
- Recta de Simson para el cuadrilátero	
♦ ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS	93
- Tipo Anual	
- Tipo Ceper-UNI	
- Tipo Semestral	
- Tipo Semestral Intensivo	
- Tipo Repaso	
♦ SOLUCIONARIO	149
♦ ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	285
♦ CLAVES DE RESPUESTAS	343

CIRCUNFERENCIA

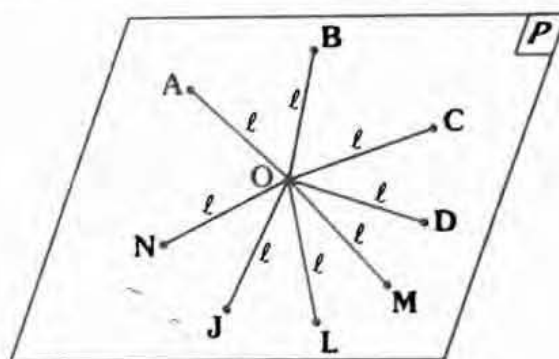
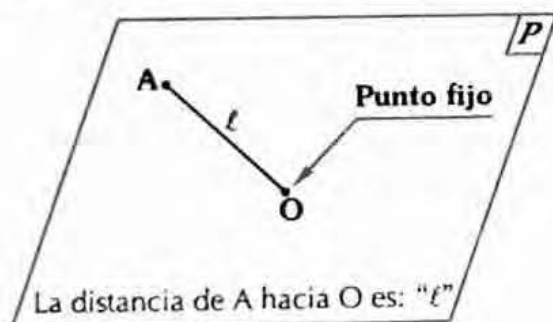
GEOMETRÍA

El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.

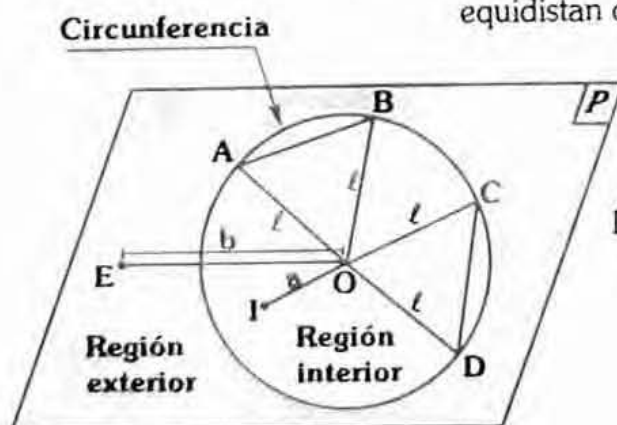
Jorge Luis Borges

DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano, que tienen igual distancia (equidistan) respecto de un punto fijo en dicho plano. La distancia constante se llama **radio** y el punto fijo se denomina **centro**.



Los puntos A, B, C, D, M, L, J y N del plano P, equidistan de O. (O en el plano P)



Del gráfico, tenemos:

$$a < l \text{ y } b < l$$

La unión de todos los puntos del plano que tienen la misma distancia " ℓ " hacia el punto "O" se llama circunferencia.

O: centro y ℓ : radio

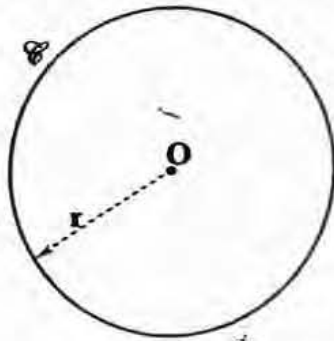
Notemos que los triángulos AOB y COD son isósceles.

Observación

- La unión de todos los puntos del plano P, cuya distancia es menor que " ℓ " definen la región interior ($OI < \ell$).
- La unión de todos los puntos del plano P, cuya distancia es mayor que " ℓ " definen la región exterior ($OE > \ell$).
- Lo más "simple" que podemos aprovechar es la definición. Las "distancias iguales", es decir los triángulos isósceles como: $\triangle AOB$, $\triangle COD$,...

Notación

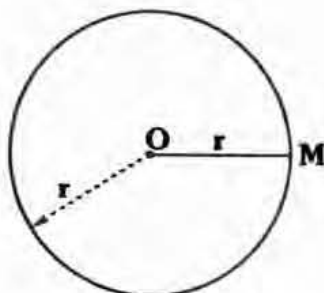
Aunque no hay una notación general para nombrar circunferencia usualmente remarcaremos el centro y el radio lo representamos con un flecha.



En el gráfico, se muestra la circunferencia $\mathcal{C}$, de centro O y radio r.

Observación

- Con respecto al radio, vamos a considerar dos acepciones: como longitud o como segmento comprendido entre el centro y un punto de la circunferencia.

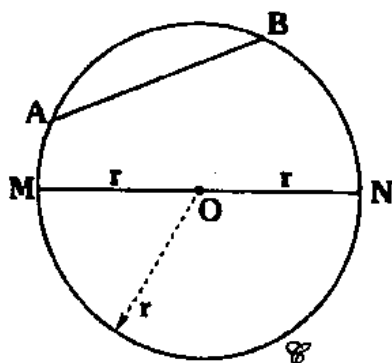


Radio: " $\overline{OM}$ " ó " r "

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

1 CUERDA

Es aquel segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

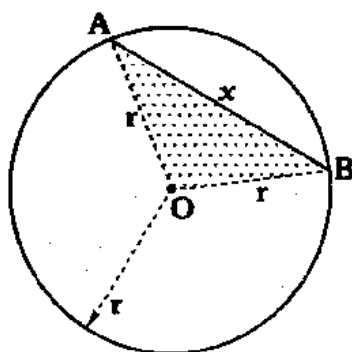


- $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$ entonces $\overline{AB}$ es cuerda.
- $\overline{MN}$ es también cuerda, se le llama "diámetro" o "cuerda máxima".
- Se cumple:

$$MN = 2r$$

Observación

Si una cuerda no pasa por el centro, entonces su longitud es menor que dos veces el radio.



Prueba

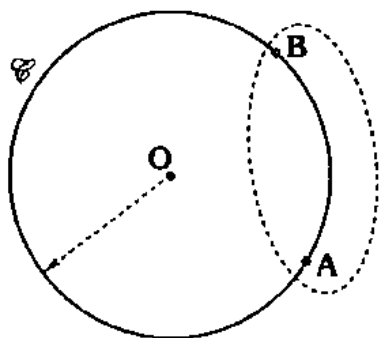
En $\triangle AOB$, por existencia :

$$x < r + r$$

$$\Rightarrow AB < 2r$$

2 ARCO

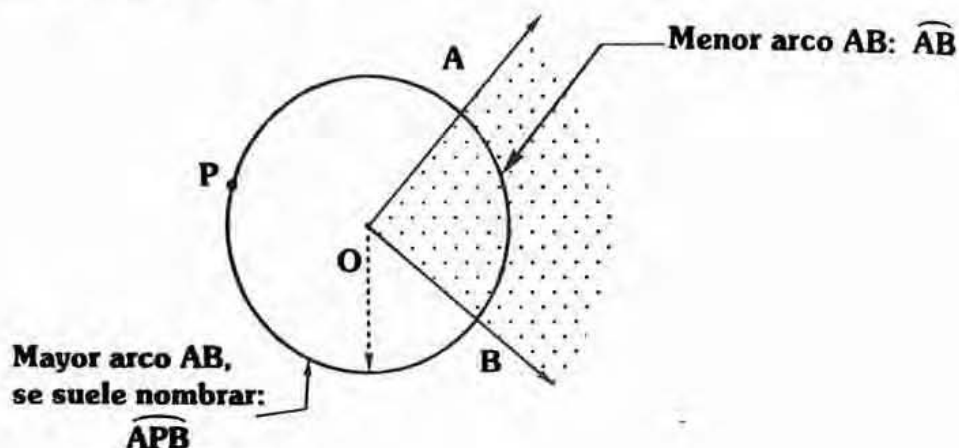
Es parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.



- En el gráfico, A y B están en $\mathcal{C}$
 $\Rightarrow \widehat{AB}$, se denomina arco AB

Observaciones

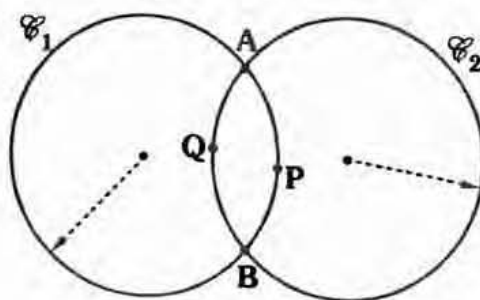
- Si A y B no son colineales con el centro O de la circunferencia $\mathcal{C}$, entonces se llama **arco menor** de la misma, a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el interior del ángulo AOB. Se llama **arco mayor** de la circunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo AOB.



- Cuando está perfectamente aclarado si es el arco mayor o el menor cuyos extremos son A y B, se indica con los símbolos más sencillos: $\widehat{AB}$ o $\widehat{BA}$.



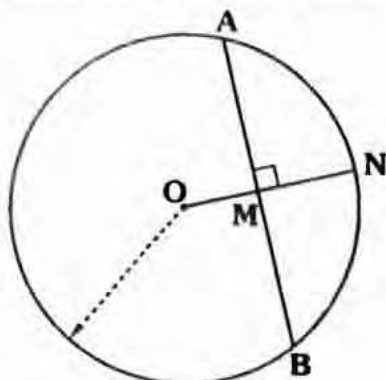
- Aquí no está claro quien es el arco: AB



Por lo que se hace necesario ubicar un punto más: $\widehat{APB}$ está en $\mathcal{C}_1$
 $\widehat{AQB}$ está en $\mathcal{C}_2$

3 FLECHA O SAGITA

Al trazar una cuerda perpendicular al radio en una circunferencia se determina en el radio un segmento entre el arco menor y la cuerda, denominando flecha o sagita.



• $\overline{AB}$ no es diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{ON}$

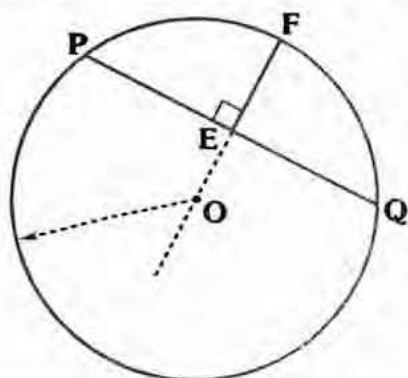
• $\overline{MN}$: Flecha asociada a $\overline{AB}$

Nota:

Se cumple: $AM=MB$

Observación

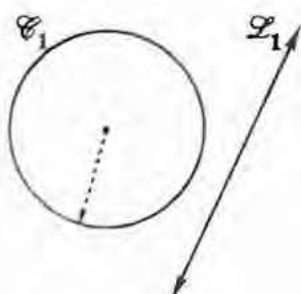
Si $\overline{EF}$ es flecha respecto de $\overline{PQ} \Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{EF}$



Al prolongarse $\overline{FE}$ llegará al centro O.

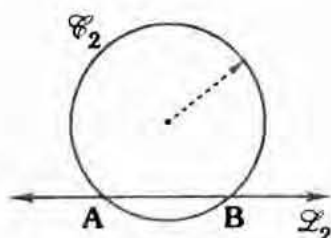
4 POSICIONES RELATIVAS EN UN PLANO ENTRE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Recta exterior



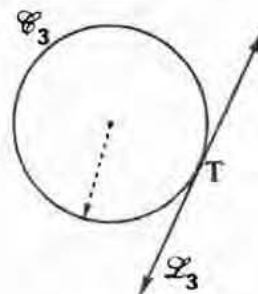
$\Rightarrow \overline{L_1} \cap C_1 = \emptyset$
 $\Rightarrow \overline{L_1}$ es una recta exterior respecto de C_1

Recta secante



$\Rightarrow \overline{L_2} \cap C_2 = \{A, B\}$
 $(\overline{AB}$: cuerda de $C_2)$
 $\Rightarrow \overline{L_2}$ es recta secante respecto de C_2

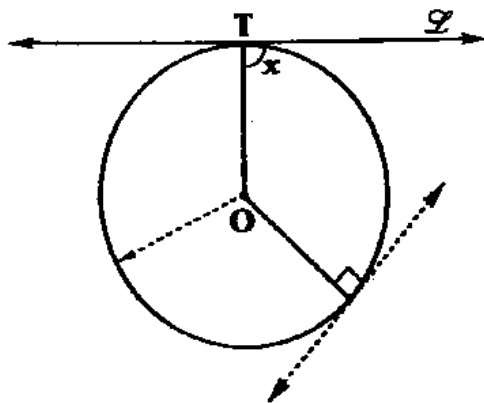
Recta tangente



$\Rightarrow \overline{L_3} \cap C_3 = \{T\}$
 $(T$: Punto de tangencia)
 $\Rightarrow \overline{L_3}$ es recta tangente

TEOREMA

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



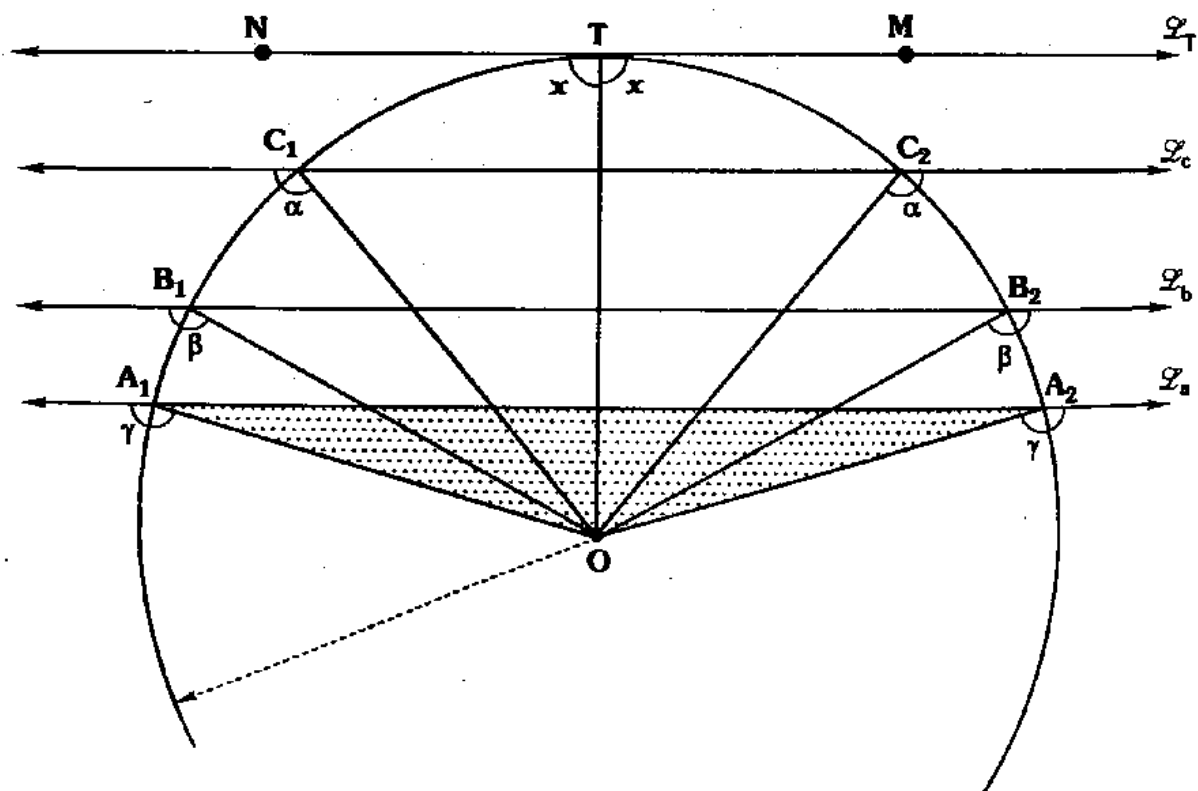
T: es punto de tangencia

Se cumple:

$$OT \perp l \text{ o } x = 90^\circ$$



Analicemos primero el comportamiento de la recta secante.



Sean $\overleftrightarrow{l_a}$, $\overleftrightarrow{l_b}$ y $\overleftrightarrow{l_c}$ rectas secantes entonces los triángulos A_1OA_2 , B_1OB_2 y C_1OC_2 son isósceles entonces sus respectivos ángulos externos son de igual medida.

- En el caso límite de la secante, es como que en T hubiesen dos puntos, entonces:

$$m\angle OTM = m\angle OTN = x$$

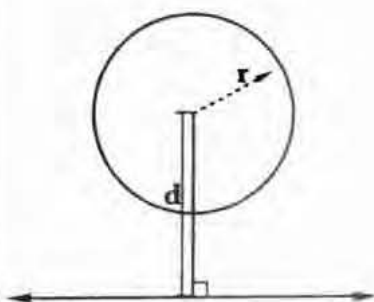
$$\Rightarrow x + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Observaciones

- Se va a reconocer la posición de una recta y una circunferencia en el plano, con la distancia del centro de la circunferencia a dicha recta:

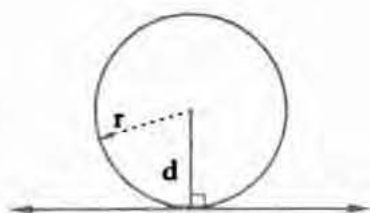
Recta exterior



Se cumple:

$$d > r$$

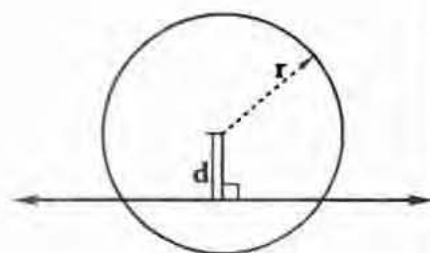
Recta tangente



Se cumple:

$$d = r$$

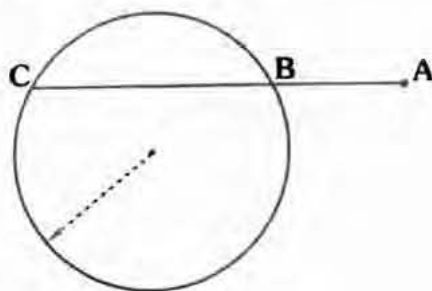
Recta secante



Se cumple:

$$d < r$$

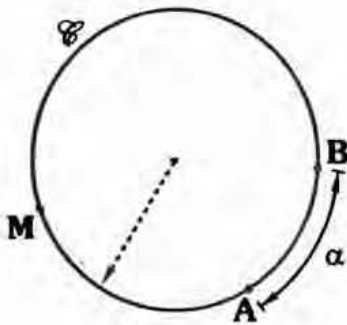
- Cuando se traza una recta secante desde un punto exterior se nombrará primero dicho punto, luego los puntos de intersección.



Recta secante: ABC

MEDIDA ANGULAR DE LA CIRCUNFERENCIA - MEDIDA DE ARCOS

En geometría se usa el sistema sexagesimal, es decir se divide a la circunferencia en 360 partes iguales (congruentes) y cada una de dichas partes representará un grado sexagesimal.



- Medida angular de ℓ : 360°
- $m\widehat{AB}$: medida del arco AB, $m\widehat{AB} = \alpha$
- $m\widehat{AMB} = 360^\circ - \alpha$

Nota Histórica

En la antigua Mesopotamia, región que se situó en Asia, entre el río Tigris y el Eufrates, floreció una civilización cuya antigüedad se remonta a 57 siglos aproximadamente: **Los Babilonios**.

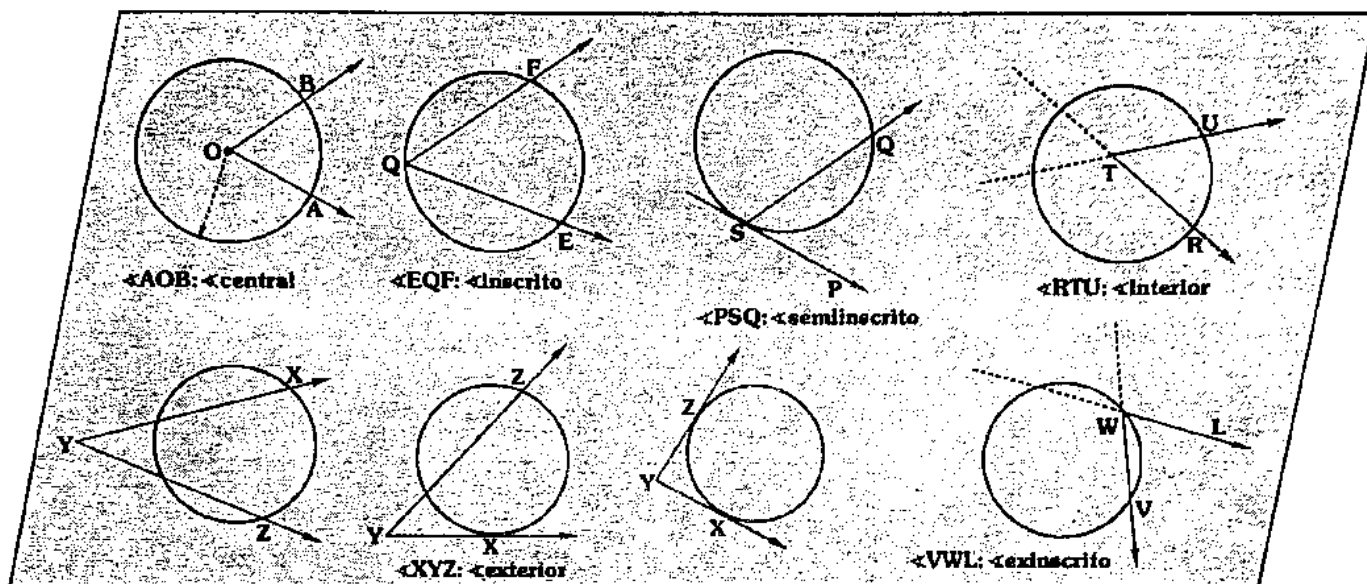
Los Babilonios fueron, hace más de 6000 años, los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, y esto condujo a estudiar la relación entre ella y su diámetro.

Los sabios de esta civilización cultivaron la astronomía y, conociendo que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo lo que se llama actualmente el grado sexagesimal.

(Patricia Jimenez Gallego – UAZ)

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

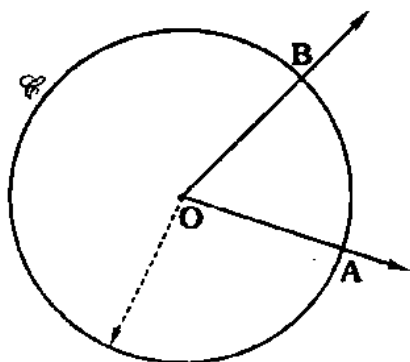
Veamos las diferentes posiciones que tienen un ángulo y una circunferencia en el mismo plano.



Ahora estudiemos cada uno de ellos:

■ ÁNGULO CENTRAL

Es el ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia y sus lados contienen a dos radios.

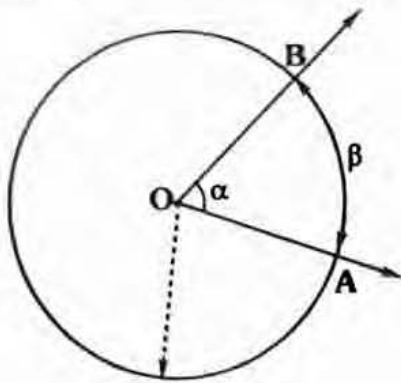


Respecto de $\mathcal{C}$

$\angle AOB$: ángulo central

Notemos que al trazar el ángulo AOB, se determinan dos arcos, al menor se le denominará arco correspondiente al ángulo AOB.

Hay una correspondencia entre la medida del ángulo AOB y de su arco correspondiente, así tenemos:



• $m\widehat{AB}$: medida del arco

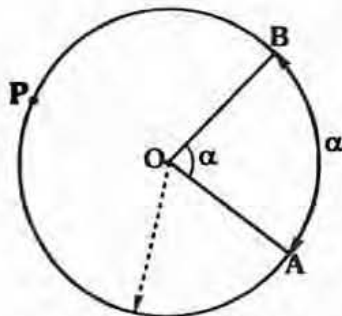
Se cumple:

$$m\angle AOB = m\widehat{AB}$$

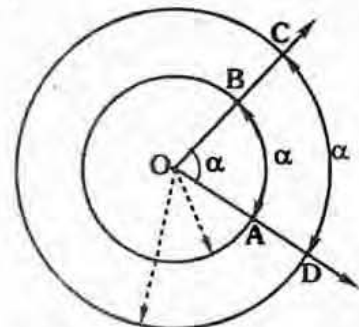
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

Observaciones

También:



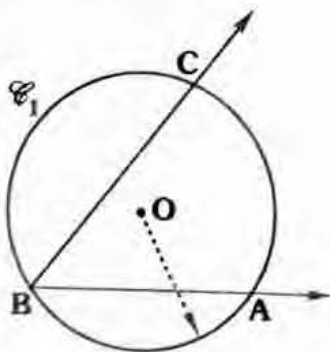
Se cumple: $m\widehat{APB} = 360^\circ - \alpha$



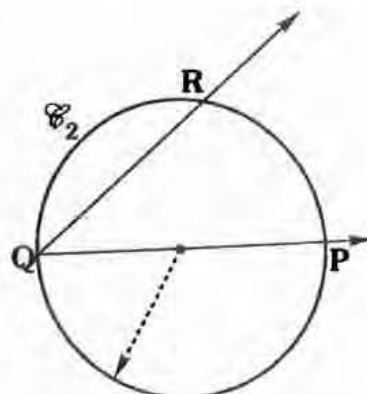
Se cumple: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

ÁNGULO INSCRITO

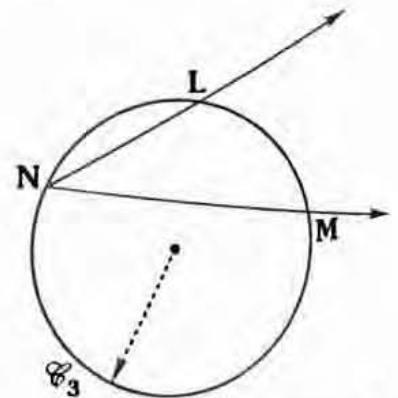
Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados contienen a dos cuerdas. Así tenemos:



- * $\angle ABC$: $\angle$ inscrito en $\mathcal{C}_1$
- * $\widehat{AC}$: arco correspondiente a $\angle ABC$.



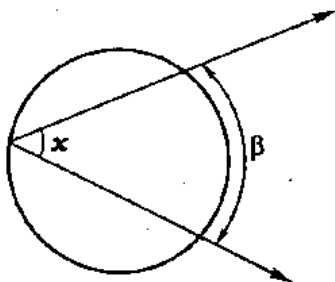
- * $\angle PQR$: $\angle$ inscrito en $\mathcal{C}_2$
- * $\widehat{PR}$: arco correspondiente a $\angle PQR$.



- * $\angle MNL$: $\angle$ inscrito en $\mathcal{C}_3$
- * $\widehat{ML}$: arco correspondiente a $\angle MNL$.

TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

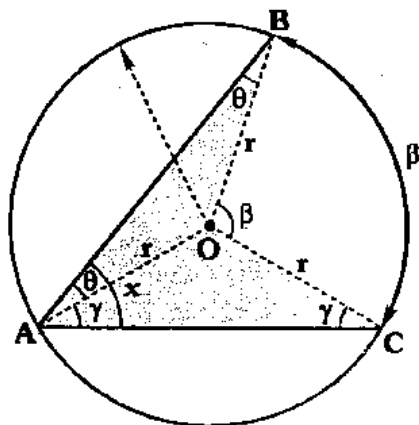


Se cumple:

$$x = \frac{\beta}{2} \quad \text{o} \quad \beta = 2x$$

Prueba

Para los tres casos: Sea "O" el centro

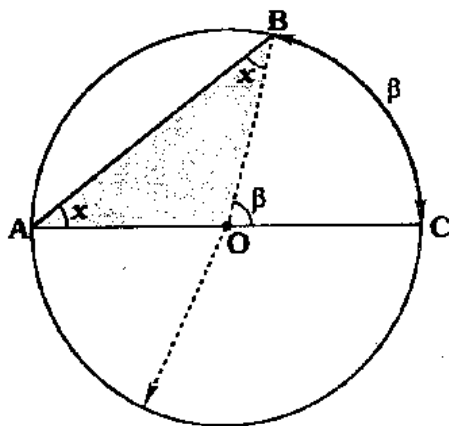


- Por $\angle$ central: $m\angle BOC = \beta$
- $\triangle AOC$ y $\triangle AOB$: isósceles
- $x = \theta + \gamma$

- En $\angle ABOC$: $\theta + x + \gamma = \beta$

$$2x = \beta$$

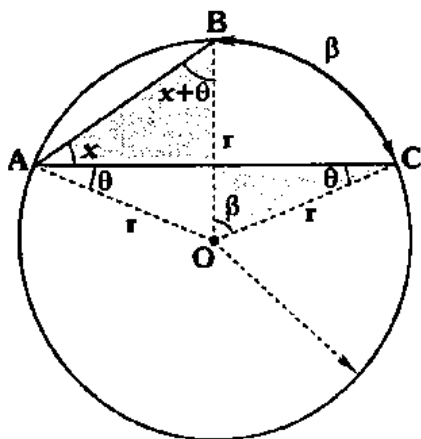
$$\therefore x = \frac{\beta}{2}$$



- Por $\angle$ central: $m\angle BOC = \beta$
- $\triangle AOB$: isósceles

$$\Rightarrow x + x = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\beta}{2}$$



- Por $\angle$ central: $m\angle BOC = \beta$
- $\triangle AOC$ y $\triangle AOB$: isósceles
- En la parte sombreada ($\angle$):

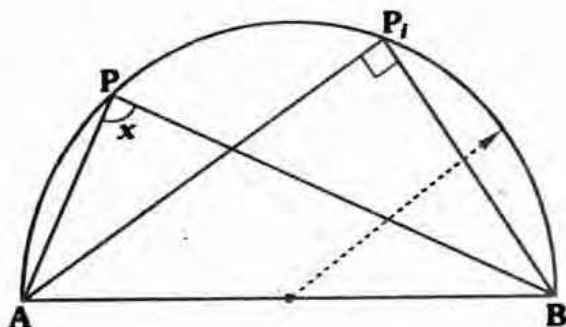
$$x + x + \theta = \beta + \theta$$

$$\rightarrow 2x = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\beta}{2}$$

Observaciones

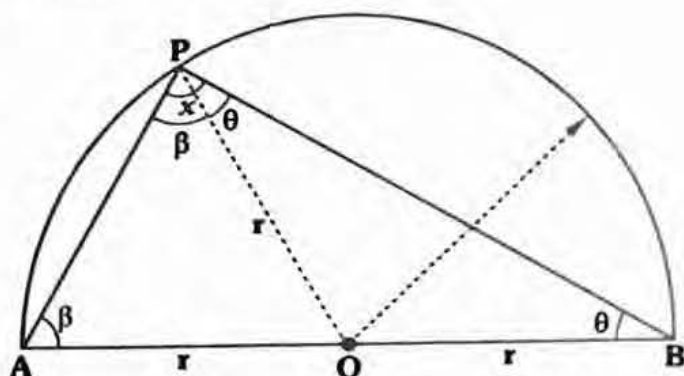
SEMICIRCUNFERENCIA



- Es el arco que mide 180° .
- Se le asocia el diámetro.
- Se cumple que cualquier ángulo inscrito mide 90° .
- En el gráfico:
 $m\widehat{AB} = 180^\circ$ entonces $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia.

Se cumple: $x = 90^\circ$

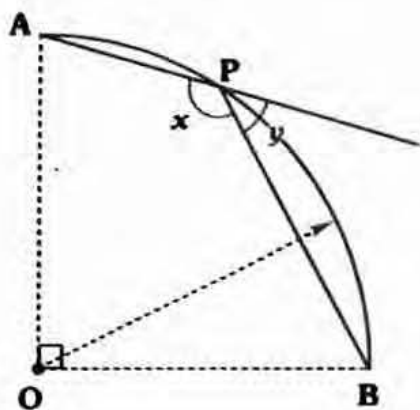
Prueba



- $\triangle POB$ y $\triangle POA$: isósceles
 $\Rightarrow x = \beta + \theta$

- $\triangle APB$: $2\beta + 2\theta = 180^\circ$
 $2x = 180^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ$

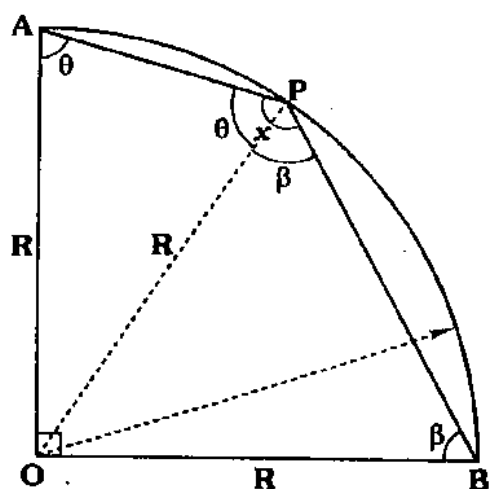
CUADRANTE



- Es aquel arco que mide 90° .
- Se le asocia dos radios perpendiculares.
- Se cumple que el ángulo inscrito mide 135° .
- En el gráfico:

$m\widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \overline{AO} \perp \overline{OB}$, luego $\widehat{AB}$ es un cuadrante

Se cumple: $x = 135^\circ$ o $y = 45^\circ$

Prueba

• $\triangle AOP$ y $\triangle POB$: isósceles

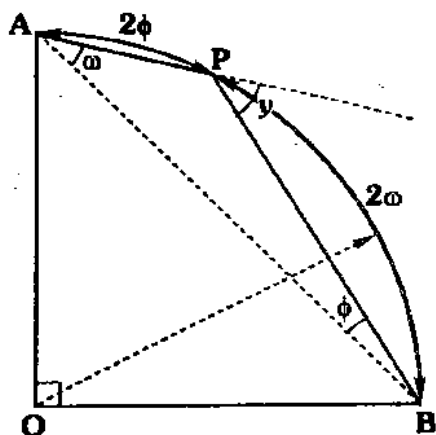
• $x = \theta + \beta$

• En $\triangle AOBP$:

$$\Rightarrow \underbrace{2\theta + 2\beta + 90^\circ}_{2x + 90^\circ} = 360^\circ$$

$$2x + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Otra forma

• $\triangle APB$: $y = \omega + \phi$

• Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AP} = 2\phi \quad \text{y} \quad m\widehat{PB} = 2\omega$$

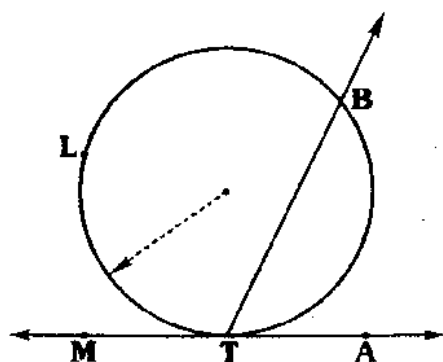
$$\Rightarrow 2\phi + 2\omega = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \phi + \omega = 45^\circ$$

$$\therefore y = 45^\circ$$

■ ÁNGULO SEMI INSCRITO

Es cada uno de los ángulos que se determinan con la recta tangente y el rayo secante a la circunferencia en el punto de tangencia.



• En el gráfico, T es punto de tangencia.

• Son ángulos semiinscritos:

$$\angle ATB \quad \text{y} \quad \angle MTB$$

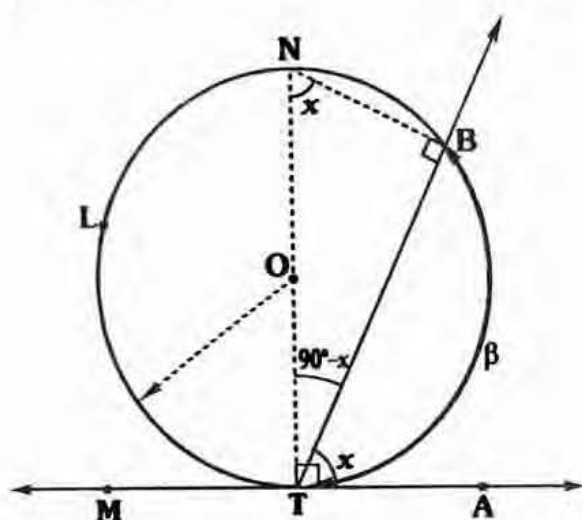
• $\widehat{TB}$: arco correspondiente al $\angle ATB$

• $\widehat{TLB}$: arco correspondiente al $\angle MTB$

TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

Prueba

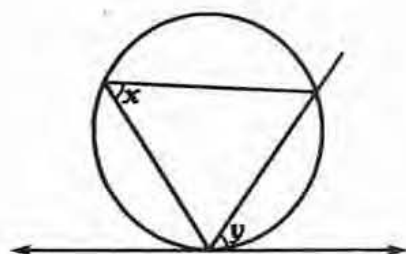


- Sea $x = m\angle ATB$ y $m\widehat{TB} = \beta$
- Por propiedad $\overline{OT} \perp \overline{AN}$
- Como $\overline{TN}$ es diámetro entonces $m\angle TNB = x$
 $\Rightarrow m\angle NTB = 90^\circ - x \Rightarrow m\angle TNB = x$
- Por ángulo inscrito: $x = \frac{\beta}{2}$
- Se concluye:

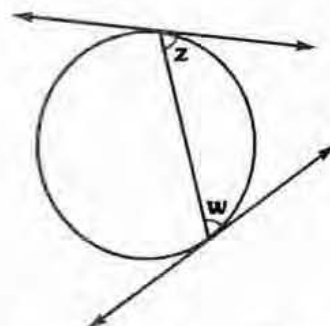
$$m\angle ATB = \frac{m\widehat{TB}}{2} \quad \text{y} \quad m\angle NTB = \frac{m\widehat{TB}}{2}$$

Observación

Como consecuencia de lo anterior se deduce:



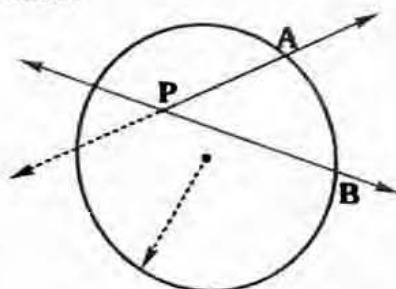
Se cumple: $x = y$



Se cumple: $w = z$

ÁNGULO INTERIOR

Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior y sus lados están sobre rectas secantes a la circunferencia.

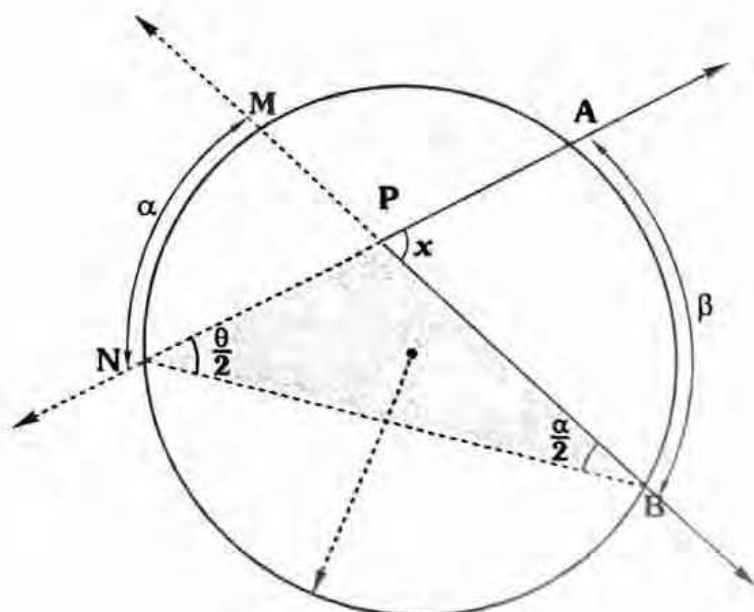


- P es un punto interior.
- $\angle APB$: ángulo interior.
- $\widehat{AB}$: arco correspondiente por el $\angle APB$.

TEOREMA

La medida del ángulo interior es la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes a dicho ángulo y de su opuesto por el vértice.

Prueba 



- Por ángulo inscrito:

$$m\angle ANB = \frac{\theta}{2} \quad y$$

$$m\angle MNB = \frac{\alpha}{2}$$

- En $\triangle NPB$, por ángulo exterior:

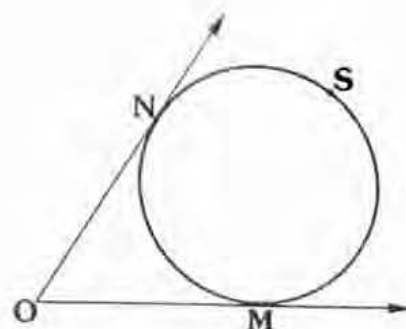
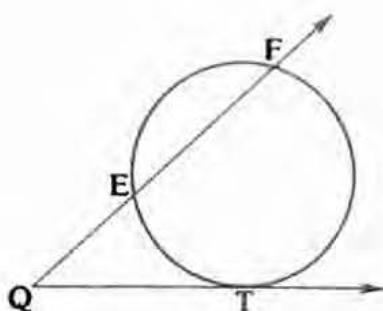
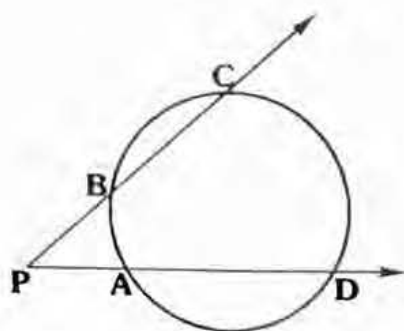
$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

■ ÁNGULO EXTERIOR

Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto exterior y sus lados son dos rayos: ambos secantes; uno secante y uno tangente; o ambos tangentes.

Así tenemos:



- P: Punto exterior
- $\angle CPD$: $\angle$ exterior
- $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ arcos correspondientes al $\angle CPD$.

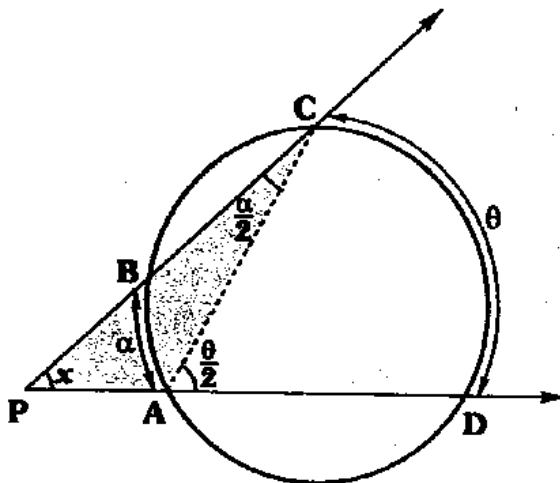
- Q: Punto exterior
- T: Punto de tangencia
- $\widehat{ET}$ y $\widehat{FT}$ arcos correspondientes al $\angle CPD$.

- O: es punto exterior
- M y N: Punto de tangencia
- $\widehat{MN}$ y $\widehat{MSN}$ arcos correspondientes al $\angle MON$.

TEOREMA

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos correspondientes.

Prueba



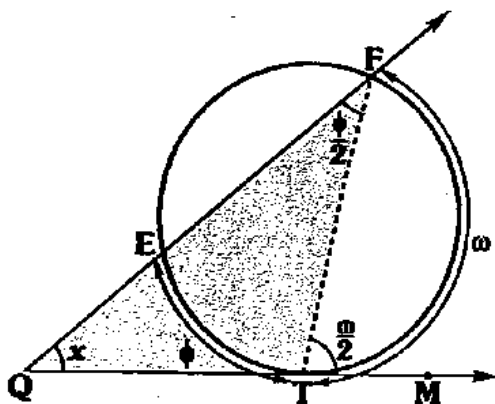
• Sea: $m\widehat{CD} = \theta$ y $m\widehat{AB} = \alpha$

• Por $\angle$ inscrito:

$$m\angle ACB = \frac{\alpha}{2} \text{ y } m\angle CAD = \frac{\theta}{2}$$

• En el $\triangle APC$: $x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore x = \frac{\theta - \alpha}{2}$$



• Por $\angle$ inscrito:

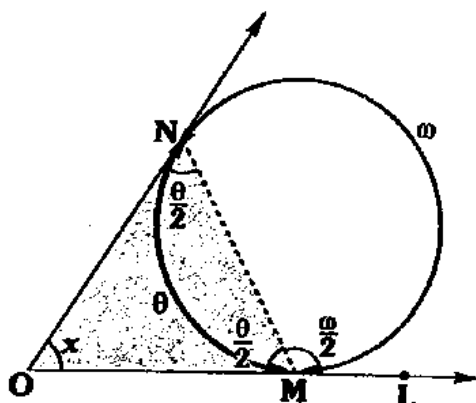
$$m\angle QFT = \frac{\phi}{2}$$

• Por $\angle$ semiinscrito:

$$m\angle MTF = \frac{\omega}{2}$$

• En el $\triangle QTC$: $x + \frac{\phi}{2} = \frac{\omega}{2}$

$$\therefore x = \frac{\omega - \phi}{2}$$

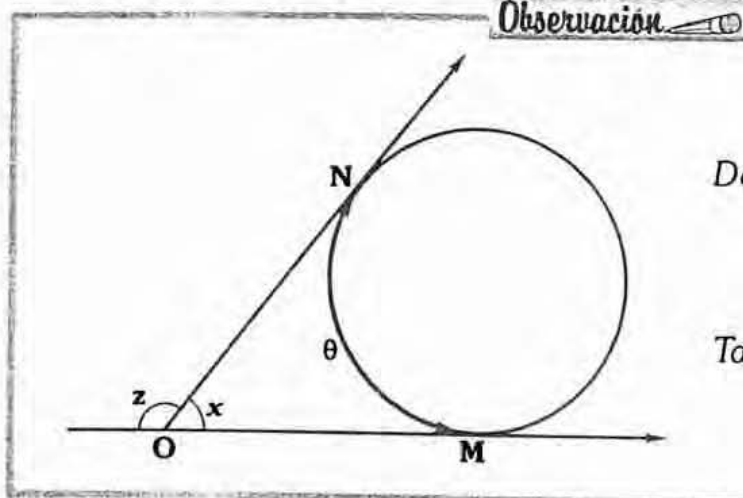


• Por $\angle$ semiinscrito:

$$m\angle NML = \frac{\omega}{2} \text{ y } m\angle ONM = \frac{\theta}{2}$$

• En el $\triangle OMN$: $x + \frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{2}$

$$\therefore x = \frac{\omega - \theta}{2}$$

Observación 

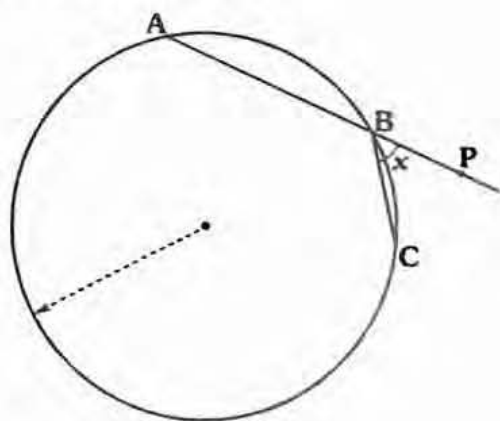
De lo anterior, se deduce:

$$x + \theta = 180^\circ$$

También:

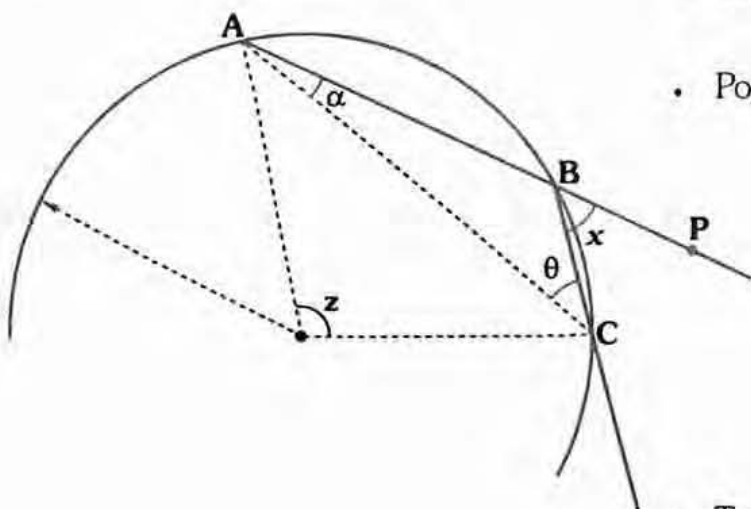
$$z = \theta$$

■ ÁNGULO EXINSCRITO

 $\angle PBC$: ángulo exinscrito

Se cumple:

$$x = \frac{m\widehat{ABC}}{2}$$

Prueba 

- Sea $m\angle BAC = \alpha$ y $m\angle BCA = \theta$
 $\Rightarrow x = \alpha + \theta$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = 2\theta \text{ y } m\widehat{BC} = 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\widehat{ABC} = 2\theta + 2\alpha$$

$$m\widehat{ABC} = 2x$$

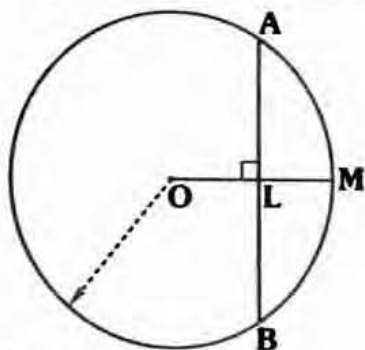
$$\therefore x = \frac{m\widehat{ABC}}{2}$$

- También:

$$x = \frac{z}{2} \quad \text{o} \quad z = 2x$$

TEOREMAS EN LA CIRCUNFERENCIA

- El radio perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y al arco correspondiente.

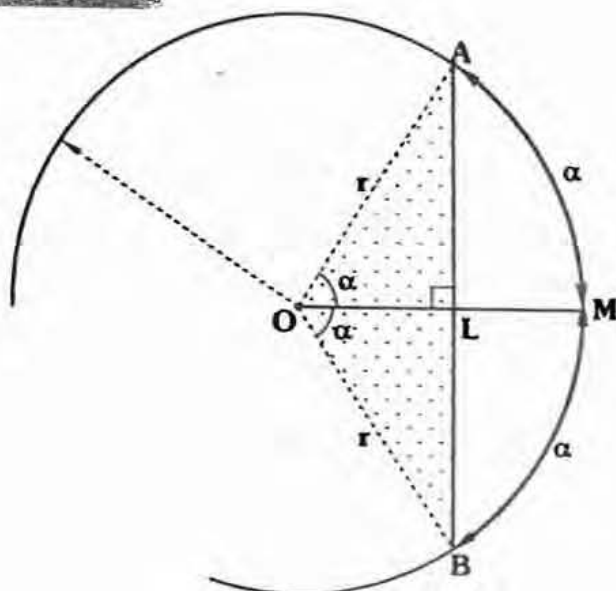


En el gráfico, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Se cumple:

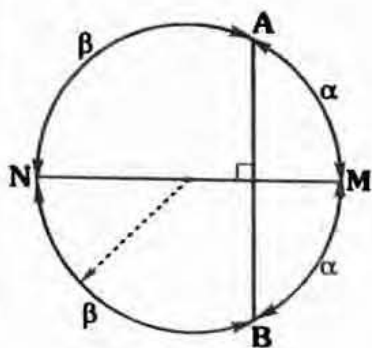
$$AL = LB \text{ y } m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$$

Prueba

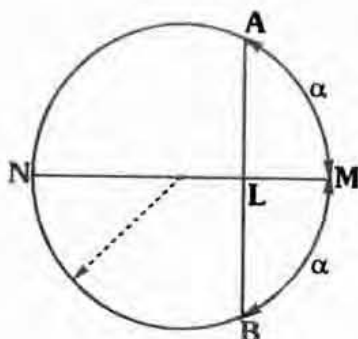


- $\triangle AOB$: isósceles
- Como $\overline{OL}$ es altura entonces también es mediana ($AL = LB$) y bisectriz ($m\angle AOL = m\angle LOB$).
- Por $\angle$ central: $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

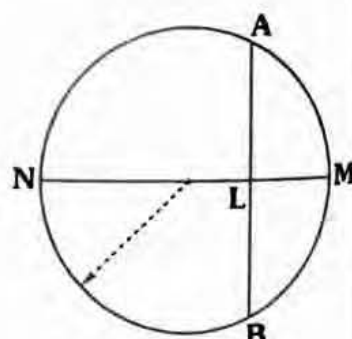
Observación



$$\text{Si } \overline{AB} \perp \overline{NM} \Rightarrow m\widehat{AN} = m\widehat{NB} \text{ y } m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$$

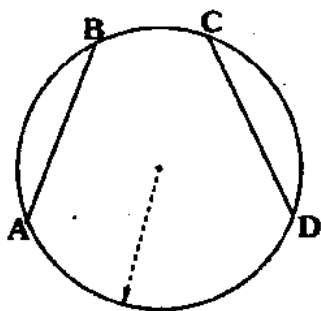


$$\text{Si } m\widehat{AM} = m\widehat{MB} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{NM} \text{ y } AL = LB$$



$$\text{Si } \overline{AB} \text{ no es diámetro y } AL = LB \Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{AB} \text{ y } m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$$

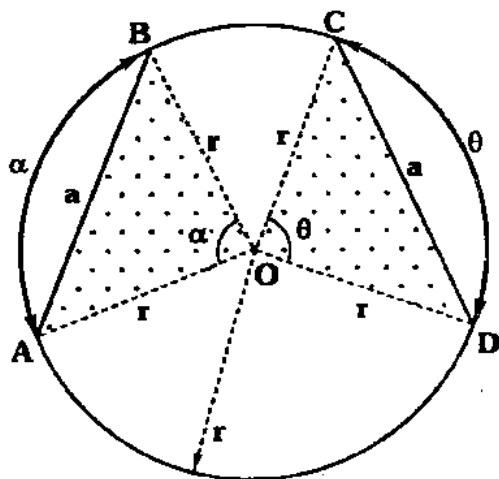
- En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son de igual longitud, sus arcos correspondientes de igual medida y viceversa.



En el gráfico:

$$AB = CD \Leftrightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$$

Prueba



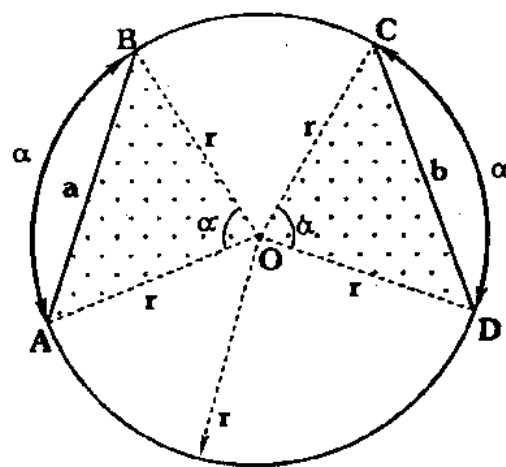
- Sea $AB = CD$, $m\widehat{AB} = \alpha$ y $m\widehat{CD} = \theta$
- Por ángulo central:

$$m\angle AOB = \alpha \quad \text{y}$$

$$m\angle COD = \theta$$
- $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (LLL)

$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

Veamos el caso recíproco:



Si $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

- Por $\angle$ central:

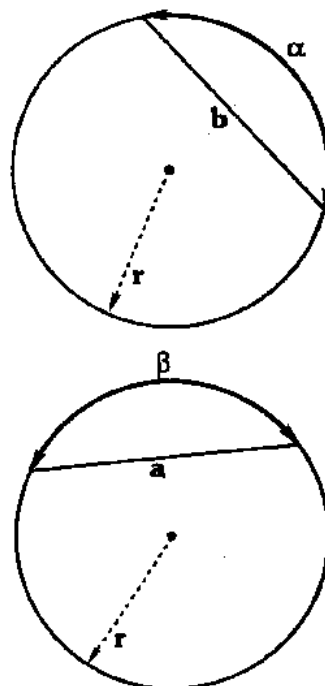
$$m\angle AOB = m\angle COD$$

- $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (LAL)

$$\therefore a = b$$

Observación

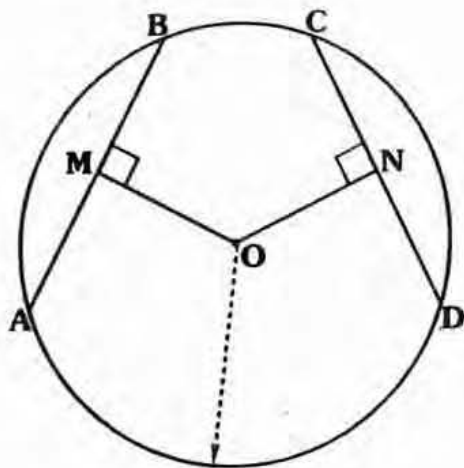
Si las circunferencias son congruentes:



Se cumple :

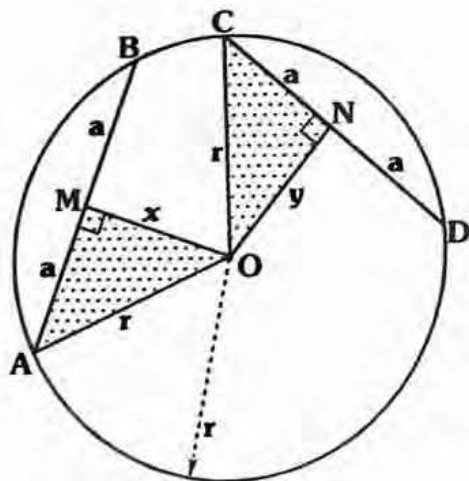
$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

- ⇒ Si dos cuerdas son de igual longitud entonces el centro equidista de dichas cuerdas.



$$\text{Si } AB = CD \Rightarrow OM = ON$$

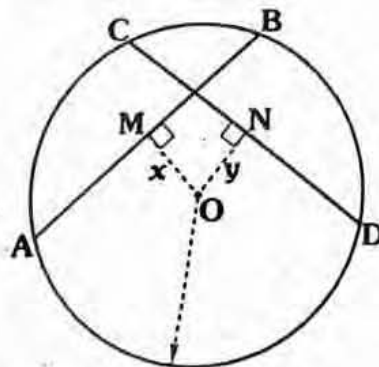
Prueba



- Como $AB = CD$
 $\Rightarrow AM = MB = CN = ND$
- $\triangle AMO \cong \triangle CNO$
 $\therefore x = y$

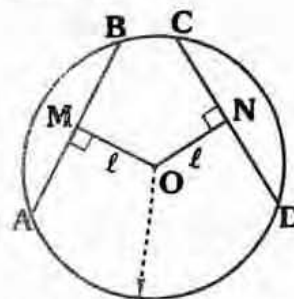
Observación

- También el teorema es válido si las cuerdas son secantes.



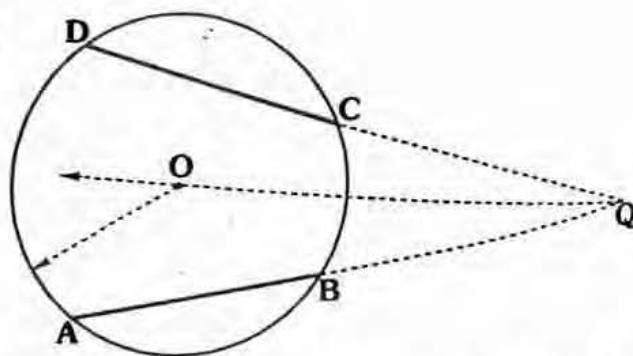
$$\text{Si } AB = CD \Rightarrow x = y$$

- El recíproco del teorema también es verdadero



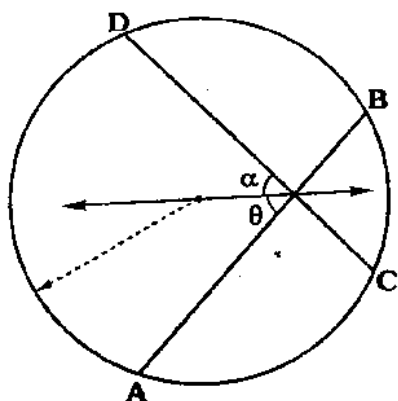
$$\text{Si } OM = ON \Rightarrow AB = CD$$

- ⇒ El siguiente teorema, es consecuencia directa del anterior:



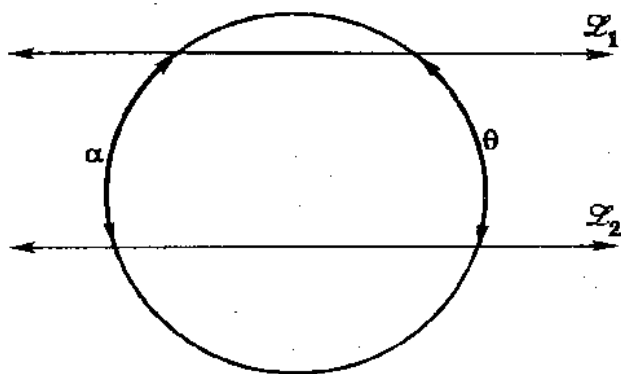
$$AB = CD \Leftrightarrow \overline{QO} \text{ es bisectriz del } \angle AQC$$

También:



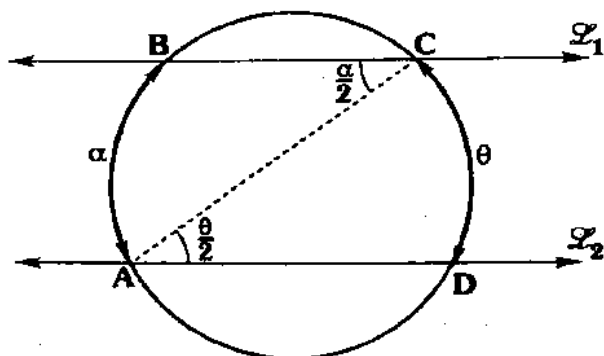
Si $AB = CD \Rightarrow \alpha = \theta$

En una circunferencia, dos rectas secantes determinan arcos de igual medida.



Si $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \Rightarrow \alpha = \theta$

Prueba



• Por ángulo inscrito:

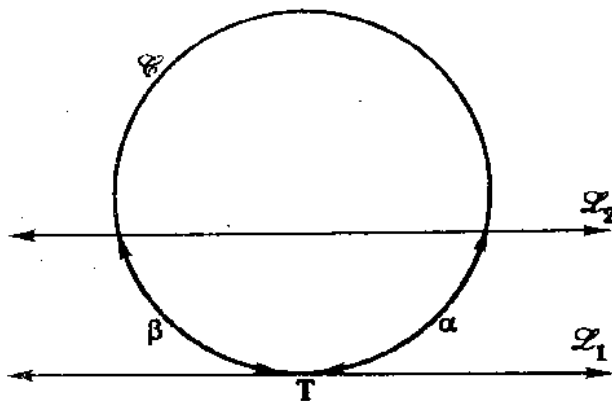
$$m\angle ACB = \frac{\alpha}{2} \text{ y } m\angle CAD = \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Como } \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 &\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} \\ \therefore \alpha &= \theta \end{aligned}$$

Observación

Si $\alpha = \theta$ entonces $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, la prueba es similar a la anterior.

En el gráfico, $\vec{l}_1$ es tangente a $\mathcal{C}$.

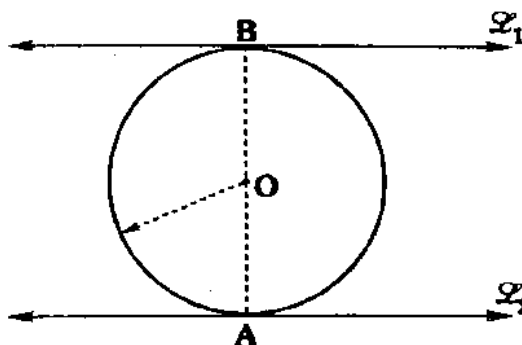


Si $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \Rightarrow \alpha = \beta$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

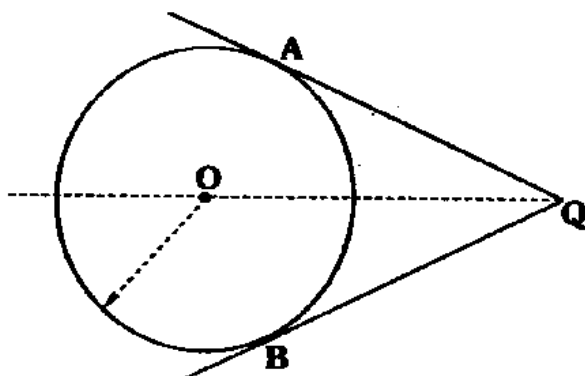
Observación

Si ambas rectas son tangentes.



Si $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$ entonces $m\widehat{AB} = 180^\circ$
(A, O y B: colineales)

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia:

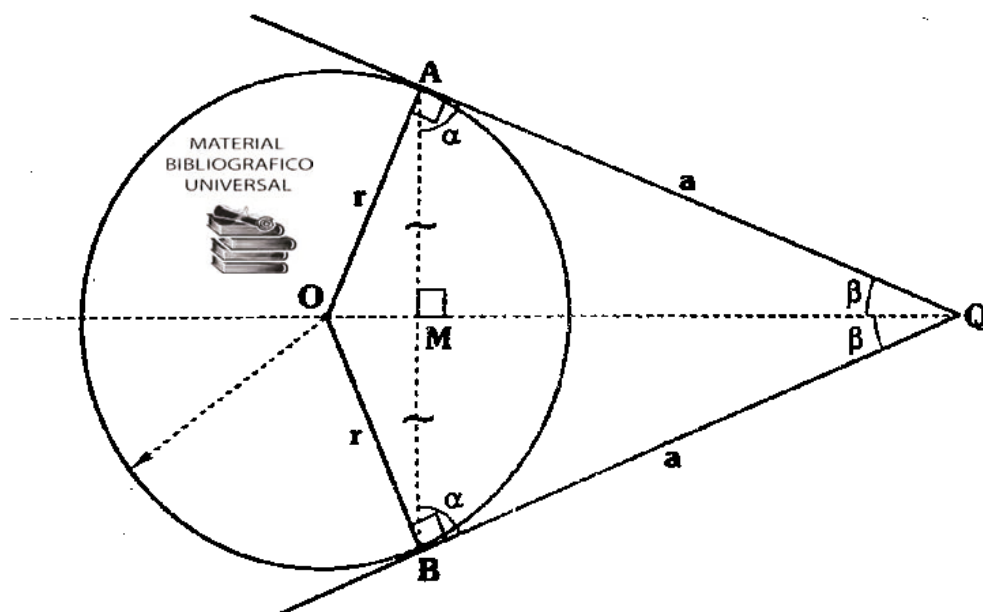


Se cumple:

$$QA = QB$$

$\overline{QO}$: bisectriz del $\angle AQB$

Prueba



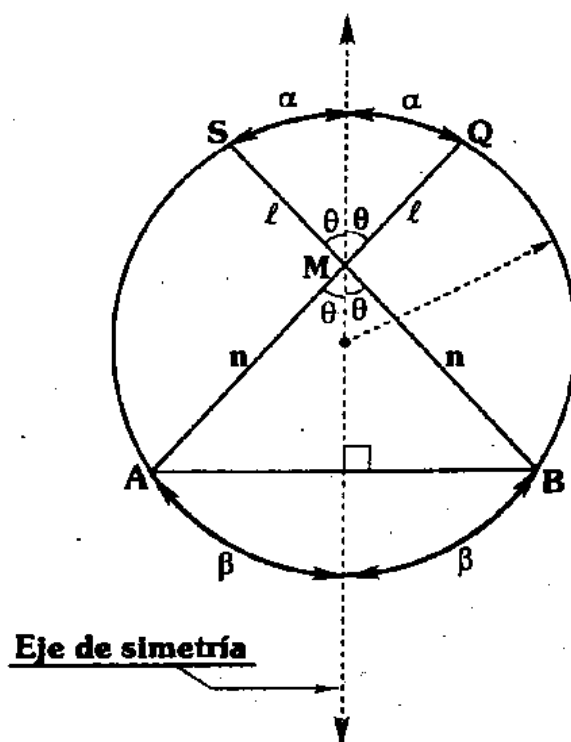
Sea $m\widehat{AB} = 2\alpha$ entonces por ángulo semiinscrito:

$$m\angle BAQ = m\angle ABQ = \alpha \Rightarrow \triangle AQB \text{ es isósceles entonces } QA = QB.$$

Como $OA = OB$, $\overline{OA} \perp \overline{QA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{QB}$ entonces $\overline{QO}$ es bisectriz.

Además: como el $\triangle AQB$ es isósceles entonces $\overline{QM}$ es mediana y altura.

- Toda recta que pasa por el centro es eje de simetría.

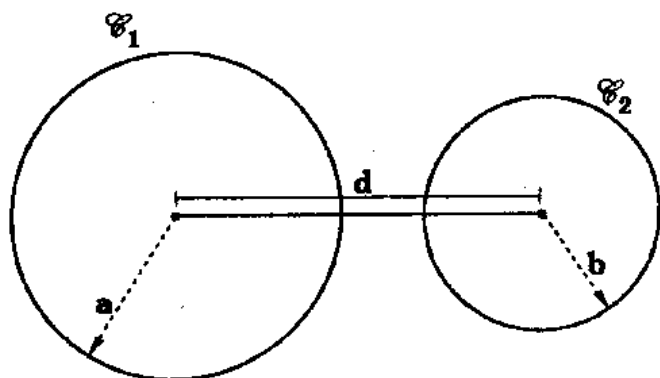


POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO

Dos circunferencias en un plano se pueden ubicar de seis posiciones diferentes, así tenemos:

1 CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

Cuando una de ellas se encuentra en la región exterior de la otra.



- C_1 y C_2 : circunferencias exteriores

- $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

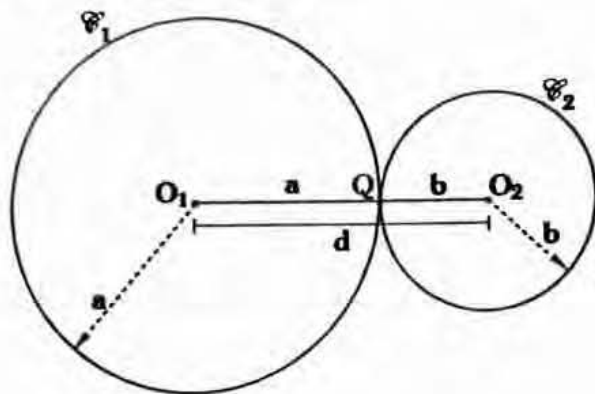
Se cumple:

$$d > a + b$$

d : distancia de centros

2 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES

Cuando tienen un solo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región exterior de la otra.



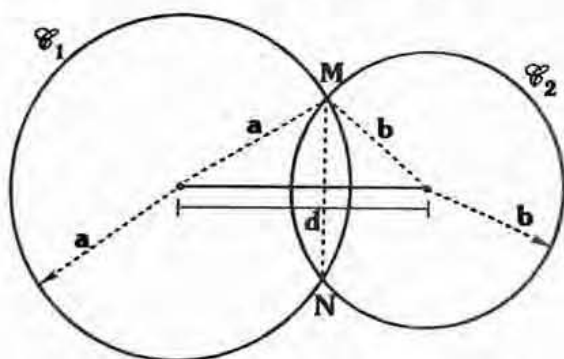
- Q: punto de tangencia
- C_1 y C_2 : Circunferencias tangentes exteriores
- $C_1 \cap C_2 = \{Q\}$

Se cumple:

- * O_1, Q y O_2 son colineales
- * $d = a + b$

3 CIRCUNFERENCIAS SECANTES

Cuando hay dos puntos de intersección (al segmento comprendido entre dichos puntos se le llama: "cuerda común")



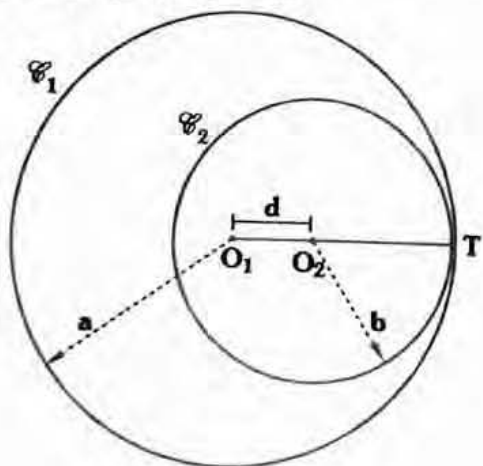
- $C_1 \cap C_2 = \{M, N\}$
- $\overline{MN}$: cuerda común
- C_1 y C_2 : circunferencias secantes

Se cumple:

$$|a - b| < d < a + b$$

4 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIORES

Cuando tienen un sólo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región interior de la otra.



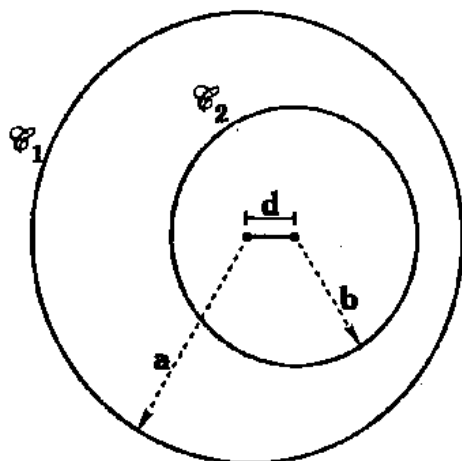
- T: Punto de tangencia
- $C_1 \cap C_2$: Circunferencias tangentes interiores.

Se cumple: O_1, O_2 y T son colineales

$$d = a - b$$

5 CIRCUNFERENCIAS INTERIORES

Cuando las circunferencias no se intersecan y una de ellas está en la región interior de la otra.



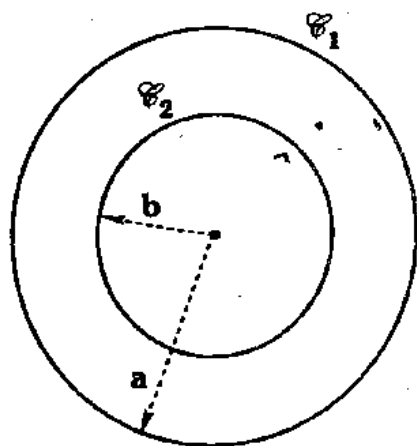
- C_1 y C_2 : circunferencias interiores
- $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

Se cumple:

$$d < a - b$$

6 CIRCUNFERENCIAS CONCENTRICAS

Cuando tienen el mismo centro.



- C_1 y C_2 : circunferencias interiores
- $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- d : distancia de centros entonces:

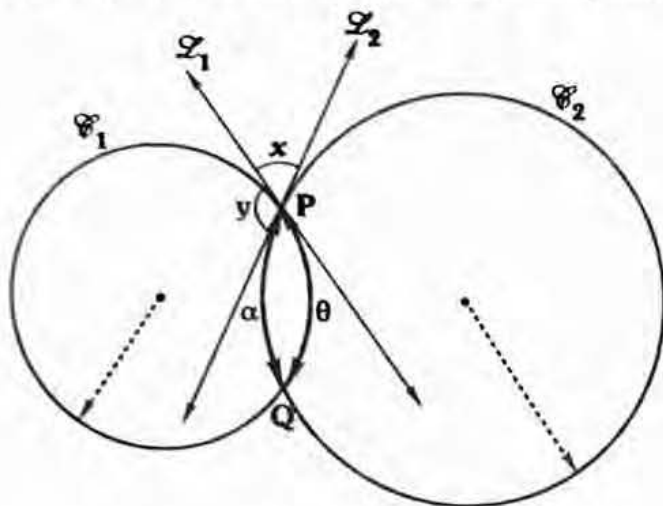
$$d = 0$$

Observación

Se llama **circunferencias disjuntas** a aquel grupo de circunferencias cuya intersección es el conjunto vacío.

ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS (1)

Es el ángulo formado por las rectas tangentes en uno de los puntos de intersección.



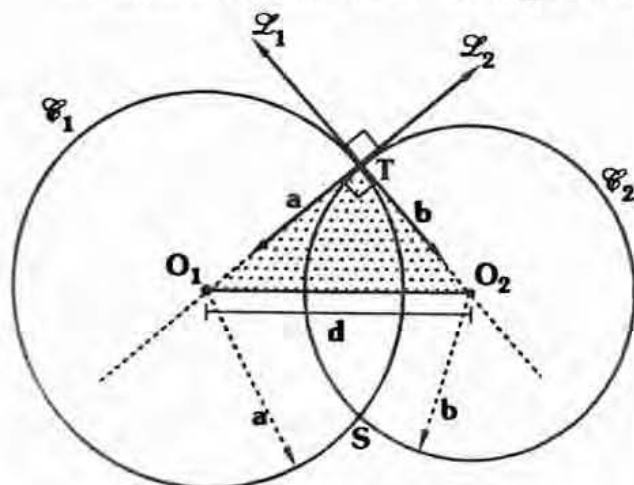
- $C_1 \cap C_2 = \{P, Q\}$
- $\vec{L}_1$: tangente a C_1 en P
- $\vec{L}_2$: tangente a C_2 en P
- "x" ó "y": medida del ángulo entre C_1 y C_2 .

Se cumple:

$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

Son dos circunferencias donde el ángulo entre ellas es recto.



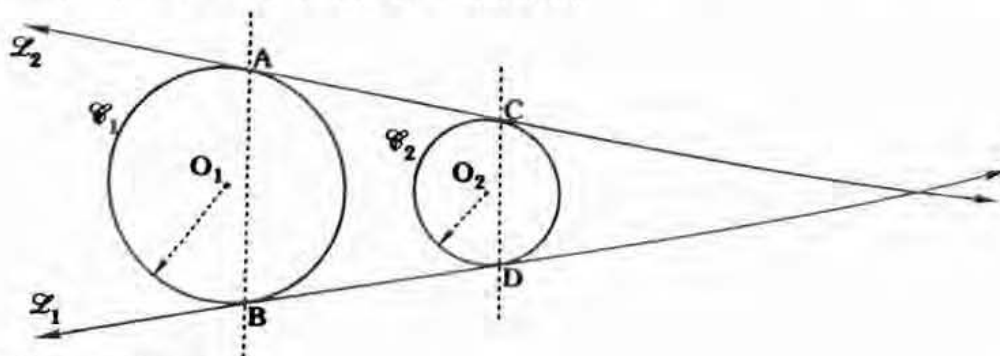
- C_1 y C_2 : circunferencias ortogonales
- $\vec{L}_1 \perp \vec{L}_2$ entonces $\vec{L}_1$ pasa por el centro de C_2 y $\vec{L}_2$ pasa por el centro de C_1

Se cumple:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

PROPIEDADES SOBRE POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

⇒ En el gráfico, C_1 y C_2 : circunferencias exteriores

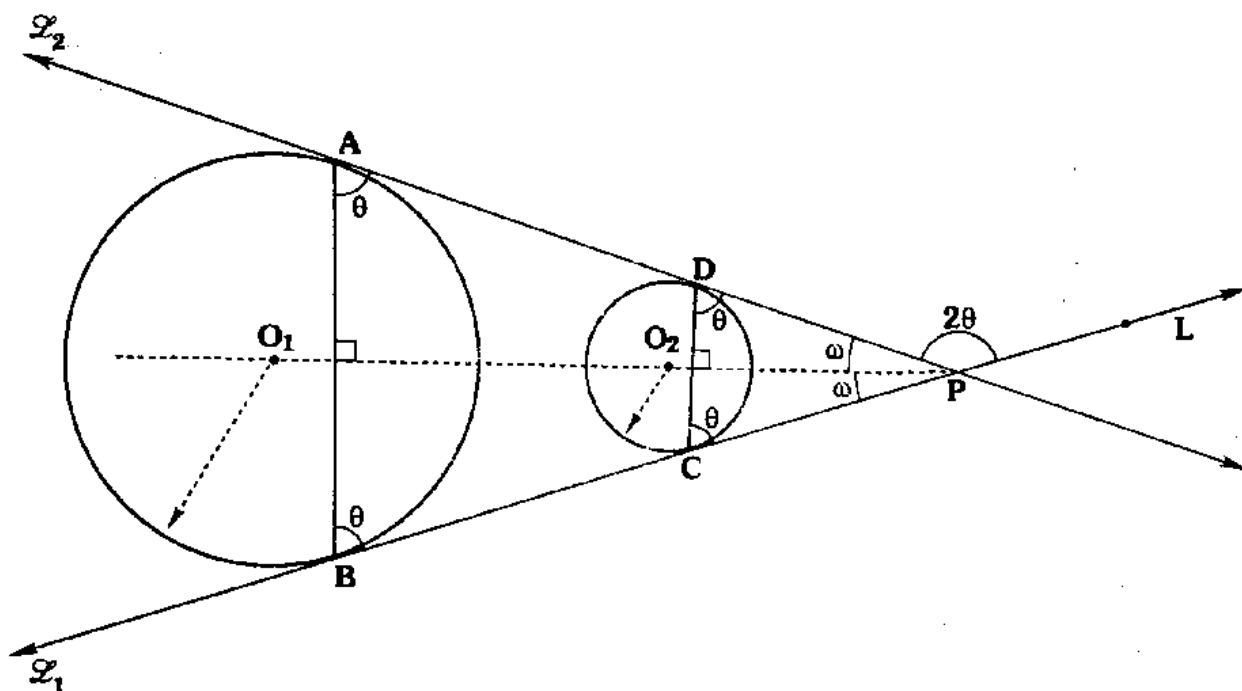


- $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$: tangentes comunes exteriores (A, B, C y D: puntos de tangencia)
- Se cumple:

$$\bullet AC = BD \quad \bullet \overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \bullet O_1, O_2 \text{ y } P : \text{colineales}$$

Prueba

- Como $PA = PB$ y $PC = PD \Rightarrow AD = PA - PD = \underbrace{PB - PC}$
 $\therefore AD = BC$



- Como $\triangle PCD$ y $\triangle PBA$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle PDC = \theta \Rightarrow m\angle DCP = \theta$$

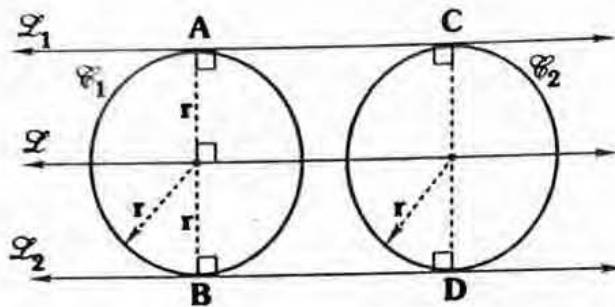
$$\Rightarrow m\angle LDP = 2\theta \Rightarrow m\angle PAB = m\angle PBA$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{DC}$$

- O_1 y O_2 están en la bisectriz del $\angle APB \Rightarrow O_1, O_2$ y P : colineales

Observación

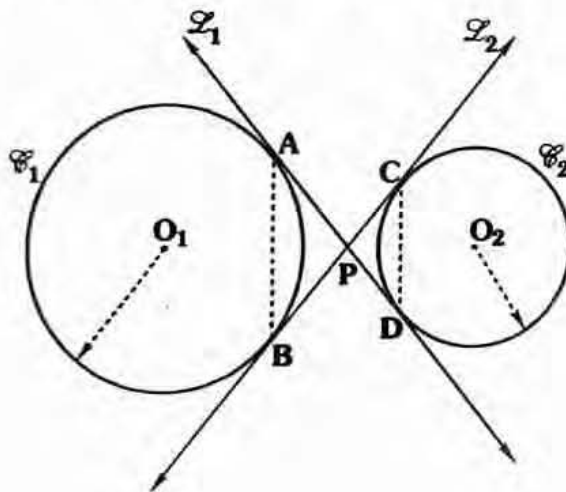
Si $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2$, entonces:



Se cumple: $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \parallel \overline{L}$

También: $AC = BD$

En el gráfico, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son exteriores



• $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: tangentes comunes interiores (A, B, C y D: Puntos de tangencia)

• Se cumple:

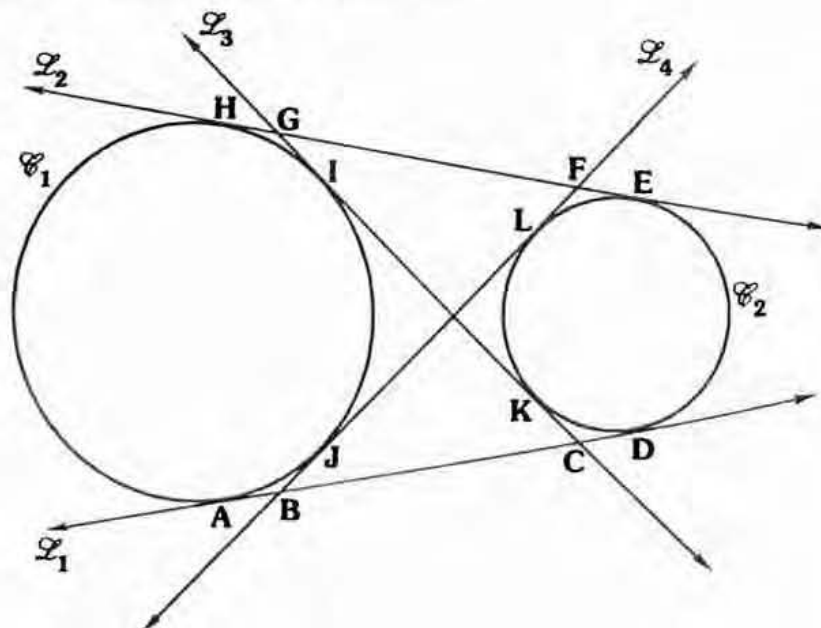
* $AD = BC$

* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

* O_1, P y O_2 : colineales

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

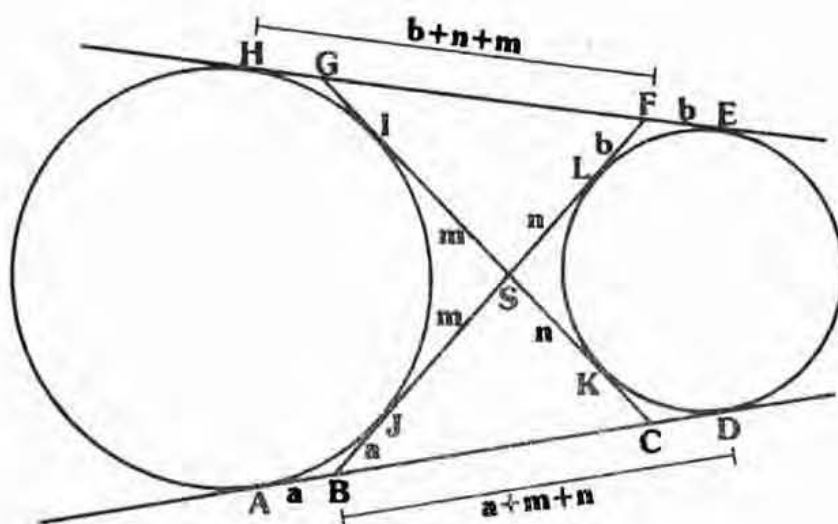
En el gráfico, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias exteriores



- $\overleftrightarrow{\ell_1}, \overleftrightarrow{\ell_2}, \overleftrightarrow{\ell_3}, \overleftrightarrow{\ell_4}$: Tangentes comunes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$
- Se cumple:

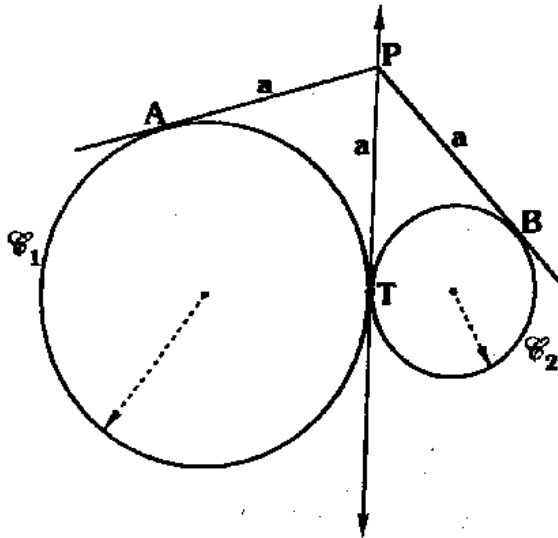
$$\begin{aligned} HE &= AD = BF = GC \\ AB &= CD = HG = FE \end{aligned}$$

Prueba



- $HE=AD$ ya fue probado.
- Sea $AB=a$; $JS=m$; $SL=n$, $LF=FE=b$
 $\Rightarrow BL=BD=a+m+n$ y $FH=FJ=m+n+b$
- Como $HE=AD \Rightarrow 2b+n+m=2a+m+n \Rightarrow b=a$
- Luego notamos: $AD=2a+m+n=BF$
- También: como, $\left. \begin{aligned} AD=2a+m+n &\Rightarrow CD=a \\ HE=2b+n+m &\Rightarrow HG=b \end{aligned} \right\} CD=HG$

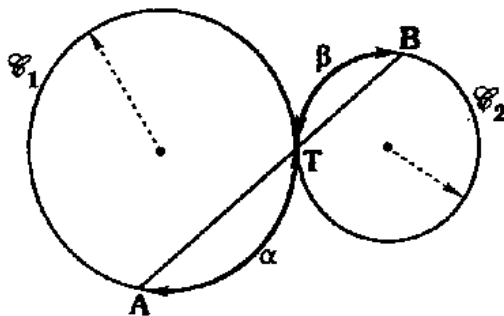
□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$PA = PT = PB$$

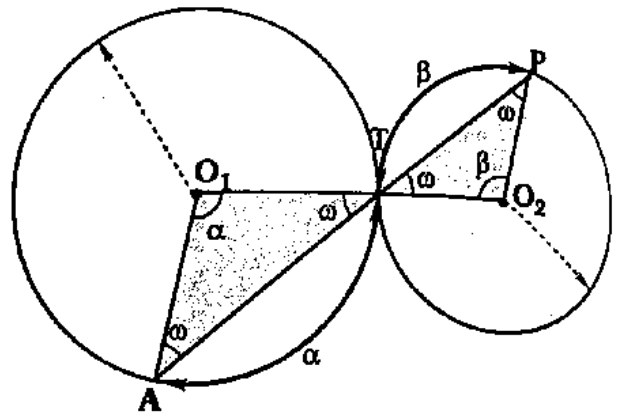
□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\alpha = \beta$$

Prueba

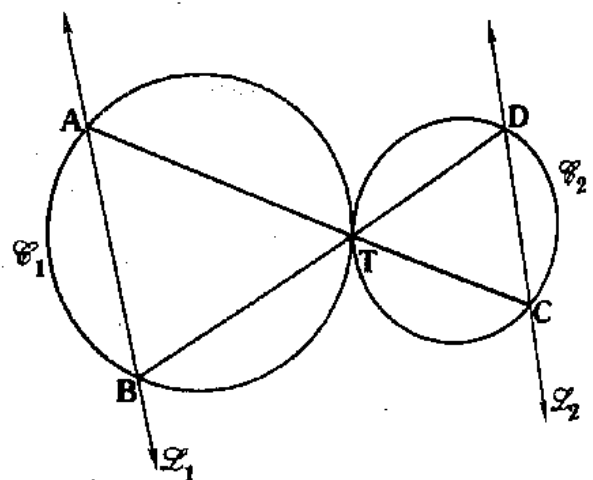


- Como O_1 , T y O_2 son colineales
- $\triangle AO_1T$ y $\triangle PO_2T$: isósceles
- En $\angle$:

$$\alpha + \omega = \beta + \omega$$

$$\therefore \alpha = \beta$$

□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: tangentes exteriores



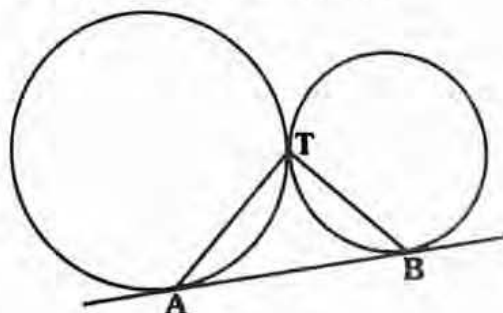
- T es punto de tangencia
- Se cumple:

$$\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$$

Prueba

- Como : $m\widehat{BT} = m\widehat{TD}$
 $\Rightarrow m\angle BAT = m\angle TCD$
 $\therefore \vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$

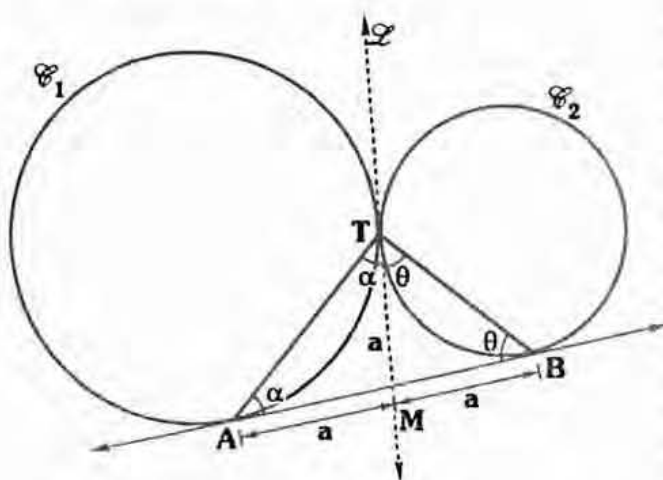
□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: tangente exteriores



- A, T y B: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\angle ATB = 90^\circ$$

Prueba



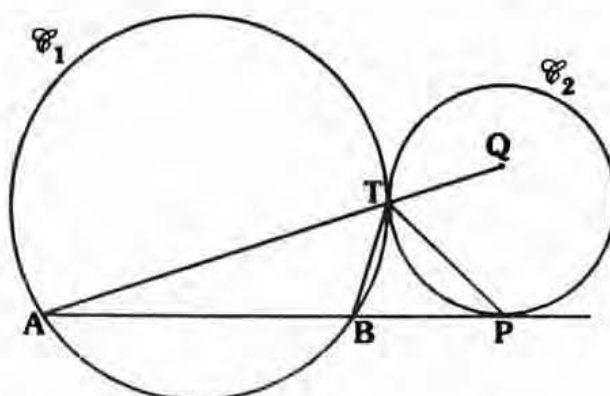
- Se traza la tangente a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en T, la cual a $\overline{AB}$ en M entonces $AM = MT = MB$

- En el triángulo ATB:

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha + \theta = 90^\circ$$

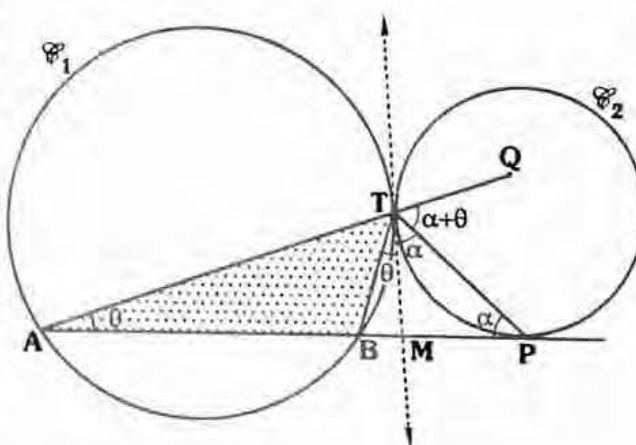
□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: circunferencia tangentes exteriores



- T y P: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\angle BTP = m\angle PTQ$$

Prueba



- Sea $m\angle BAT = \theta \Rightarrow m\widehat{TB} = 2\theta$
- Se traza la tangente común en T, que corta a $\overline{BP}$ en M.
- Por $\angle$ semiinscrito: $m\angle BTM = \theta$
- $m\angle MTP = m\angle MPT = \alpha$
- En $\triangle ATP$: $m\angle QTP = \alpha + \theta$

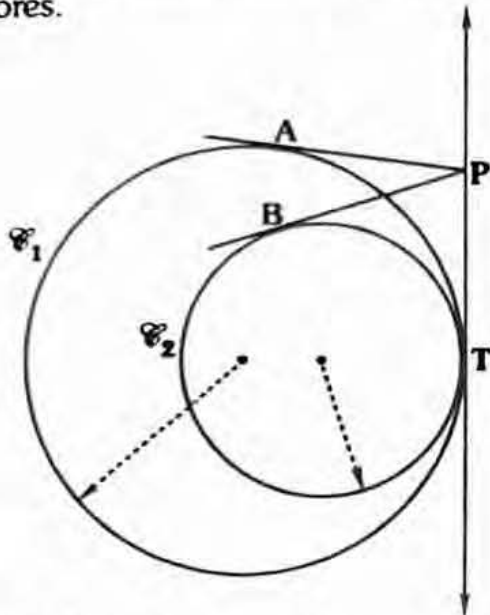
$$m\angle BTP$$

$$\therefore m\angle BTP = m\angle QTP$$

Observación

Se cumple que $\overline{TP}$ es bisectriz exterior para el ΔBTA .

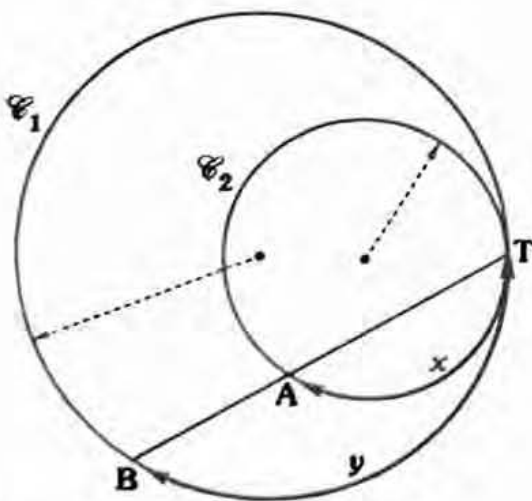
= $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: circunferencia tangentes interiores.



• T, A y B puntos de tangencia.

• Se cumple: $PA=PB=PT$

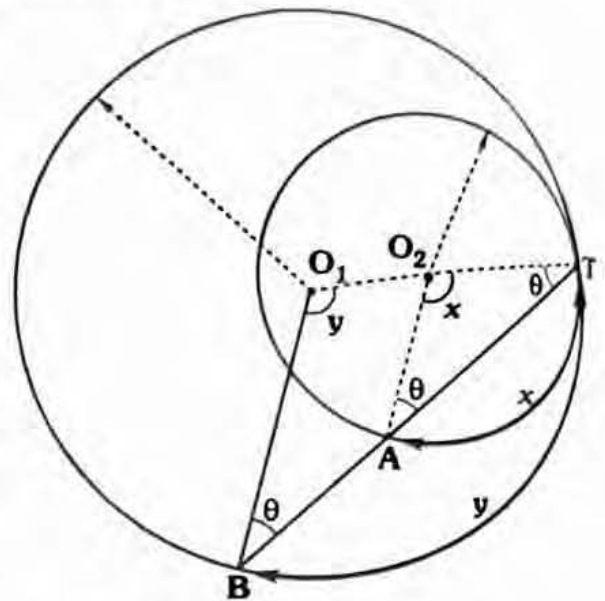
= $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: son circunferencias tangentes interiores.



• T: Punto de tangencia

• Se cumple: $x=y$

Prueba



• Por $\angle$ central:

$$m\angle BO_1T = y \quad y \quad m\angle AO_2T = x$$

• O_1 , O_2 y T son colineales

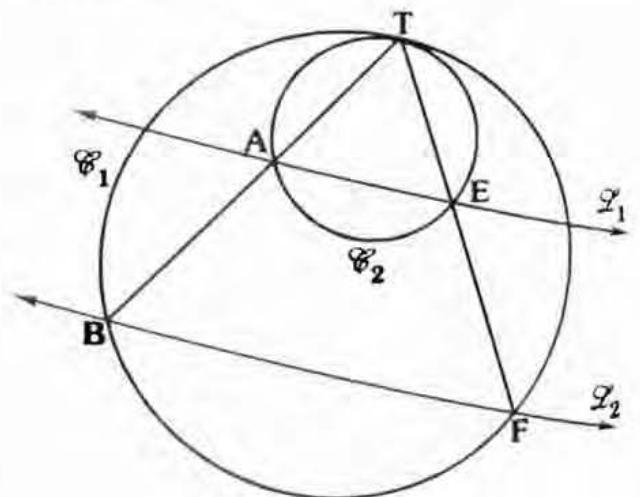
• Los triángulos: ΔAO_2T y ΔBO_1T son isósceles

$$\Rightarrow m\angle O_2TA = m\angle O_2AT = m\angle O_1BT$$

$$\Rightarrow \overline{O_1B} \parallel \overline{O_2A}$$

$$\therefore x=y$$

= $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:



Prueba

- Como:

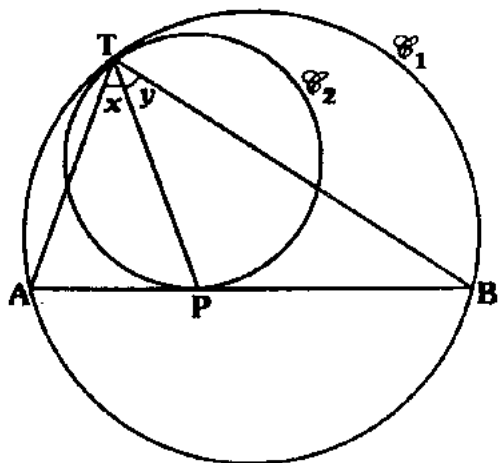
$$m\widehat{TE} = m\widehat{TF}$$

$$\Rightarrow m\angle EAT = m\angle FBT$$

- Por recíproco de la propiedad de ángulos correspondientes:

$$\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$$

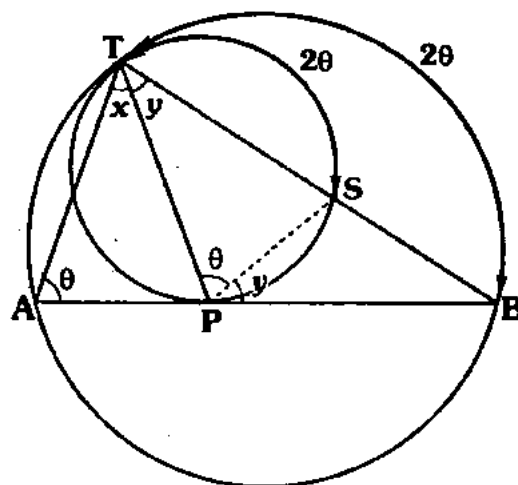
- $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores



- En el gráfico, T y P son puntos de tangencia.
- Se cumple:

$$x = y$$

Prueba



- Como:

$$m\widehat{TS} = m\widehat{TB}$$

$$\Rightarrow m\angle TPS = m\angle TAB = \theta$$

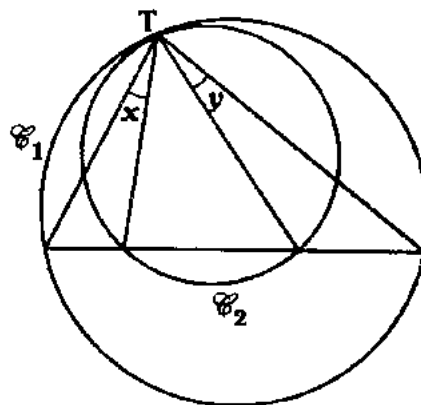
- Por ángulo inscrito y semiinscrito:

$$m\angle PTS = m\angle SPB = y$$

- En $\triangle ATP$: $x + \theta = \theta + y$

$$\therefore x = y$$

- $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes interiores

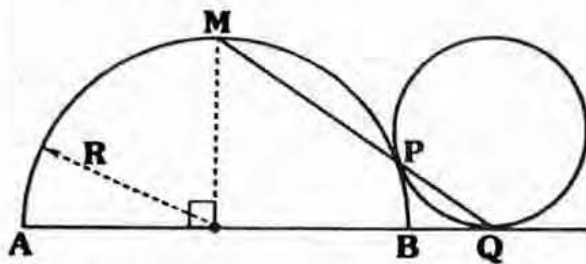


- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$x = y$$

Observación

- Casos particulares del teorema

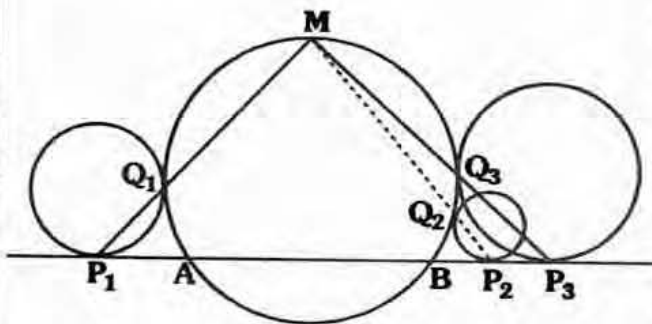


Se cumple:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = 90^\circ$$

$$AM = MB = R\sqrt{2}$$

- También:



- P_i y Q_i : Puntos de tangencia

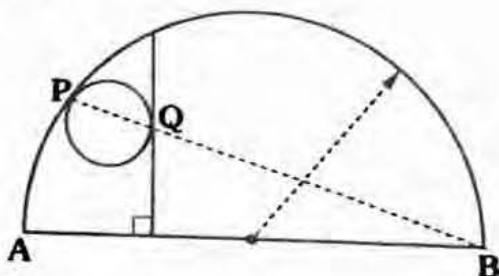
- Se cumple:

$$\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}, \overrightarrow{P_3Q_3}, \dots$$

son concurrentes

- Los siguientes casos de colinealidad se pueden demostrar como casos particulares.

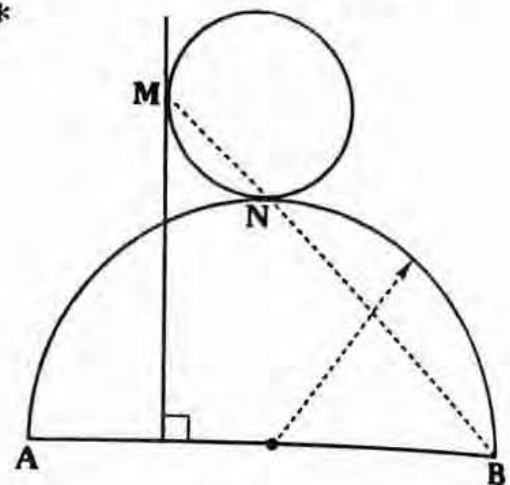
*



- P y Q: Puntos de tangencia
- Se cumple:

P, Q y B: colineales

*

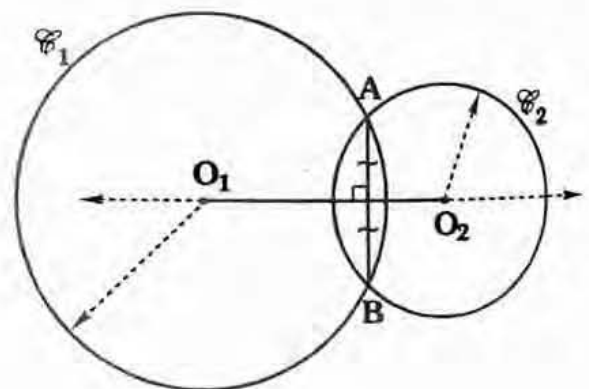


- M y N son puntos de tangencia
- Se cumple:

M, N y B: colineales

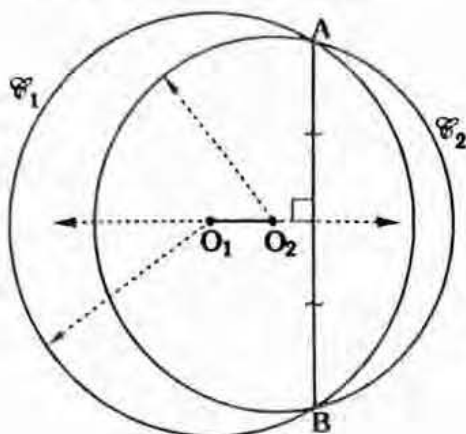
Las pruebas se deja como ejercicio para el lector.

- En dos circunferencias secantes la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda común.

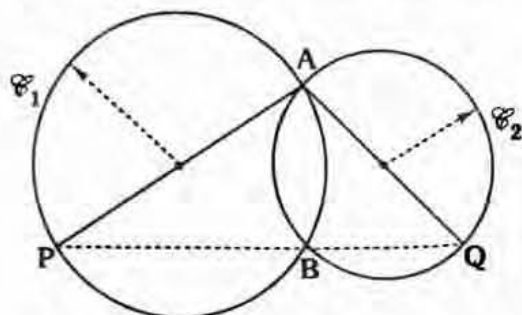


- C_1 y C_2 : secantes
- $\overline{AB}$: Cuerda común
- Se cumple: $\overline{O_1O_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

También, se puede presentar:



= C_1 y C_2 : circunferencias secantes



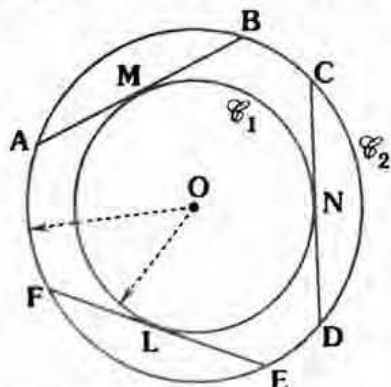
- Se cumple: P, B y Q son colineales

Prueba

- Basta observar que:

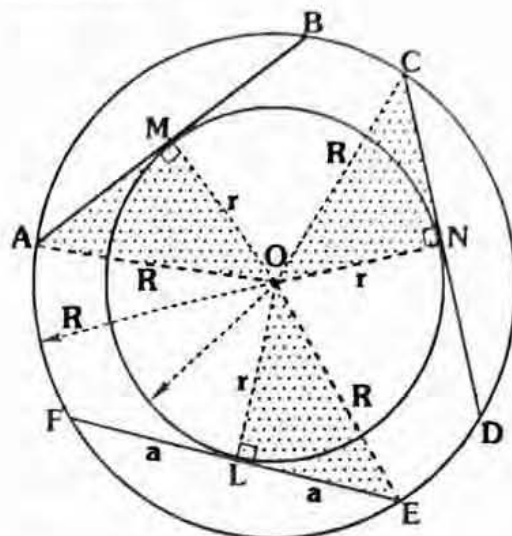
$$m\angle ABP = m\angle ABQ = 90^\circ$$

= C_1 y C_2 : circunferencias concéntricas



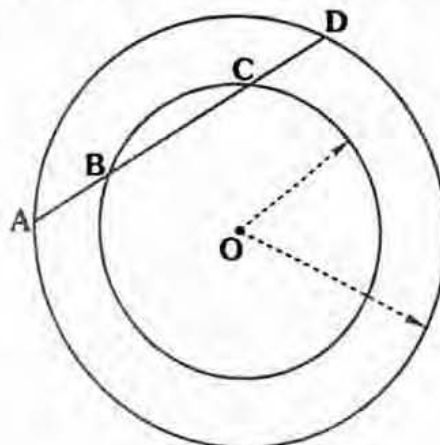
- M, N y L son puntos de tangencia
- Se cumple: $AB = CD = FE$

Prueba



- Notemos que cada punto de tangencia es punto medio de las cuerdas
- $\triangle OLE \cong \triangle ONC \cong \triangle OMA$
 $\Rightarrow AM = CN = EL = a$
 $\therefore AB = CD = FE$

= C_1 y C_2 : circunferencias concéntricas

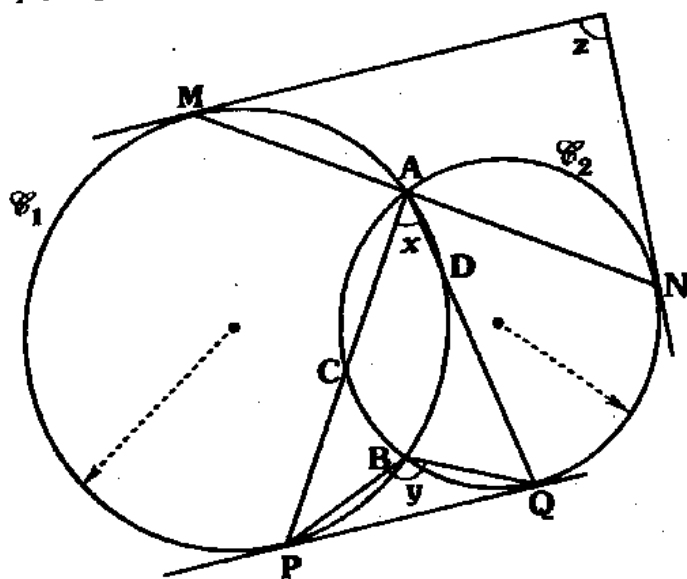


- Se cumple: $AB = CD$

Prueba

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ (M en $\overline{BC}$)
 $\Rightarrow BM = MC$ y $AM = MD$
 $\therefore AB = CD$

□ $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: ortogonales



- P, Q, M y N: Puntos de tangencia
- Se cumple:

I. $m\widehat{ACB} + m\widehat{ADB} = 180^\circ$

II. $x = 45^\circ$

III. $y = 135^\circ$

IV. $z = 90^\circ$

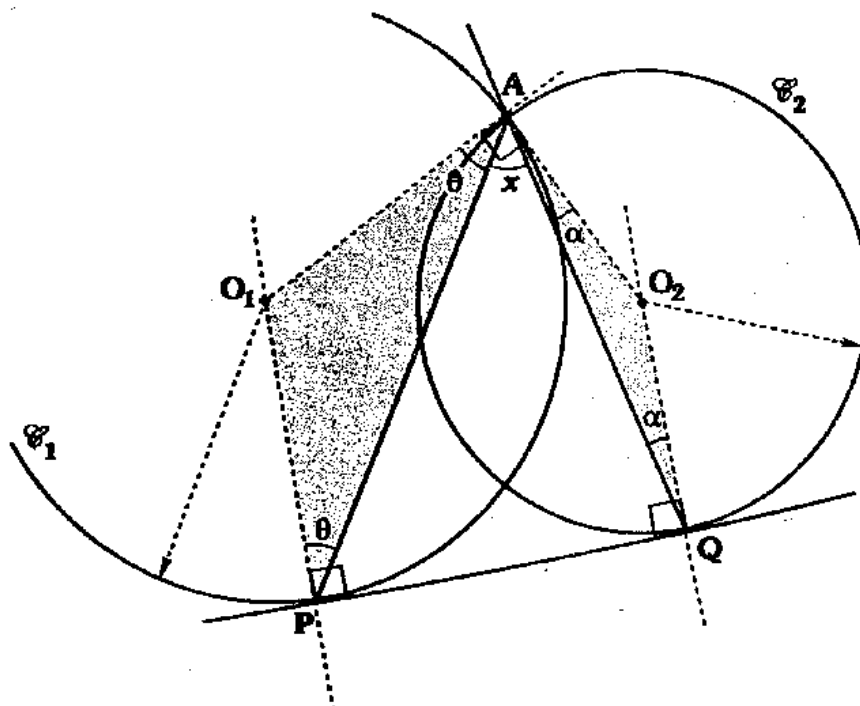
Punto 1

I. La primera parte se deduce fácil, por la propiedad, como el ángulo entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es 90°

$$\Rightarrow 90^\circ = \frac{m\widehat{ACB} + m\widehat{ADB}}{2}$$

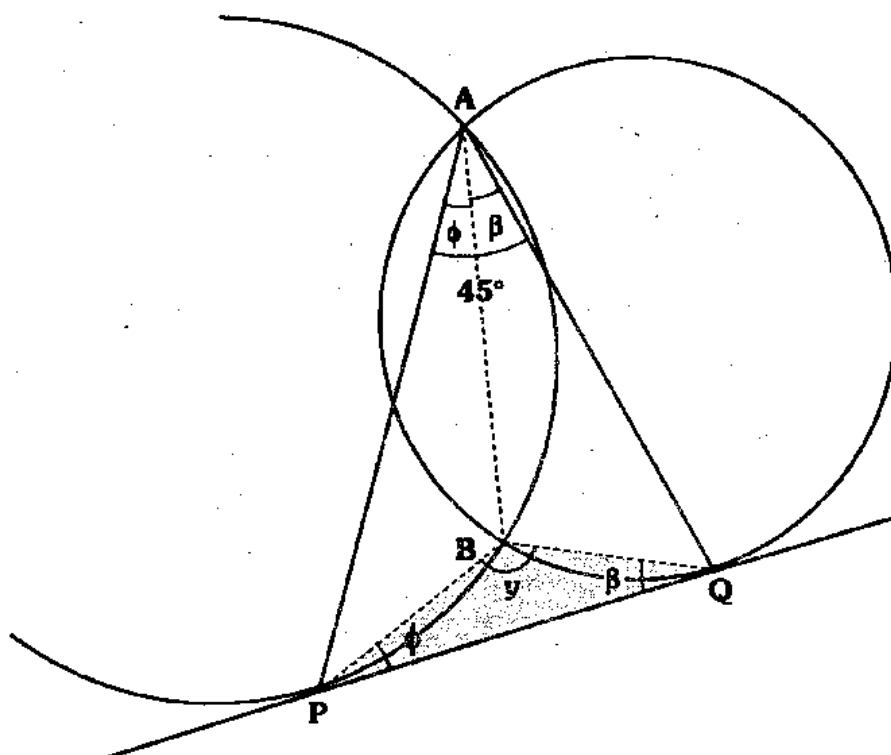
$$\therefore m\widehat{ACB} + m\widehat{ADB} = 180^\circ$$

II.



- Como $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ortogonales $\Rightarrow m\angle O_1AO_2 = 90^\circ$
 $\Rightarrow x + \theta + \alpha = 90^\circ \quad \dots (a)$
- $\triangle O_1AP$ y $\triangle O_2AQ$ son isósceles
- Como: $\overrightarrow{O_1P} \parallel \overrightarrow{O_2P} \Rightarrow x = \theta + \alpha \quad \dots (b)$
- De (a) y (b): $x + x = 90^\circ$
 $\therefore x = 45^\circ$

III.



- Sea $m\angle BPQ = \phi$ y $m\angle BQP = \beta$ entonces:

$$m\widehat{PB} = 2\phi \quad \text{y} \quad m\widehat{BQ} = 2\beta$$

- Por ángulo inscrito:

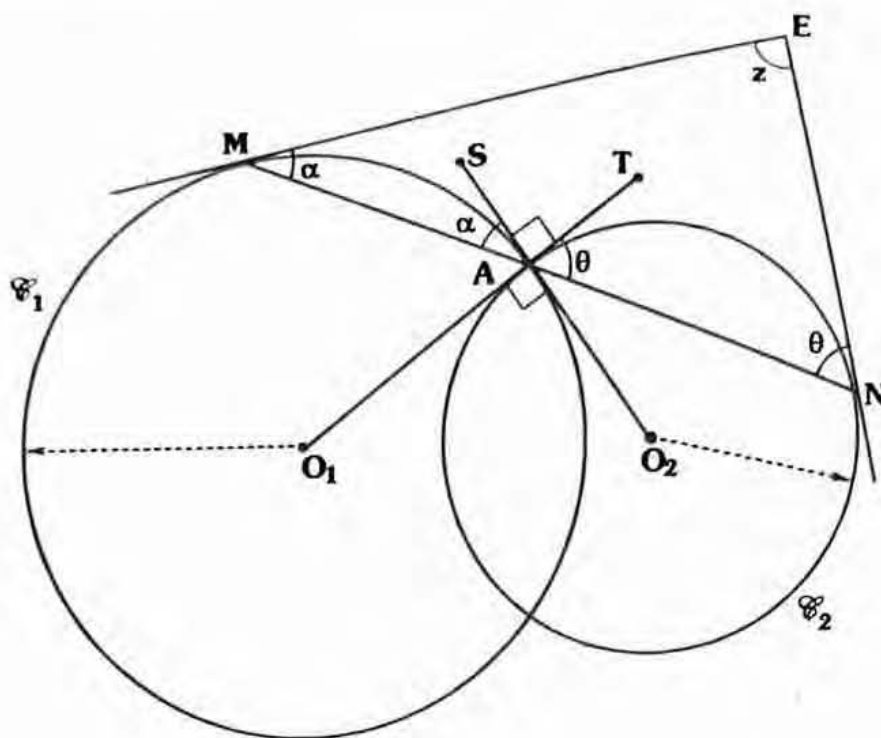
$$m\angle PAB = \phi \quad \text{y} \quad m\angle BAQ = \beta$$

- Por propiedad anterior: $\phi + \beta = 45^\circ$

- En $\triangle PBQ$: $y + \underbrace{\phi + \beta}_{45} = 180^\circ$

$$\therefore y = 135^\circ$$

IV.

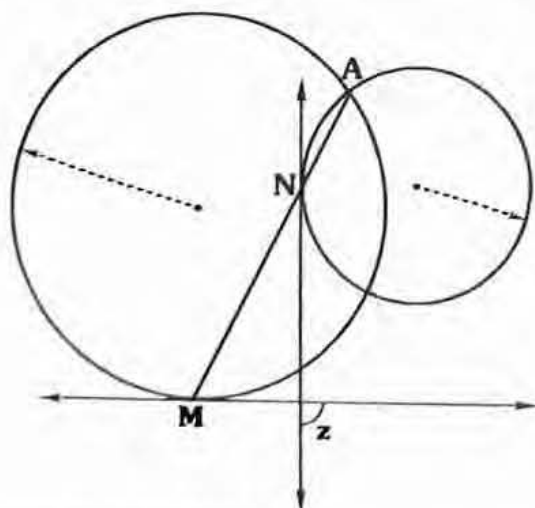


- Como $m\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ entonces $\overline{O_1A}$ es tangente a C_2 y $\overline{O_2A}$ es tangente a C_1 .
- Por propiedad: $m\angle EMA = m\angle MAS = \alpha$ y $m\angle TAN = m\angle ENA = \theta$
- Notemos en A: $\alpha + \theta = 90^\circ$
- En $\triangle ENM$: $z + \alpha + \theta = 180^\circ$

$$\therefore z = 90^\circ$$

Observación

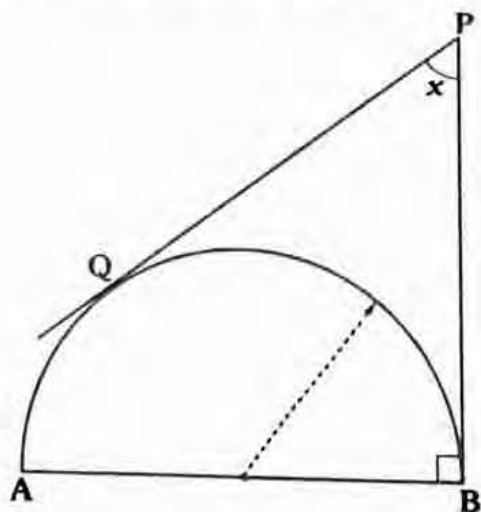
La propiedad anterior también se verifica en:



Se cumple:

$$z = 90^\circ$$

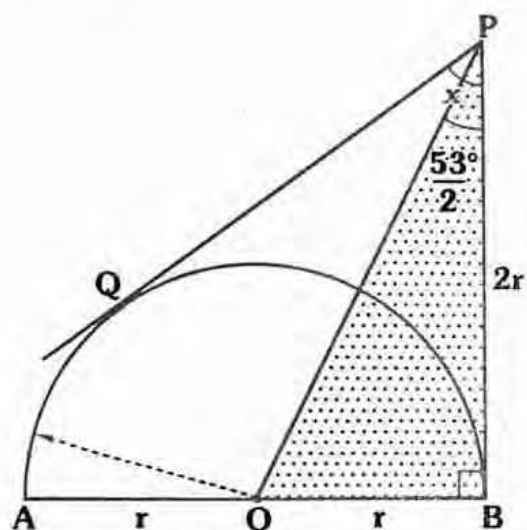
En el gráfico, Q es punto de tangencia y $AB=PB$.



Se cumple:

$$x=53^{\circ}$$

Prueba



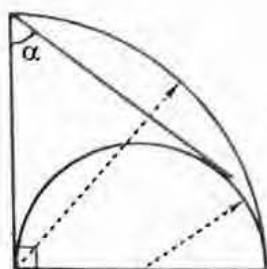
$\overrightarrow{PO}$ es bisectriz del $\angle QPB$

$\angle OBP$: notable de $\frac{53^{\circ}}{2}$

$$\therefore x=53^{\circ}$$

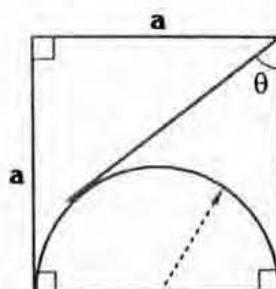
Observación

La propiedad anterior es común encontrarla en las siguientes figuras:



Se cumple:

$$\alpha=53^{\circ}$$

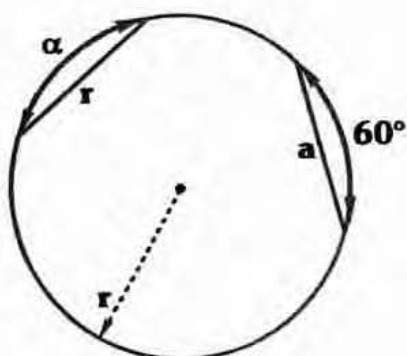


Se cumple:

$$\theta=53^{\circ}$$

Nota

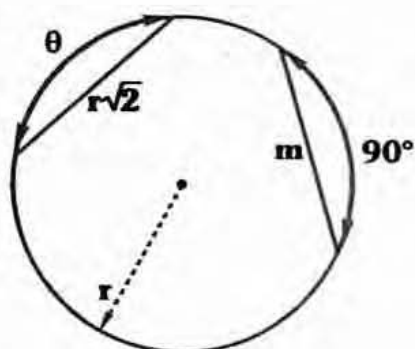
En el capítulo de "Polígonos Regulares" se estudiará muchos casos, veamos casos de relación de arcos y cuerdas:



Se cumple:

$$a = r$$

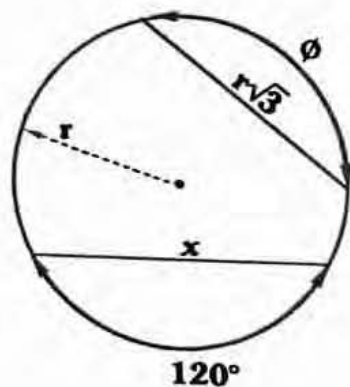
$$\alpha = 60^\circ$$



Se cumple:

$$m = r\sqrt{2}$$

$$\theta = 90^\circ$$



Se cumple:

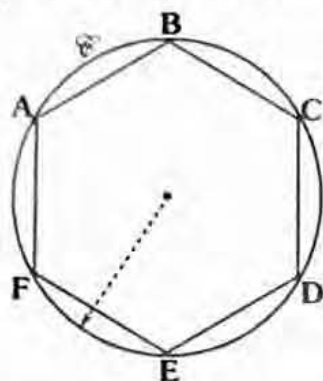
$$x = r\sqrt{3}$$

$$\phi = 120^\circ$$

POLÍGONO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

POLÍGONO INSCRITO

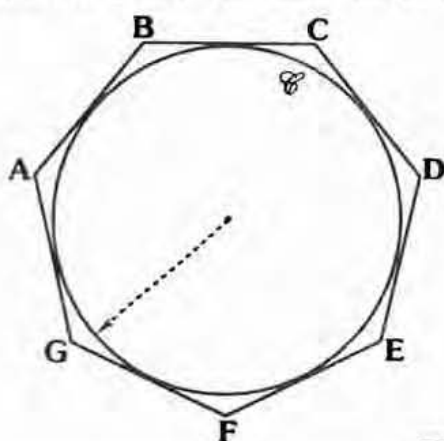
Un polígono está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.



- El polígono ABCDEF está inscrito en $\mathcal{C}$.
- La circunferencia $\mathcal{C}$ se denomina circunscrita al polígono ABCDEF.

POLÍGONO CIRCUNSCRITO

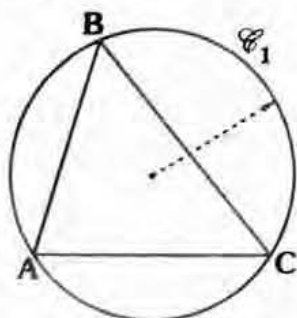
Es aquel polígono que tiene todos sus lados tangentes a la misma circunferencia.



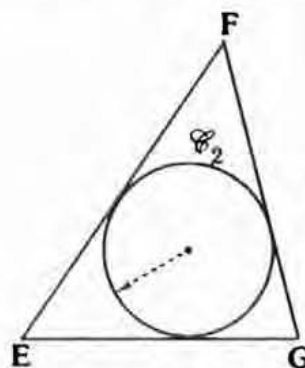
- El polígono ABCDEFG es un polígono circunscrito a la circunferencia $\mathcal{C}$.
- La circunferencia $\mathcal{C}$ está inscrita en el polígono.

Observación

- Si una figura f_1 está inscrita en f_2 , entonces f_2 está circunscrito a f_1 y viceversa.
- Para un triángulo:



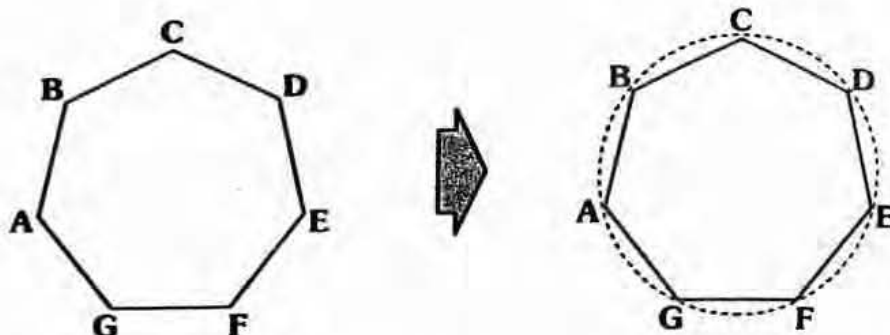
- * ΔABC inscrito en $\mathcal{C}_1$
- * $\mathcal{C}_1$ es circunscrita al ΔABC



- * ΔEFG inscrito en $\mathcal{C}_2$
- * $\mathcal{C}_2$ está inscrito en el ΔEFG

POLÍGONO INSCRIPTIBLE

Un polígono se denomina inscriptible cuando por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.

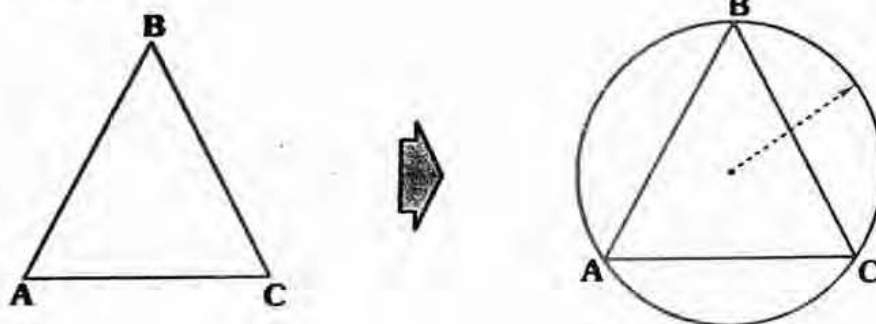


Si los vértices del polígono ABCDEFG se pueden ubicar en una misma circunferencia.

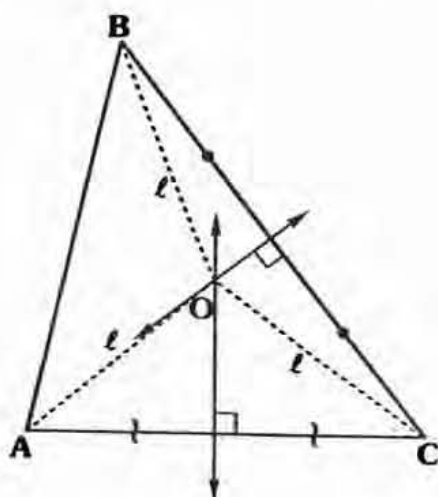
$\Rightarrow$ ABCDEFG es inscriptible

TEOREMA

Todo triángulo es inscriptible



Prueba

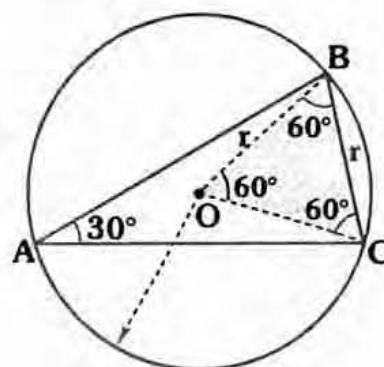
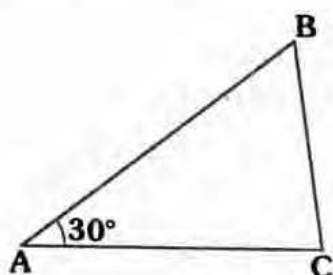


- Se trazan las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ las cuales se cortan en O.
- Por teorema de la mediatriz:
 $OA = OC = OB$
- Como O equidista de A, B y C en dichos puntos se ubicarán en una circunferencia de centro O.
- Al punto O se llama circuncentro del ΔABC .

Nota

- No todos los polígonos son inscriptibles.
- Más adelante estudiaremos las condiciones para que un cuadrilátero sea inscriptible.

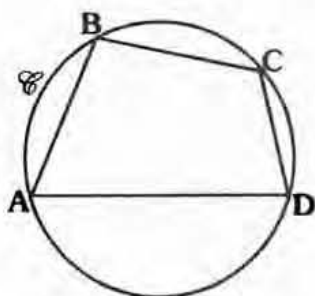
- Como por los vértices de un triángulo siempre puede pasar una circunferencia entonces es recomendable en algunos problemas trazar dicha circunferencia, en especial cuando hay un ángulo que mide 30° .



Se cumple: $\triangle OBC$ es equilátero

ESTUDIO DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

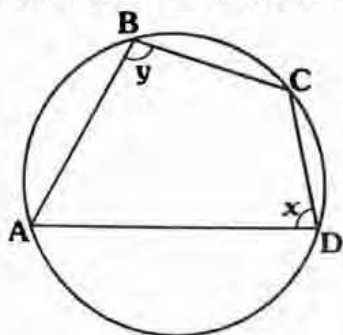
Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.



- $\square ABCD$: inscrito en $\odot$
- $\odot$: circunferencia circunscrita al $\square ABCD$

PROPIEDADES

- ❖ En todo cuadrilátero inscrito, sus ángulos opuestos son suplementarios.



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = 180^\circ$$

Prueba

– Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{ABC} = 2x \quad y \quad m\widehat{ADC} = 2y$$

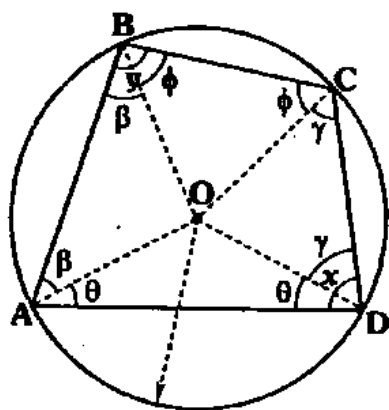
– Como:

$$m\widehat{ABC} + m\widehat{ADC} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 360^\circ$$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

Otra forma



– Como los triángulos AOD, DOC, COB y AOB son isósceles entonces: $x = \theta + \gamma$ y $y = \beta + \phi$

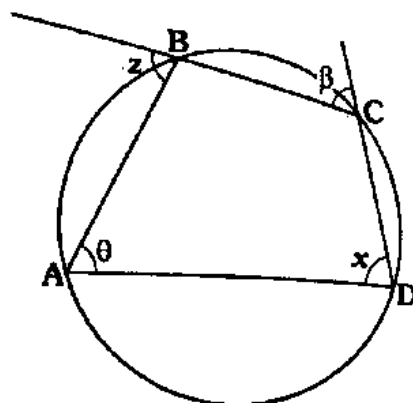
– En $\triangle ABCD$:

$$2\beta + 2\phi + 2\gamma + 2\theta = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \beta + \phi + \gamma + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore y + x = 180^\circ$$

2 En todo cuadrilátero inscrito un ángulo interior tiene igual medida que su ángulo exterior opuesto.



Se cumple:

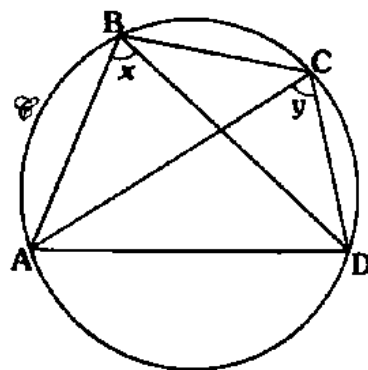
$$x = z$$

También:

$$\theta = \beta$$

La prueba es consecuencia de la anterior.

3 En todo cuadrilátero inscrito las diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida.



$\triangle ABCD$ inscrito en $\odot$

Se cumple:

$$x = y$$

Prueba

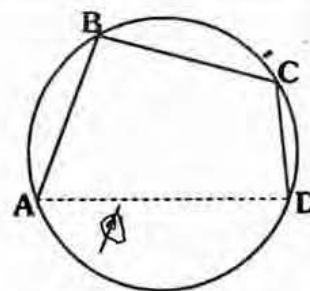
Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AD} = 2x = 2y$$

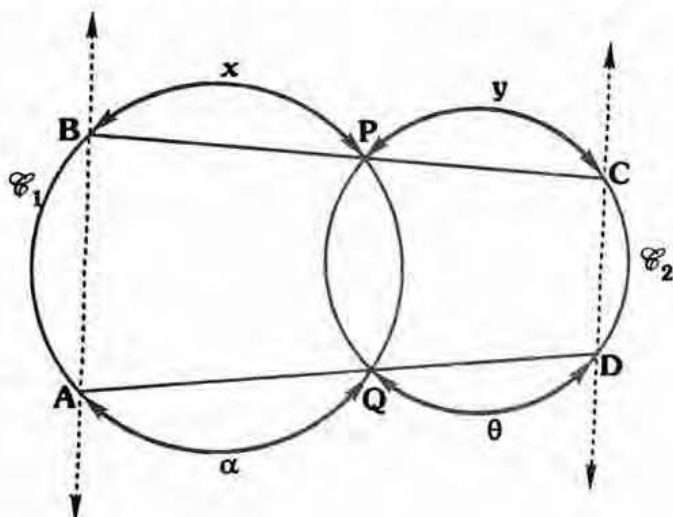
$$\therefore x = y$$

Nota

Cuando se tenga tres cuerdas consecutivas en una circunferencia es recomendable completar el cuadrilátero inscrito.



4 En el gráfico, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias secantes.



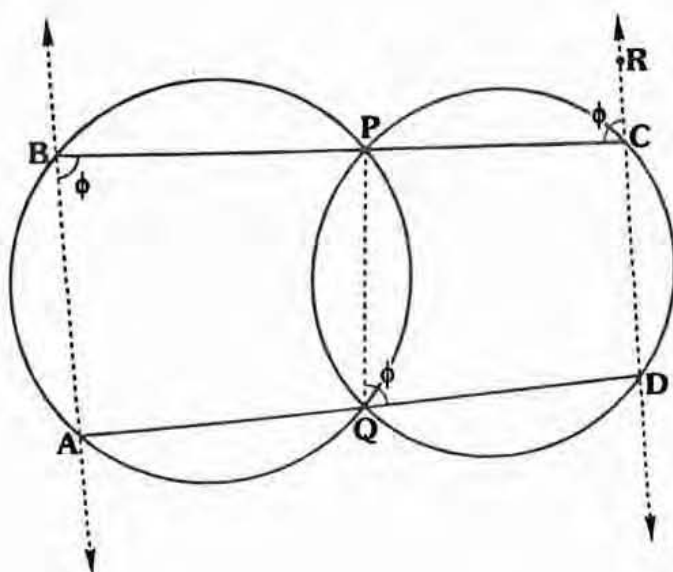
Se cumple:

I) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

II) $x + y = \alpha + \theta$

Prueba

I)



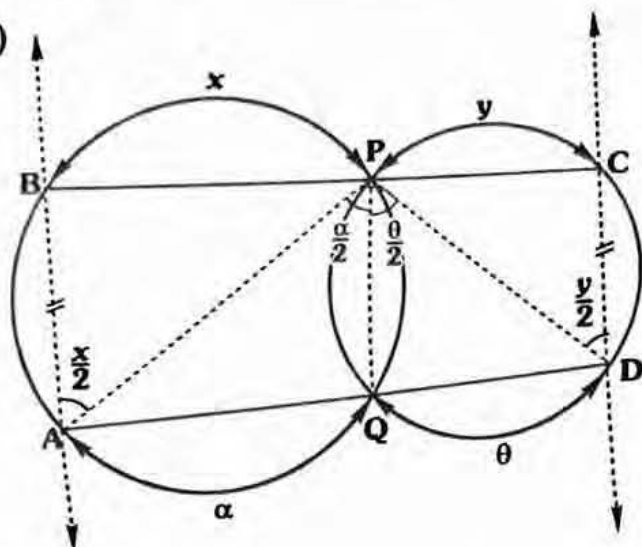
- Se traza $\overline{PQ}$ entonces $\triangle ABPQ$ y $\triangle QPCD$ son inscritos entonces:

$$m\angle ABP = m\angle PQD = m\angle PCR$$

- Por el recíproco de ángulos alternos, internos:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

II)



- Por propiedad anterior: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
- Por ángulo inscrito:

$$m\angle BAP = \frac{x}{2} \quad ; \quad m\angle APQ = \frac{\alpha}{2}$$

$$m\angle QPD = \frac{\theta}{2} \quad y \quad m\angle PDC = \frac{y}{2}$$

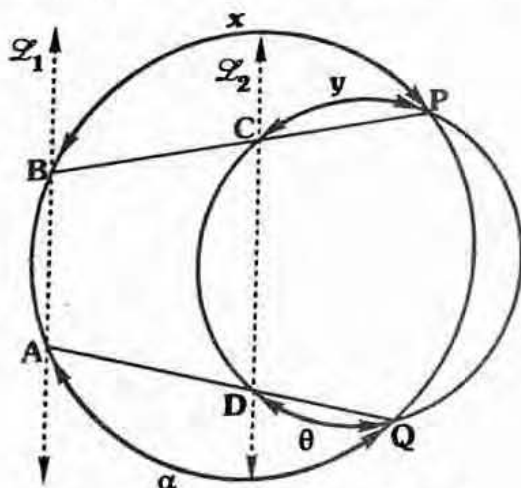
- Por propiedad de las paralelas:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x + y = \alpha + \theta$$

Observación

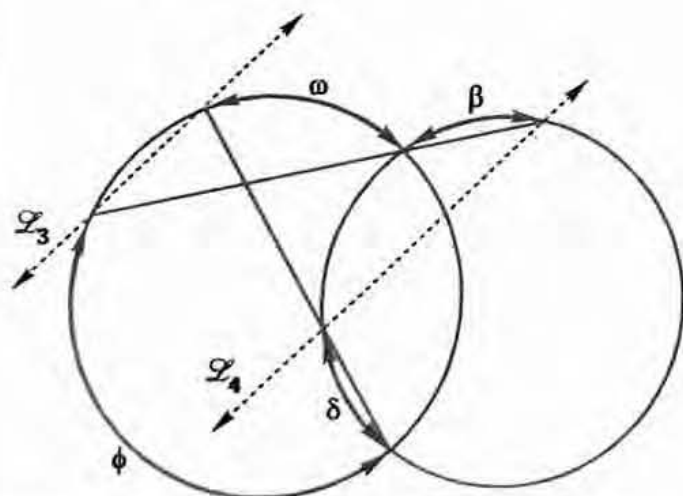
Veamos otras posibilidades del último teorema:



Se cumple:

$$\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \quad y$$

$$x - y = \alpha - \theta$$



Se cumple:

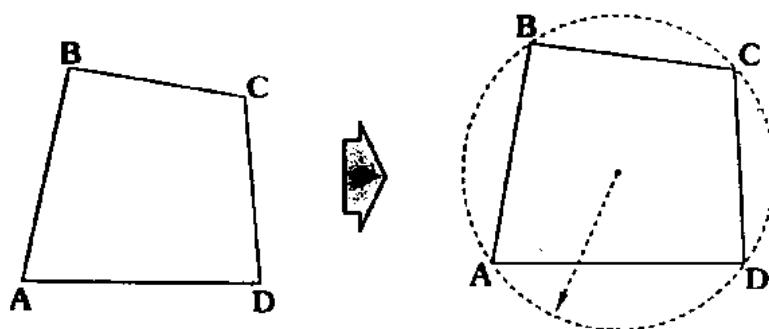
$$\overline{L_3} \parallel \overline{L_4} \quad y$$

$$\phi - \delta = \omega + \beta$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

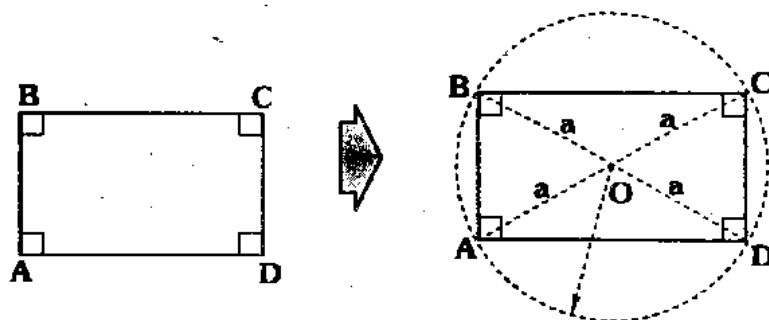
Un cuadrilátero se denomina inscriptible si por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.



Si el $\square ABCD$ se puede inscribir en una circunferencia entonces $\square ABCD$ es inscriptible.

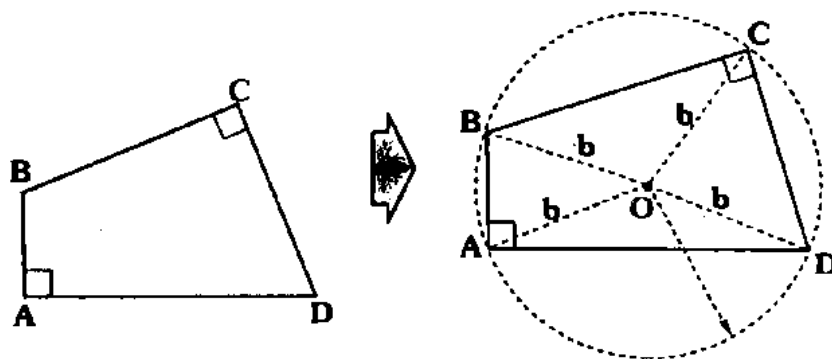
Ejemplos

- El rectángulo es un cuadrilátero inscriptible



Como $AO = OC = BO = OD$, O es el centro de una circunferencia que pasa por A, B, C y D.

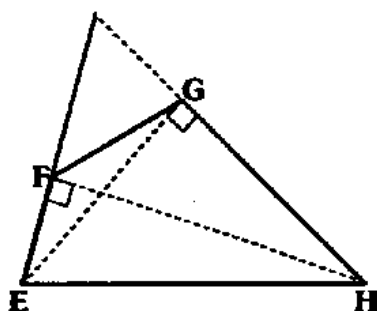
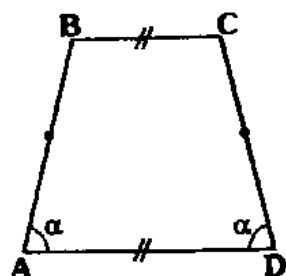
- El cuadrilátero de ángulos opuestos rectos es inscriptible.



En el $\triangle BAD$, se traza la mediana $\overline{AO} \Rightarrow BO = OD = AO = b$ y en el $\triangle BCD$, $BO = b$. O equidista de A, B, C y D.

$\therefore \square ABCD$ es inscriptible

- Los siguientes casos también son inscriptibles.

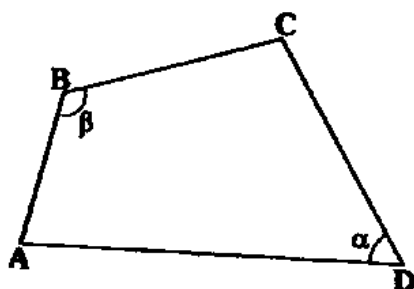


Los cuadrilateros ABCD y EFGH son inscriptibles.

TEOREMAS

(CASOS COMUNES PARA RECONOCER A UN CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE)

- ♦ Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son suplementarios es inscriptible.

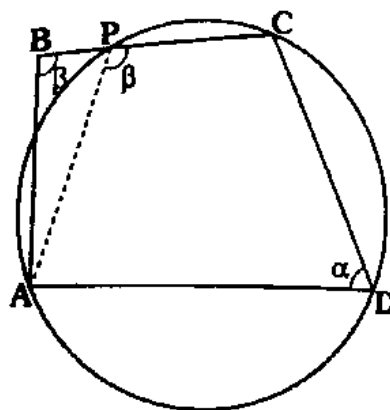


$$\text{Si } \alpha + \beta = 180^\circ$$

$\Rightarrow \square ABCD$ es inscriptible

Prueba

- Se traza la circunferencia que pasa por A, D y C supongamos que no pasa por B.



- Se tendrá el $\triangle APCD$ inscrito entonces $m\angle APC + \alpha = 180^\circ$, como:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

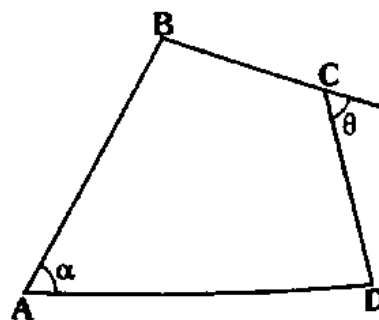
$$\Rightarrow m\angle APC = \beta$$

- En $\triangle ABP$:

$$m\angle ABP = m\angle APC$$

$$\Rightarrow B = P$$

- ♦ Todo cuadrilátero que tiene un ángulo interior y su ángulo exterior opuesto de igual medida, es inscriptible.

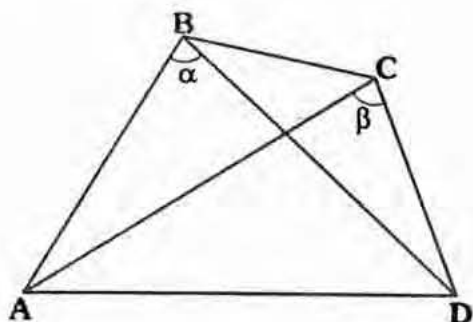


$$\text{Si } \alpha = \theta$$

$\Rightarrow \square ABCD$ es inscriptible

La prueba es análoga a la anterior.

- ♦ En todo cuadrilátero convexo en el que las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos, es inscriptible.



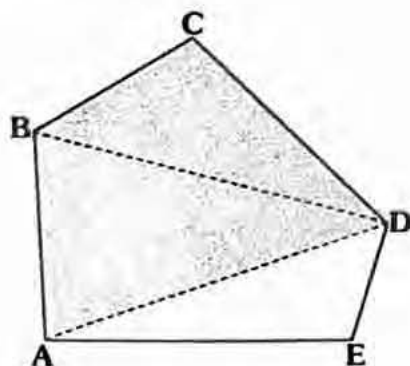
$$\text{Si } \alpha = \beta$$

$\Rightarrow \triangle ABCD$ es inscriptible.

La prueba es análoga a la primera.

Observación

- Si dos cuadriláteros que tienen como vértices los del pentágono son inscriptibles (por ejemplo: $ABCD$ y $ABDE$)

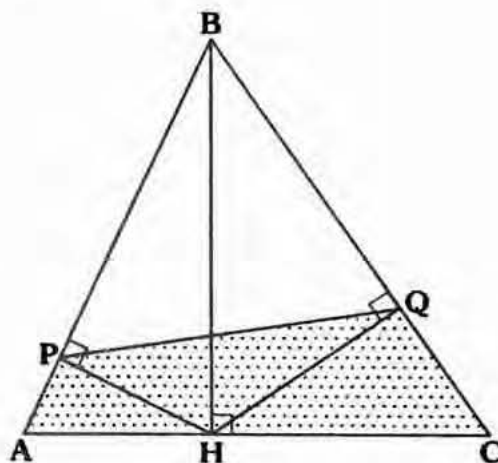


Si $ABCD$ y $ABDE$ son inscriptibles entonces $ABCDE$ es inscriptible

ALGUNOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES

A continuación veremos algunos cuadriláteros inscriptibles que están presentes en diversas figuras algunas relacionadas con circunferencias, ángulos rectos o puntos medios.

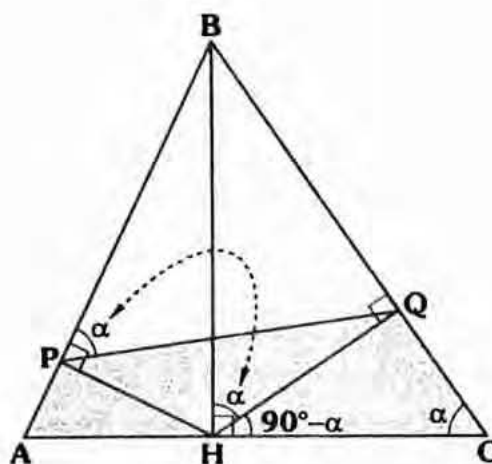
Resulta muy interesante que definidos cuatro puntos con cierta característica, por ellos pase una misma circunferencia.



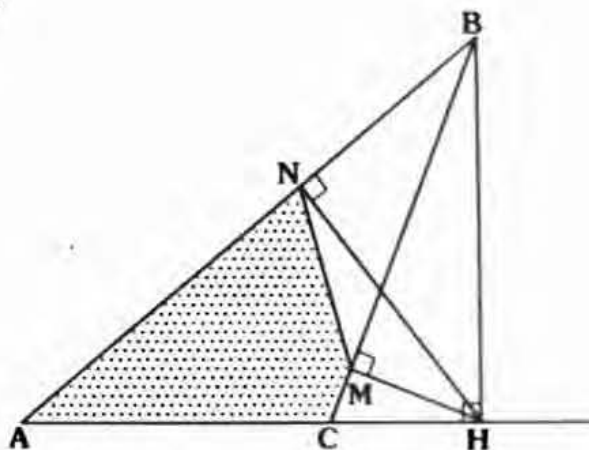
Se cumple:

$\triangle APQC$ es inscriptible

Prueba



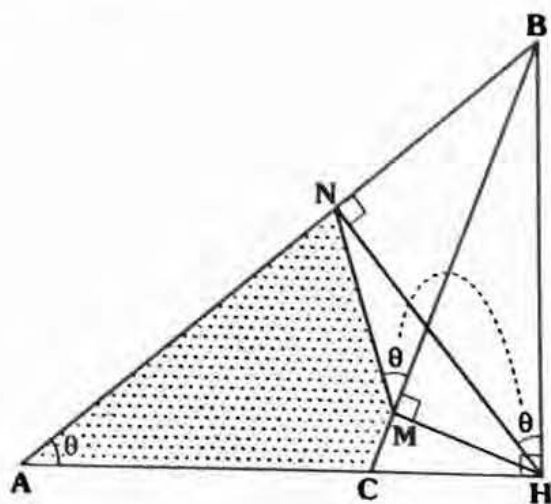
- Sea $m\angle BCA = \alpha$
 $\Rightarrow m\angle QHC = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow m\angle QHC = \alpha$
- $\triangle HPBQ$: inscriptible
 $\Rightarrow m\angle QPB = \alpha$
- Como: $m\angle ACQ = m\angle QPB$
 $\Rightarrow \triangle APQC$: inscriptible



Se cumple:

$\triangle ANMC$: inscriptible

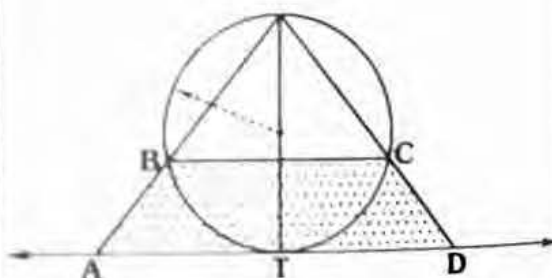
Prueba



- Sea: $m\angle BAC = \theta$
- En $\triangle AHB$:
 $m\angle HNB = \theta$
- Como el $\triangle HMNB$ es inscriptible
 $m\angle HMB = \theta$
 $\therefore \triangle ANMC$ es inscriptible

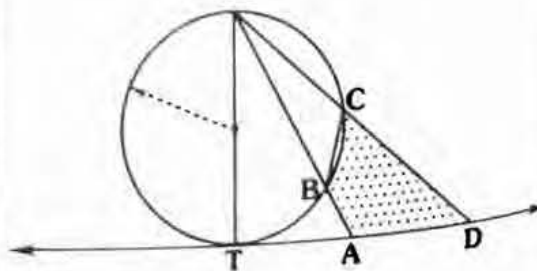
Observación

Los siguientes casos son en realidad los casos anteriores



Se cumple

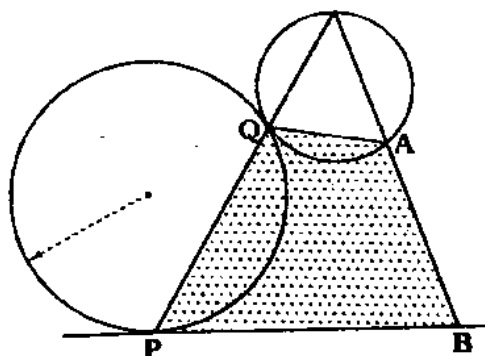
$\triangle ABCD$: inscriptible



Se cumple:

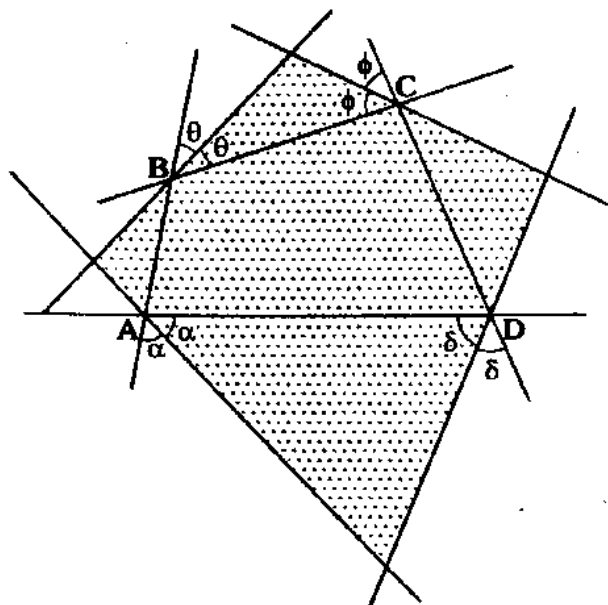
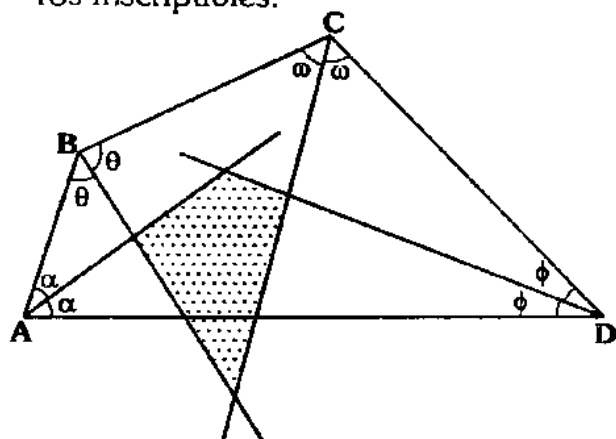
$\triangle ABCD$ es inscriptible

- ♦ P y Q son puntos de tangencia



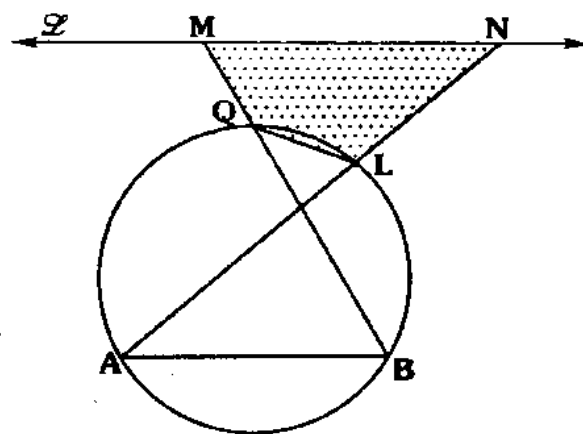
Se cumple que el $\triangle PQAB$ es inscriptible
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

- ♦ En los dos casos indicados, las regiones sombreadas corresponden a cuadriláteros inscriptibles.



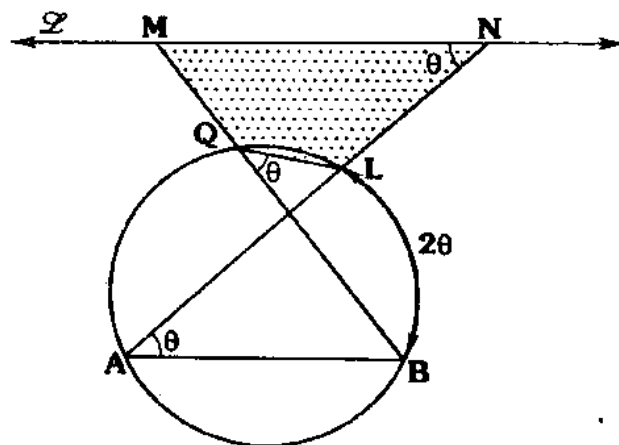
Ambas pruebas se dejan como ejercicio.

- ♦ En el gráfico, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$



Se cumple que el $\triangle MNLQ$ es inscriptible

Prueba



• Sea:

$$m\angle BAL = \theta$$

$$\rightarrow m\angle ANM = \theta$$

• Como:

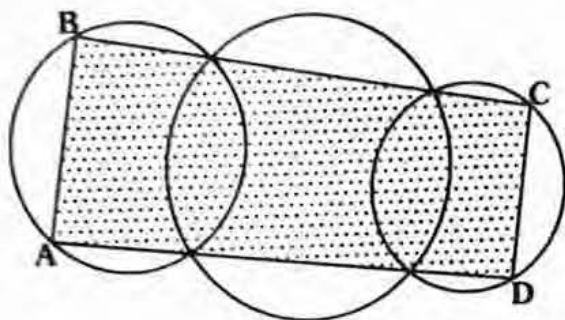
$$m\widehat{LB} = 2\theta$$

$$\rightarrow m\angle LQB = \theta$$

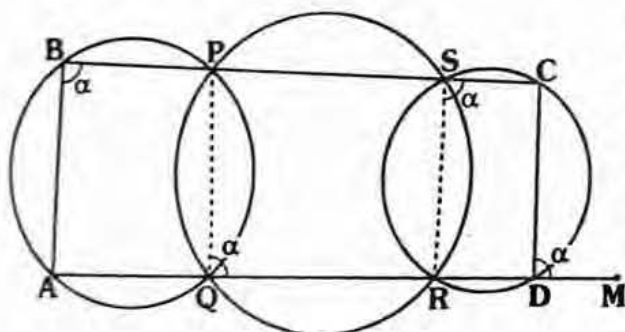
$\therefore \triangle MNLQ$ es inscriptible

♦ En el gráfico, se cumple:

$\square ABCD$ es inscriptible



Prueba



• Notemos que los cuadrilateros ABPQ, QPSR y RSCD son inscritos.

• Sea:

$$m\angle ABP = \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle PQR = \alpha$$

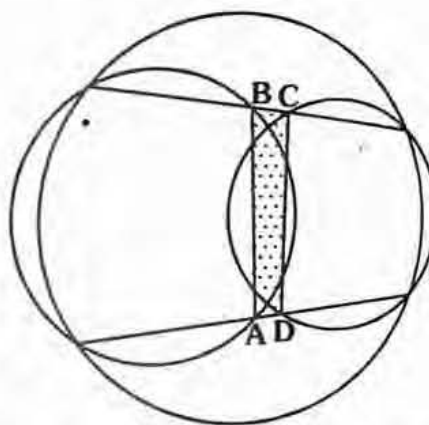
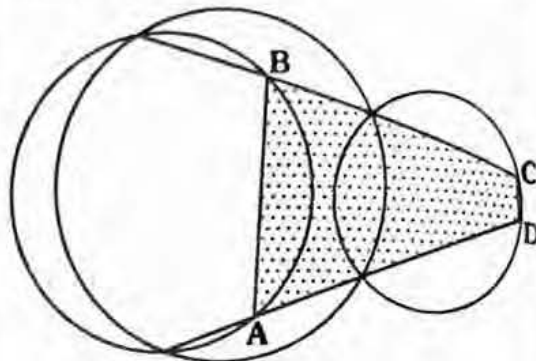
$$\Rightarrow m\angle RSC = \alpha \quad y$$

$$m\angle CDM = \alpha$$

$\therefore \square ABCD$ es inscriptible.

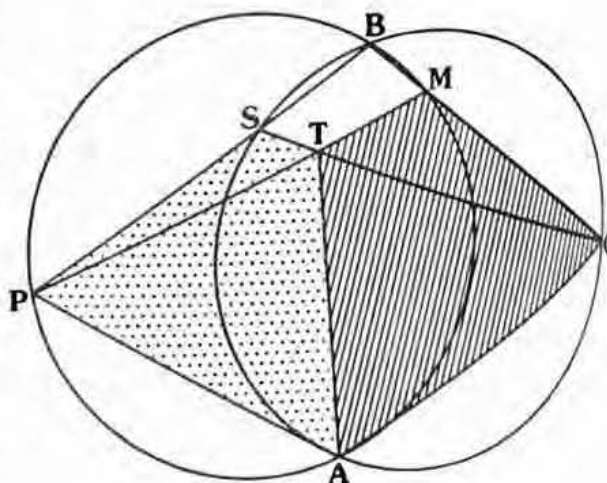
Observación

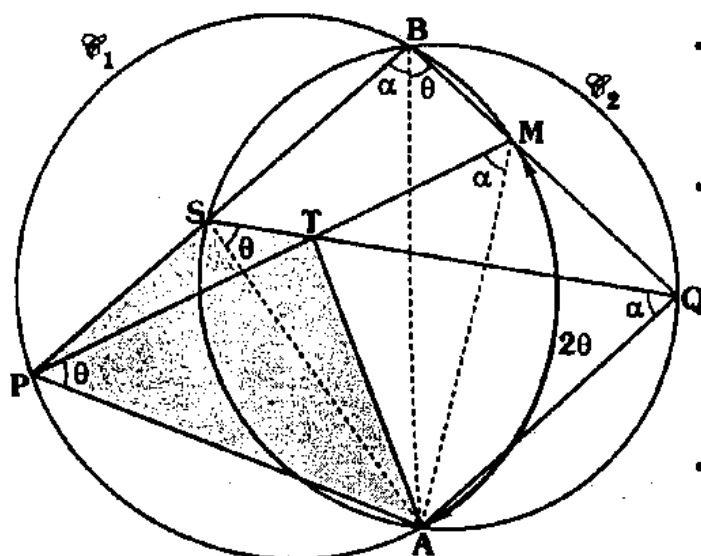
En los siguientes casos también se cumple:



♦ En el gráfico, se cumple:

$\square PSTA$ y $\square ATMQ$: inscriptibles





- Sea $m\angle APM = \theta$ entonces en C_1 :

$$m\angle ABM = \theta$$

- En C_2 :

$$m\angle ASQ = m\angle ABQ = \theta$$

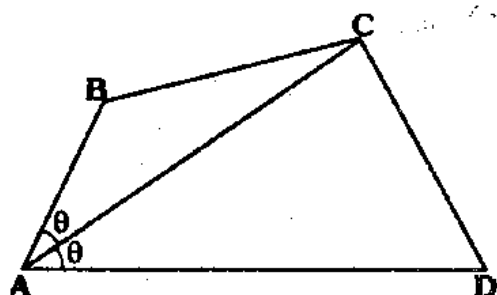
$$m\angle APT = m\angle AST$$

$\triangle PSTA$: inscriptible

- Análogamente:

$\triangle ATMQ$ es inscriptible

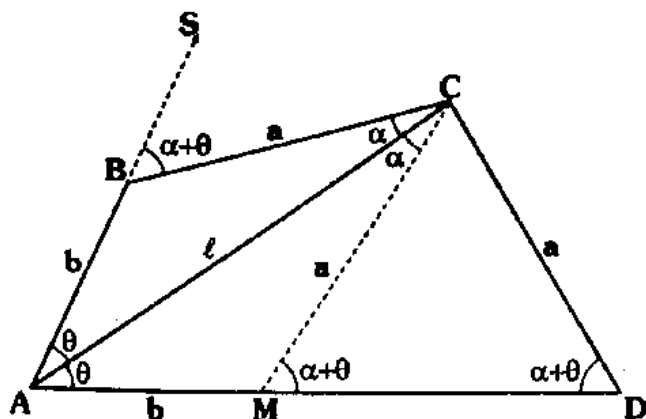
♦ En el gráfico, $BC = CD$ y $AB \neq AD$



Se cumple: $\triangle ABCD$ es inscriptible



Supongamos que $AD > AB$



- Sea $AM = AB$

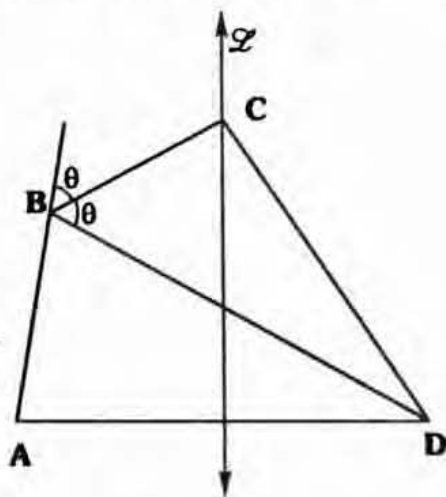
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AMC \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow BC = CM$$

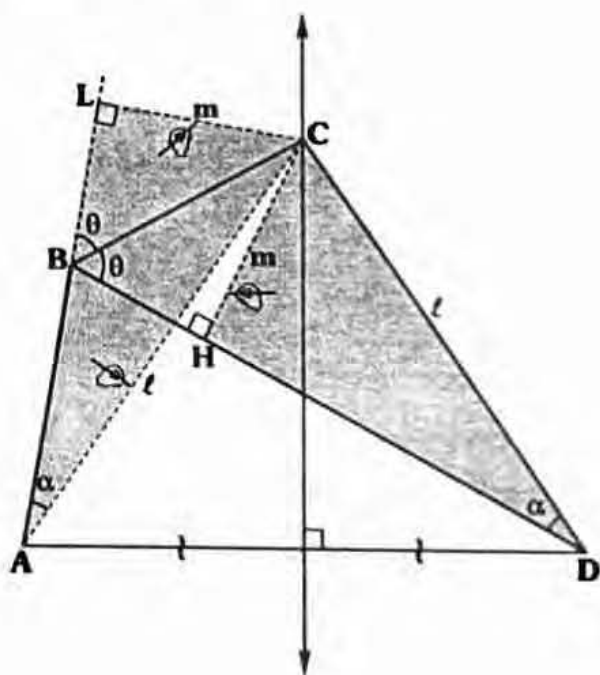
$$\Rightarrow m\angle ADC = m\angle SBC \in \ell$$

$\triangle ABCD$ es inscriptible

- ♦ En el gráfico, $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el $\triangle ABCD$ es inscriptible.

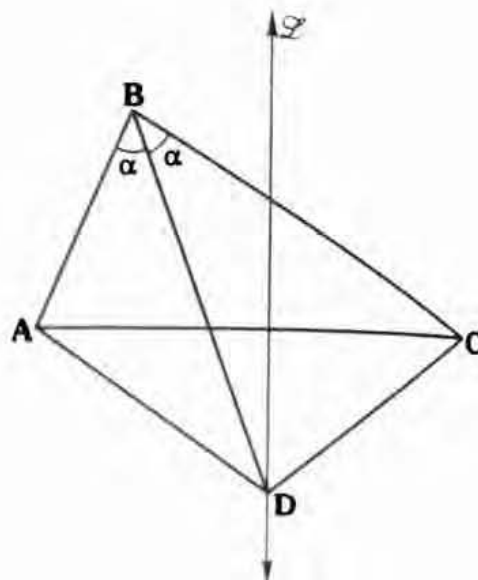


Prueba



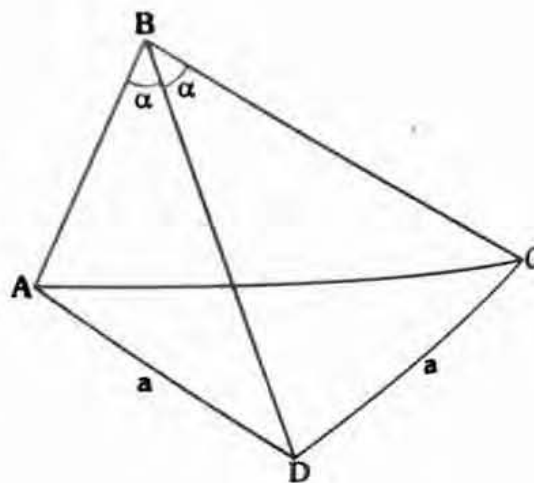
- Se traza $\overline{CL} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ entonces $CL = CH$
- Por teorema de la mediatriz: $CA = CD$
- $\triangle ALC \cong \triangle CHD$
 $\Rightarrow m\angle CAL = m\angle CDB$
 $\therefore \triangle ABCD$ es inscriptible

- ♦ En el gráfico, $AB \neq BC$ y $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el cuadrilátero ABCD es inscriptible.



Prueba

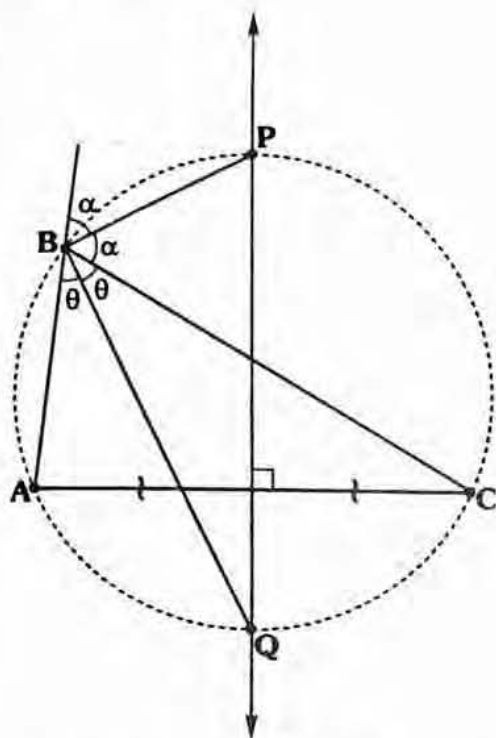
- Por teorema de la mediatriz:
 $DA = DC$
- Como $AB \neq CD$ entonces es el mismo caso resuelto en la pág. 61.



$\triangle ABCD$: inscriptible

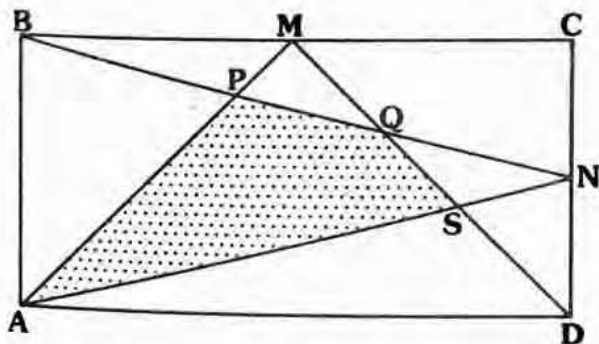
Observación

Juntando los dos gráficos anteriores, tendremos:



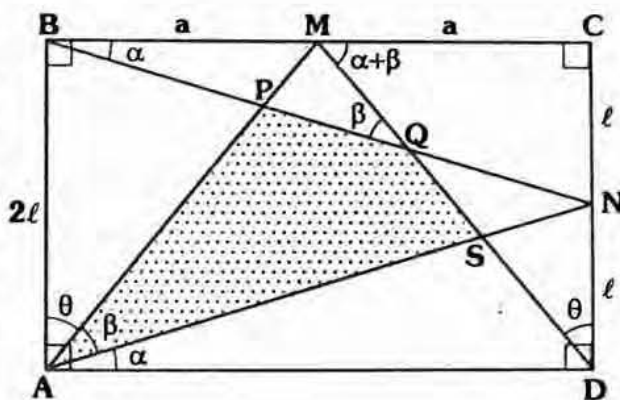
Se cumple que $ABPCQ$ es inscriptible.

- ♦ En el gráfico, $ABCD$ es un rectángulo, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.



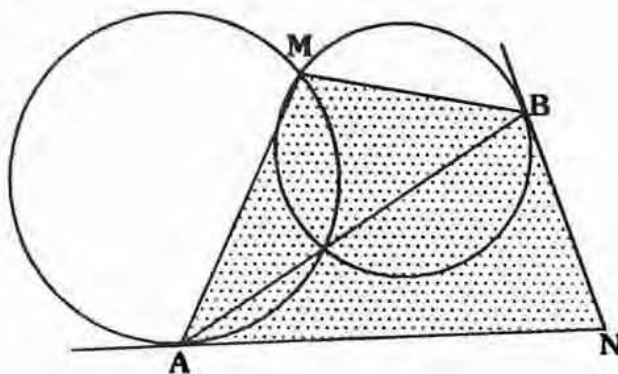
Se cumple que $\triangle APQS$ es inscriptible.

Prueba



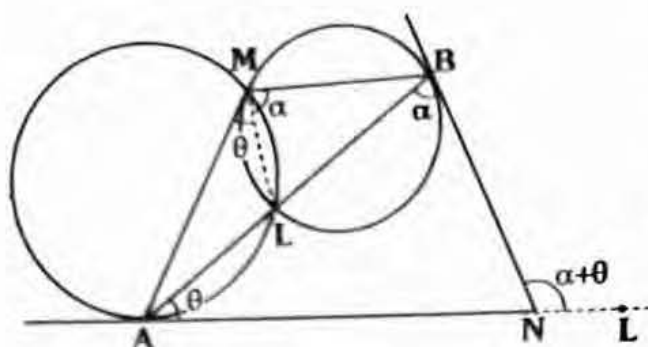
- $\triangle ABM \cong \triangle DCM$
 $\rightarrow m\angle BAM = m\angle CDM = \theta$
- $\triangle DAN \cong \triangle CBN$
 $\rightarrow m\angle NAD = m\angle NBC = \alpha$
- Sea:
 $m\angle PAS = \beta$
 $\rightarrow \alpha + \beta + \theta = 90^\circ$
- En $\triangle BMQ$:
 $m\angle BQM = \beta$
 $\therefore \triangle ABQS$: inscriptible

- ♦ A y B son puntos de tangencia



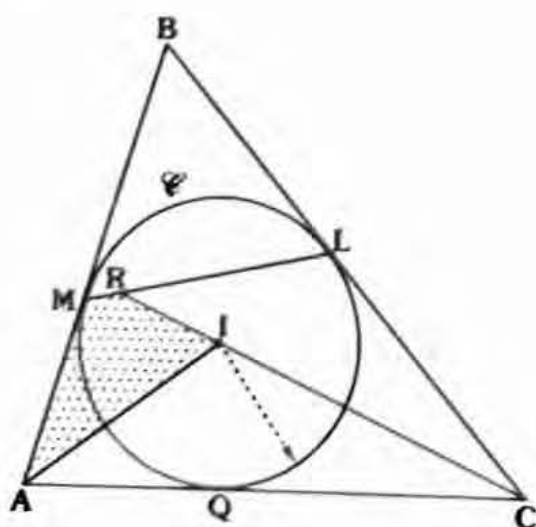
Se cumple que el $\triangle AMBN$ es inscriptible.

Prueba



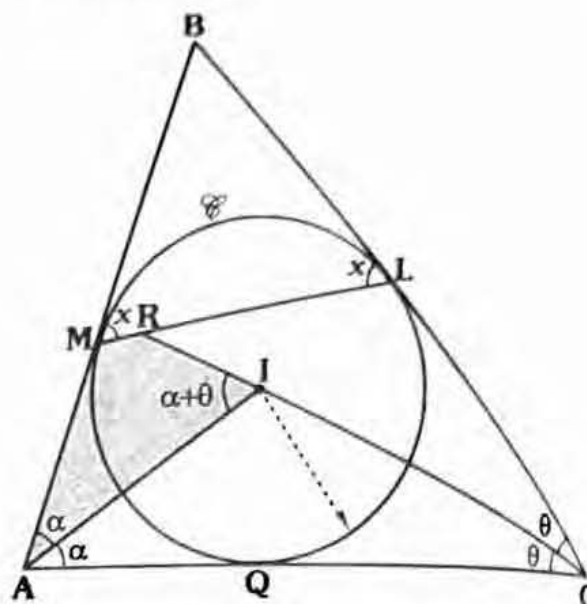
- Como :
 $m\angle AML = m\angle BAN = \theta$ y
 $m\angle LMB = m\angle LBN$
 $\rightarrow m\angle BNL = \alpha + \theta$
 $\therefore \triangle AMBN$ es inscriptible

- ♦ En el gráfico, $\mathcal{C}$ es la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.
 Se cumple:



$\triangle AMRL$ inscriptible

Prueba

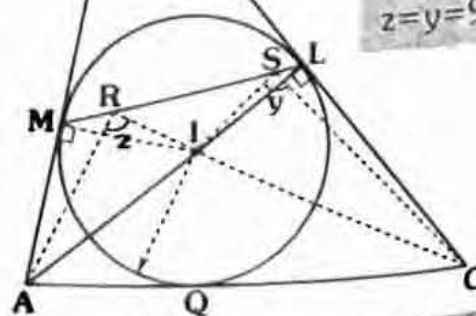


- Sea : $m\angle IAC = \alpha$ y $m\angle ACI = \theta$
 $\Rightarrow m\angle IAM = \alpha$ y $m\angle ICL = \theta$
- En $\triangle AIC$:
 $m\angle AIR = \alpha + \theta$
- En $\triangle AMLC$:
 $x + x = 2\alpha + 2\theta$
 $\Rightarrow x = \alpha + \theta$
- Como: $m\angle AIR = m\angle RMB$ entonces el $\triangle AMRI$ es inscriptible.

Observación ①

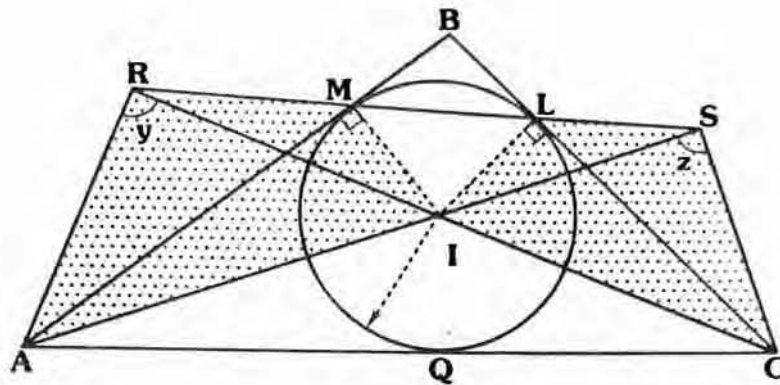
Se cumple: $\triangle AMRI$ y $\triangle ISLC$ inscriptibles
 También:

$$z = y = 90^\circ$$



Observación ②

Otra posibilidad de gráfico, puede ser:



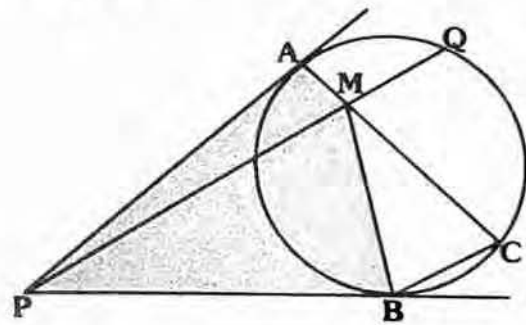
Se cumple:

- $\triangle ARI$ y $\triangle CSI$: inscriptibles
- $y = z = 90^\circ$

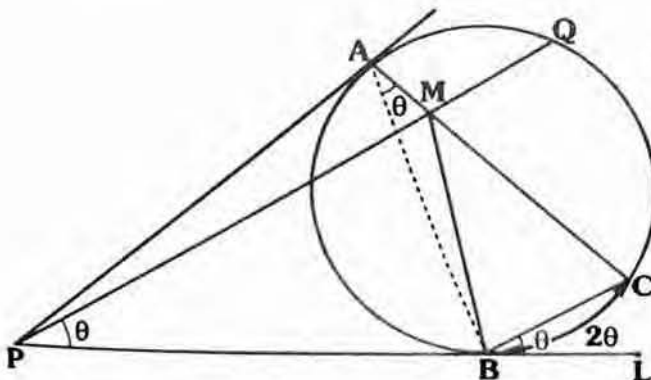
♦ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$.

Se cumple:

$\triangle PAMB$: inscriptible



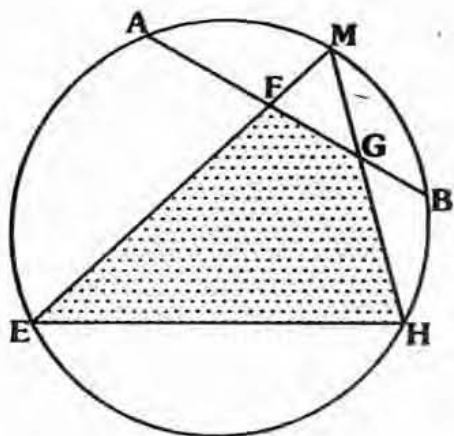
Prueba



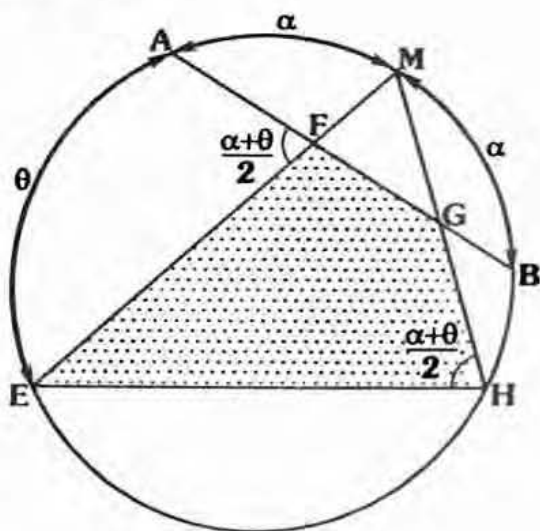
- Sea $m\angle QPB = \theta \Rightarrow m\angle CBL = \theta$
 $\Rightarrow m\widehat{BC} = 2\theta \Rightarrow m\angle BAC = \theta$
- Como:
 $m\angle BPM = m\angle BAM$
 $\Rightarrow \triangle PAMB$ es inscriptible

- ♦ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

$\triangle EFGH$: inscriptible



Prueba



- Sea:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = \alpha \quad \text{y} \quad m\widehat{AE} = \theta$$

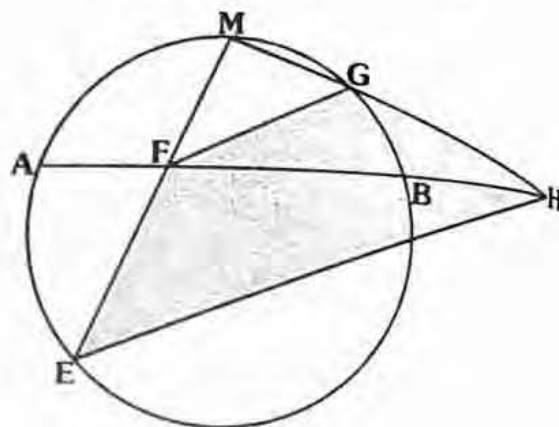
Por $\angle$ inscrito: $m\angle EHM = \frac{\alpha + \theta}{2}$

• Por $\angle$ interior: $m\angle AFE = \frac{\alpha + \theta}{2}$

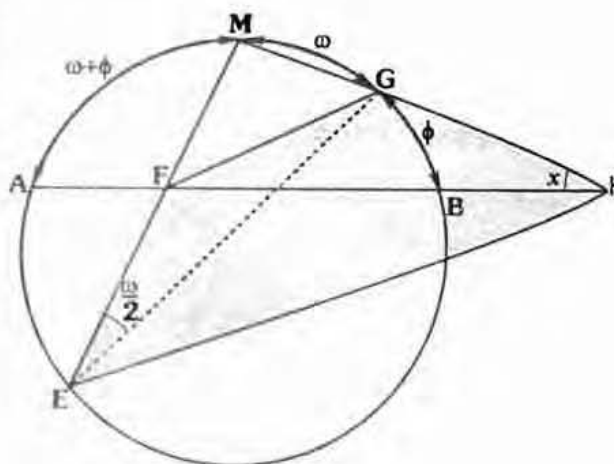
$\Rightarrow \triangle EFGH$ es inscriptible

- ♦ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

$\triangle EFGH$: inscriptible



Prueba



- Sea:

$$m\widehat{MG} = \omega \quad \text{y} \quad m\widehat{GB} = \phi$$

$$\Rightarrow m\widehat{AM} = \omega + \phi$$

Por $\angle$ inscrito: $m\angle FEG = \frac{\omega}{2}$

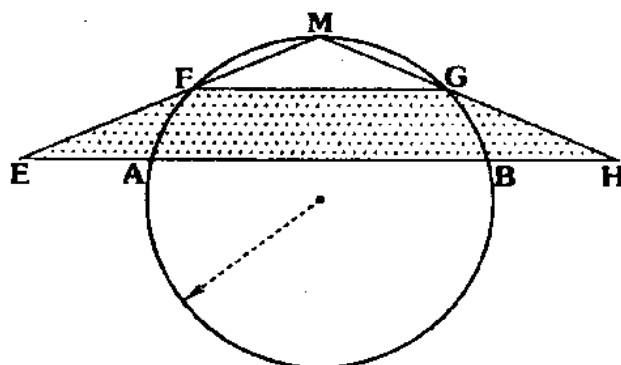
• Por $\angle$ exterior: $x = \frac{\omega + \phi - \phi}{2} = \frac{\omega}{2}$

• Como $m\angle FEG = m\angle FHG$ entonces el $\triangle EFGH$ es inscriptible.

♦ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.

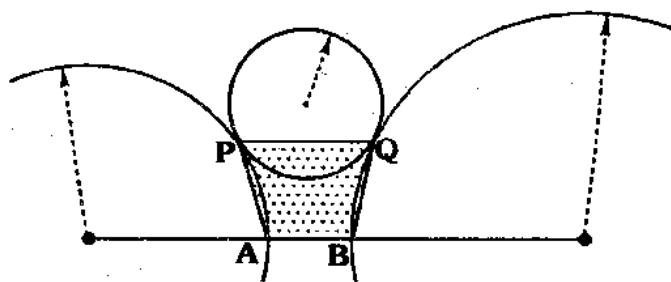
Se cumple:

$\triangle EFGH$ es inscriptible



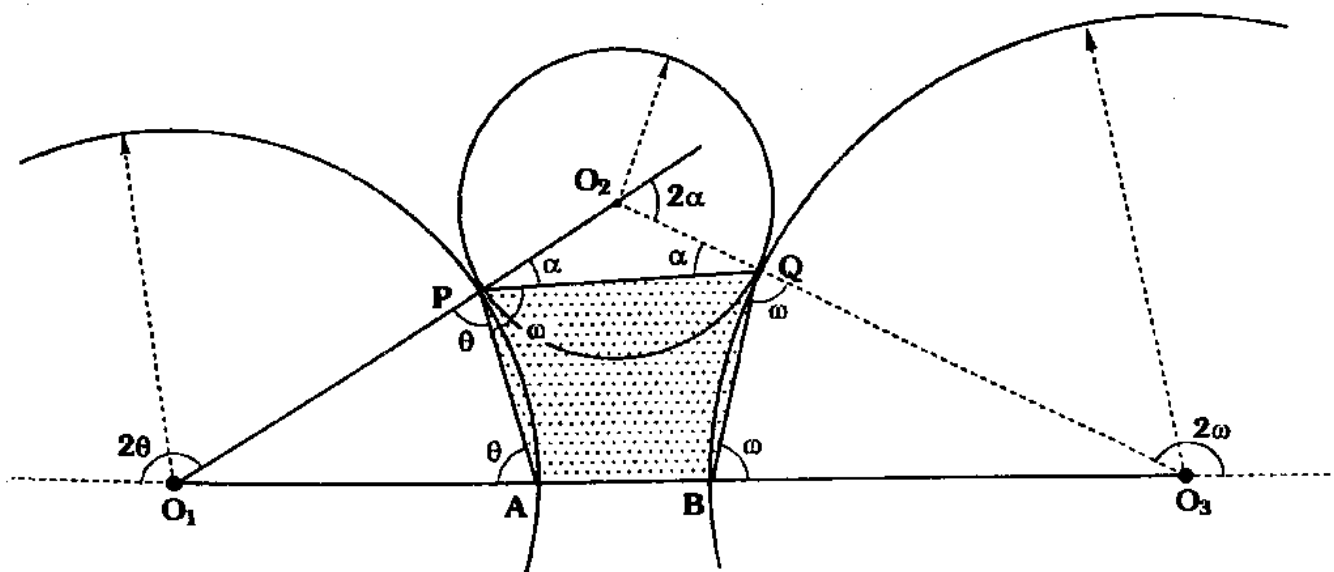
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

♦ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia



Se cumple que el $\triangle APQB$ es inscriptible

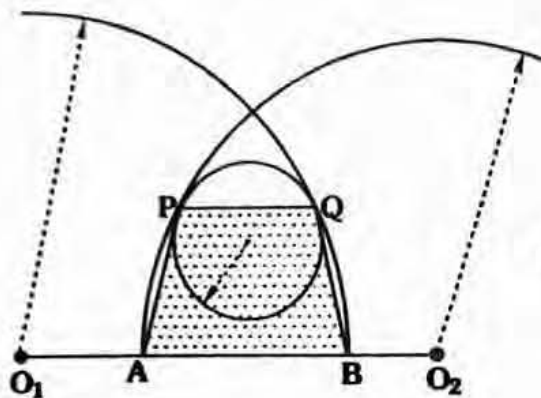
Prueba



- Se sabe que O_1, P y O_2 son colineales, lo mismo que O_2, Q y O_3 .
- En $\triangle O_1 O_2 O_3$: $2\theta + 2\alpha + 2\omega = 360^\circ \rightarrow \theta + \alpha + \omega = 180^\circ$
- Luego $m\angle APQ = \omega$

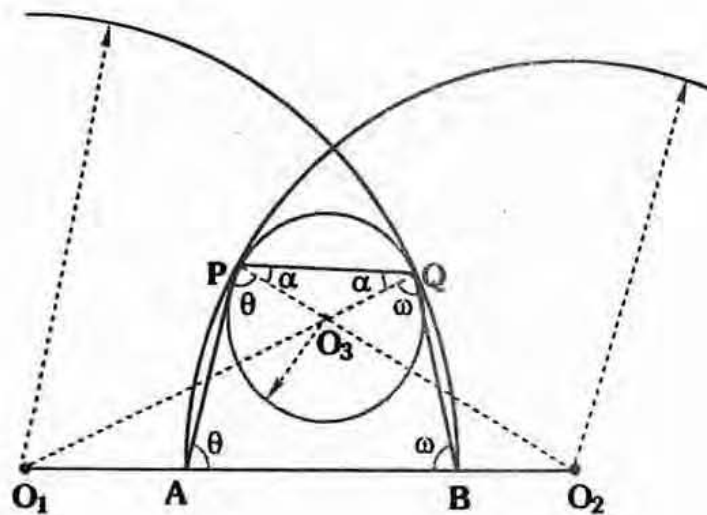
$\therefore \triangle APQB$ es inscriptible

♦ P y Q son puntos de tangencia



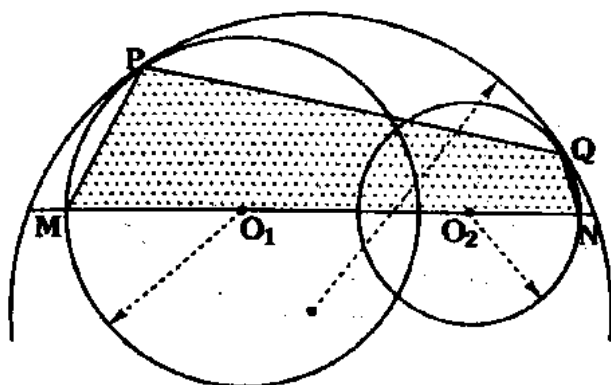
Se cumple que el $\triangle APQB$ es inscriptible.

Prueba



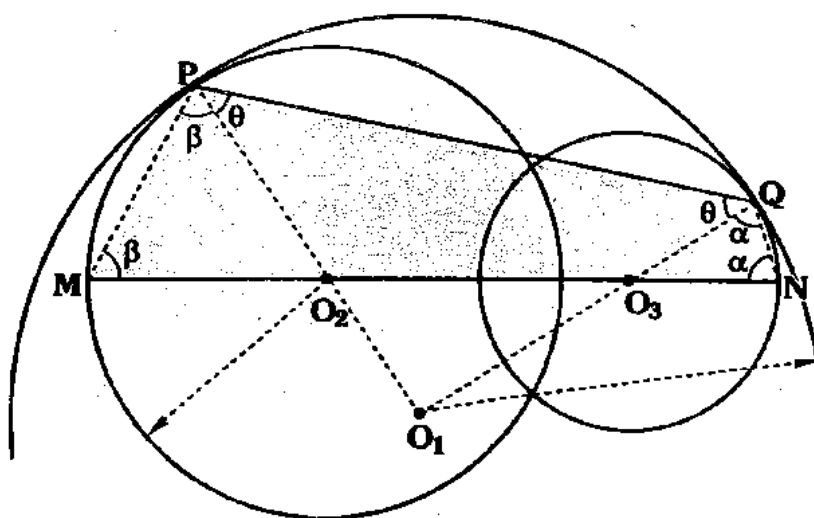
- O_1, O_3 y Q : colineales
 - P, O_3 y O_2 colineales
 - $\triangle O_1 Q B$, $\triangle A P O_2$ y $\triangle P O_3 Q$: isósceles
 - En $\triangle APQB$: $2\theta + 2\alpha + 2\omega = 360^\circ \Rightarrow \theta + \alpha + \omega = 180^\circ$
- $\therefore \triangle APQB$ es inscriptible

♦ P y Q son puntos de tangencia



Se cumple: $\triangle MPQN$ es inscriptible.

Prueba



- O_1 , O_2 y P son colineales lo mismo que O_1 , O_3 y Q.
- $\triangle MO_2P$, $\triangle O_1PQ$ y $\triangle O_3QN$: son isósceles
- En $\triangle MPQN$:

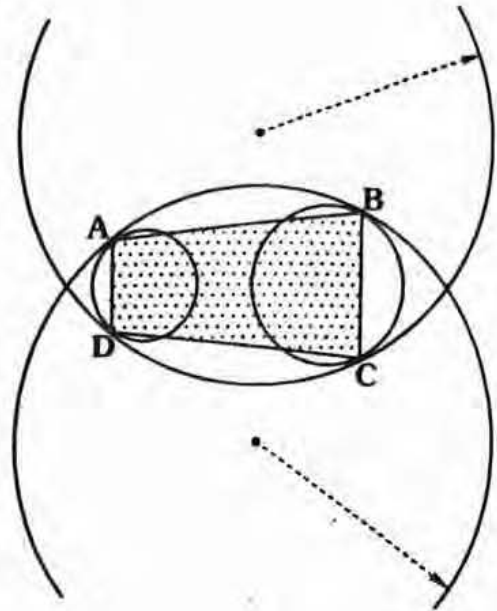
$$2\beta + 2\theta + 2\alpha = 360^\circ \rightarrow \beta + \theta + \alpha = 180^\circ$$

$\therefore \triangle MPQN$ es inscriptible

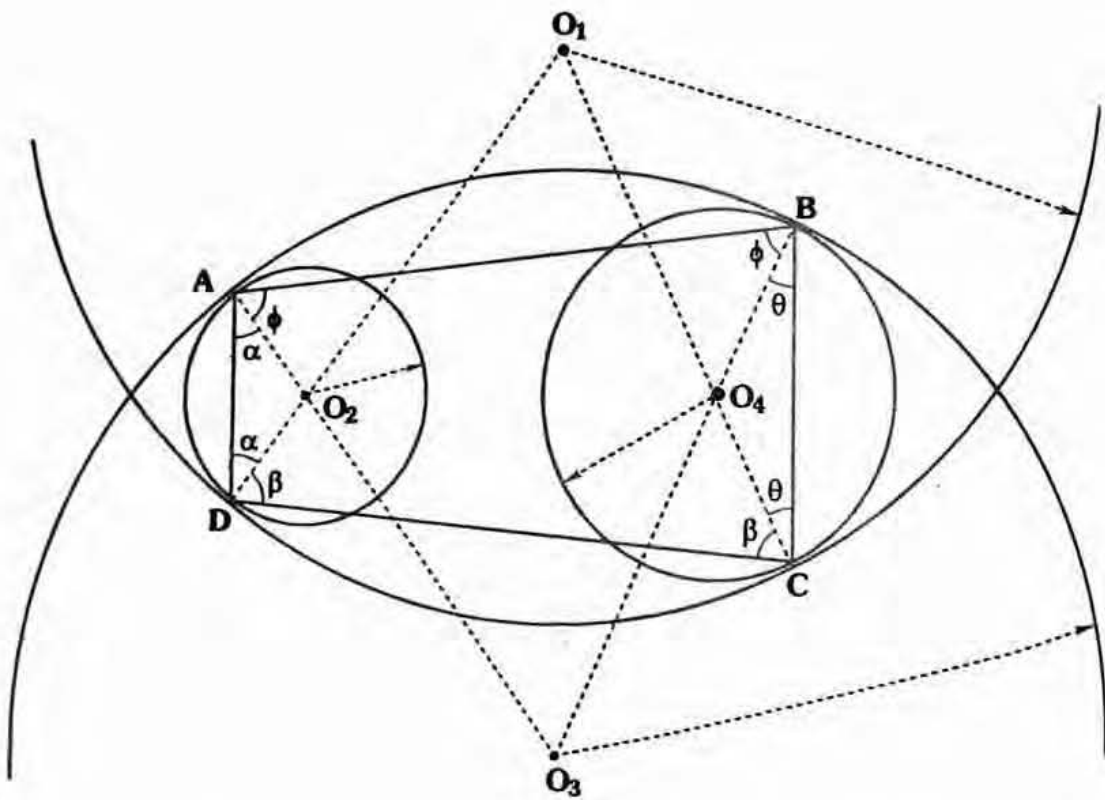
♦ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

$\triangle ABCD$ es inscriptible



Prueba



- La prueba no es difícil, basta ubicar los centros de las circunferencias y unirlos así: (O_3, O_2, A) ; (O_3, O_4, B) ; (O_1, O_2, B) y (O_1, O_4, C) las ternas indicadas son colineales.

- Como los triángulos ADO_2 , DCO_1 , ABO_3 y BCO_4 son isósceles.
- En $\triangle ABCD$: $2\alpha + 2\beta + 2\theta + 2\phi = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \theta + \phi = 180^\circ$

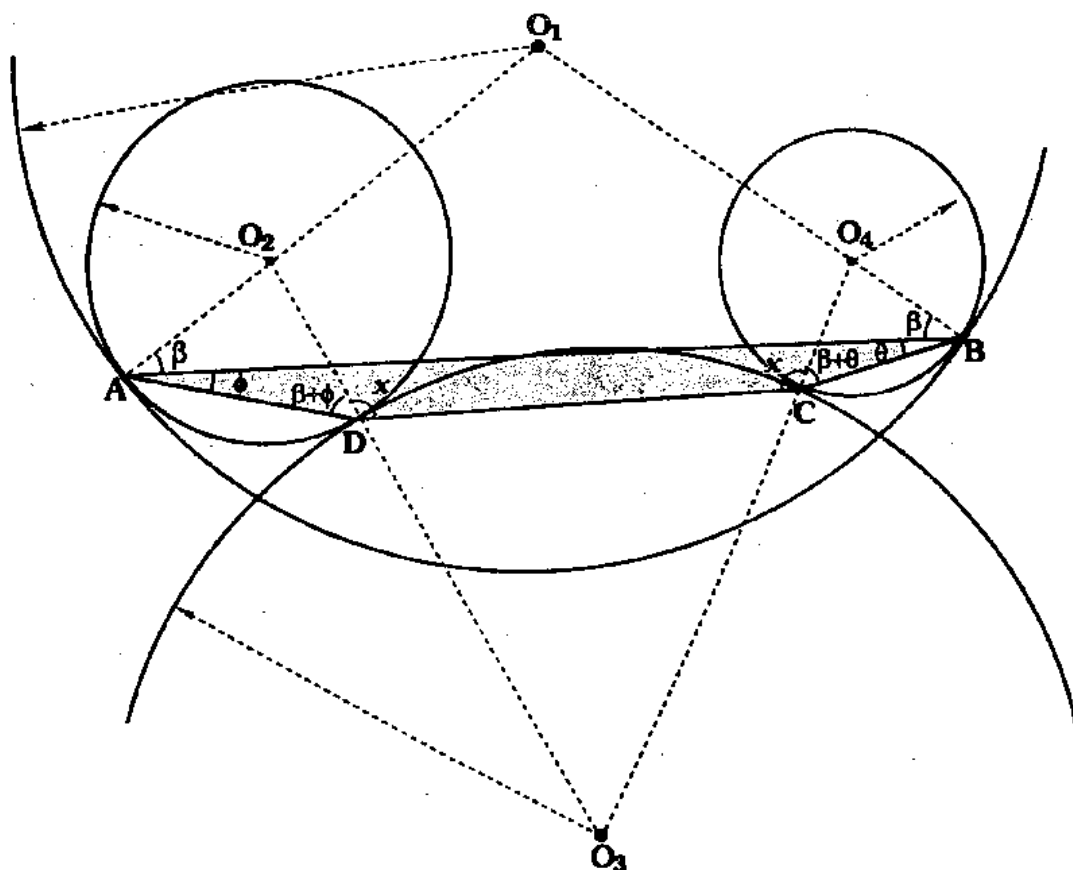
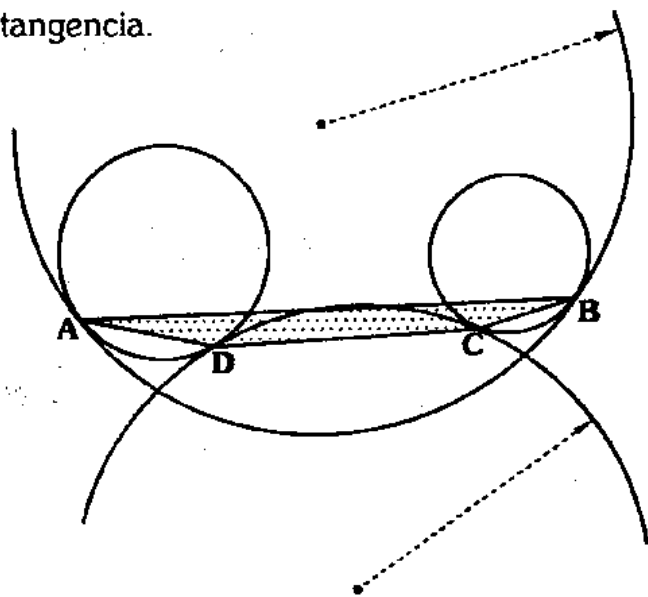
Luego dicho $\triangle$ es incriptible.

♦ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

$\triangle ABCD$ es incriptible

Prueba



• En forma análoga a la anterior notemos: ΔO_3DC , ΔAO_2D y ΔCBO_4 son isósceles

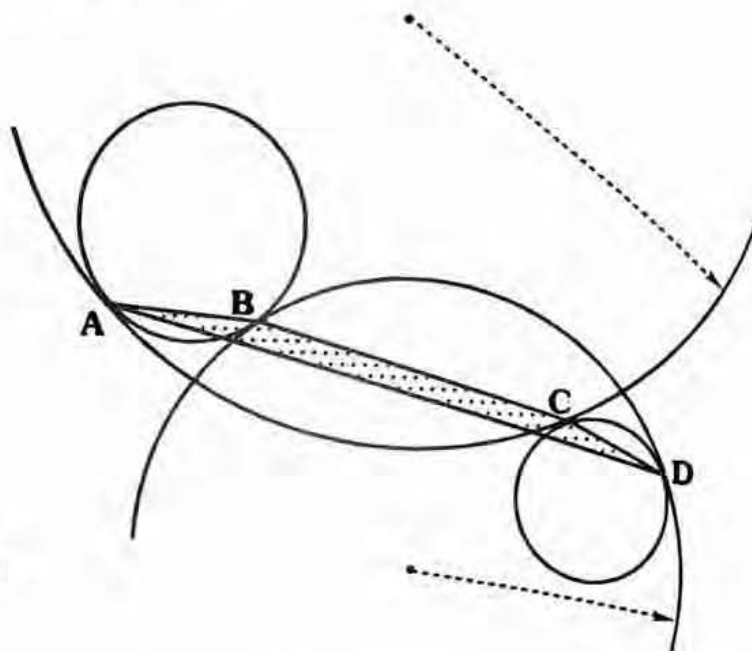
• $\Delta ABCD$: $2\theta + \beta + x + x + \phi + \beta + \phi = 360^\circ \rightarrow \theta + \beta + x + \phi = 180^\circ$

$\therefore \Delta ABCD$ es inscriptible

♦ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

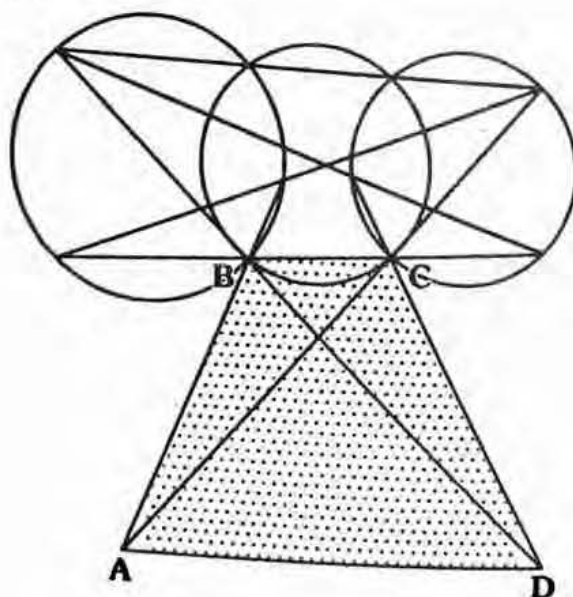
$\Delta ABCD$ es inscriptible



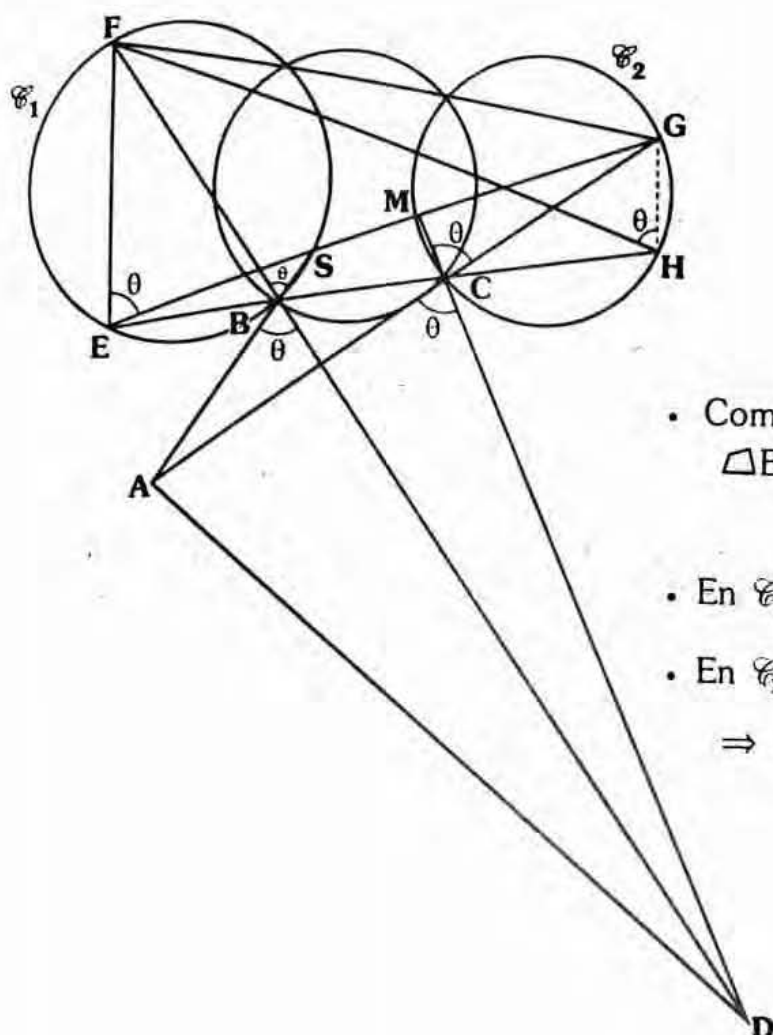
La prueba se deja como ejercicio.

♦ En el gráfico, se cumple:

$\Delta ABCD$ es inscriptible

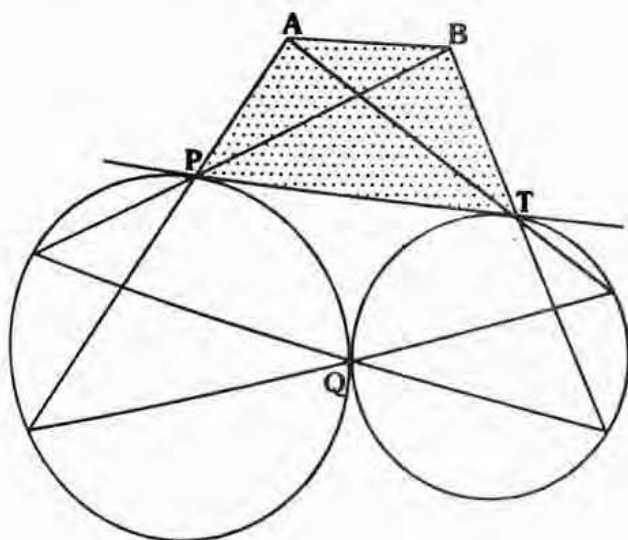


Prueba



- Como aplicación de la página 60, el $\triangle EFGH$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle FEG = m\angle FHG = \theta$
- En C_1 : $m\angle FBS = \theta$
- En C_2 : $m\angle ABD = m\angle ACD$
 $\Rightarrow \triangle ABCD$ es inscriptible

♦ En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.



Se cumple:

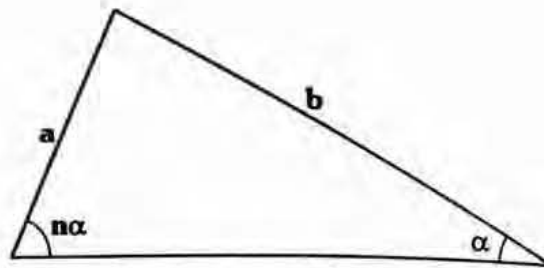
- $\triangle ABTP$ es inscriptible
- $m\angle PAT = m\angle PBT = 90^\circ$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

- ♦ En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Se cumple:

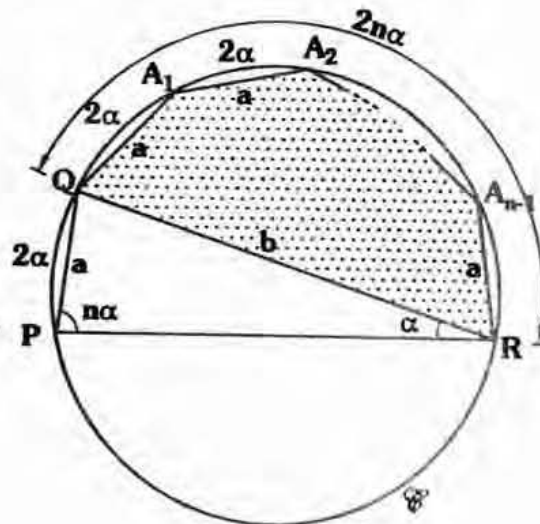
$$b < na$$



Prueba

En el capítulo de triángulos ya se demostró, pero con las herramientas dadas en circunferencia tendremos un mejor enfoque.

Veamos otra posibilidad:



- Se inscribe el ΔPQR en la circunferencia $\therefore \Rightarrow m\widehat{PQ} = 2\alpha$ y

$$m\widehat{PQ} = 2n\alpha \Rightarrow m\widehat{QR} = n(m\widehat{PQ})$$

- Luego dividimos el arco QR en "n" Partes iguales

$$\Rightarrow QA_1 = A_1A_2 \dots = A_{n-1}R = a$$

- En la región sombreada:

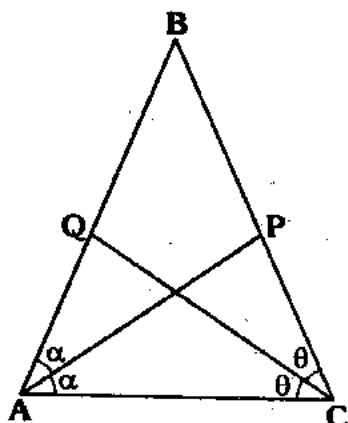
$$b < \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ veces}}$$

$$\therefore b < na$$

(Prueba por R.Ch.S)

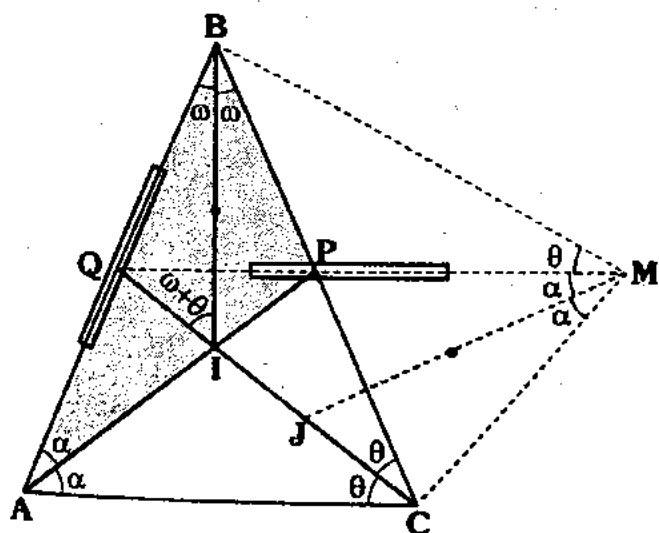
TEOREMA DE STEINER - LEHMUS

Todo triángulo que tenga dos bisectrices interiores de igual longitud es un triángulo isósceles. El teorema fue por primera vez mencionado en 1840 en una carta escrita por C.L. Lehmus enviada por C. Sturm, en la cual pidió una prueba puramente geométrica a C. Sturm, el cual pasó la petición a otros matemáticos y Jakob Steiner fue uno de los primeros en ofrecer una solución.



$$\text{Si } AP = CQ \Rightarrow AB = BC$$

Prueba



- Como $AP = QC$ entonces construye el triángulo QMC congruente con APB talque $AB = QM$ y $BP = CM$

$$\Rightarrow m\angle ABP = m\angle QMC$$

$$\Rightarrow \triangle Q BMC: \text{ inscriptible}$$

- En los triángulos ABP y QMC : $\overline{BI}$ y $\overline{MJ}$ son bisectrices homólogas entonces $BI = MJ$

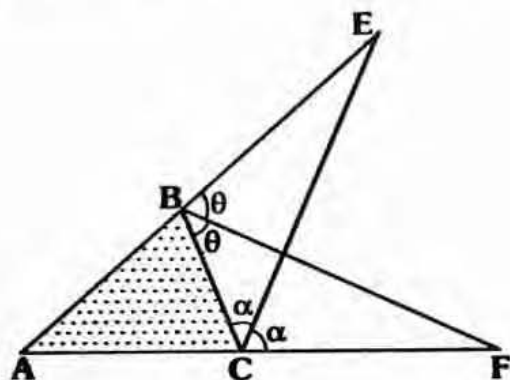
- Luego: $\triangle IBMJ$ es trapecio isósceles

$$\Rightarrow \triangle IBMJ \text{ es trapecio isósceles}$$

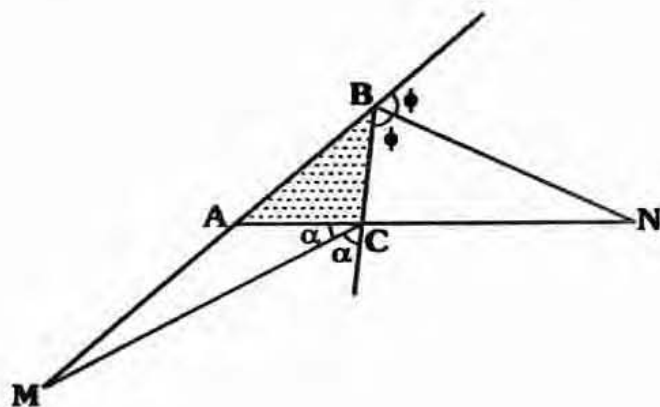
$$\Rightarrow \underline{QM} = BC$$

$$\therefore AB = BC$$

Veamos que si dos bisectrices exteriores son de igual longitud, entonces el triángulo no necesariamente es triángulo isósceles.

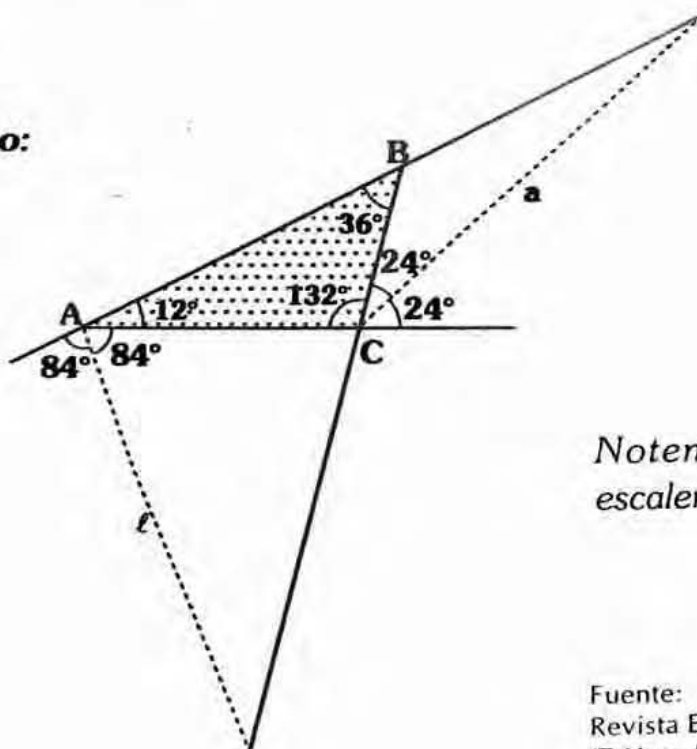


Si : $BF = CE$
 $\Rightarrow AB = AC$



Si $CM = BN$ entonces AC y BC no son iguales necesariamente.

 Ejemplo:



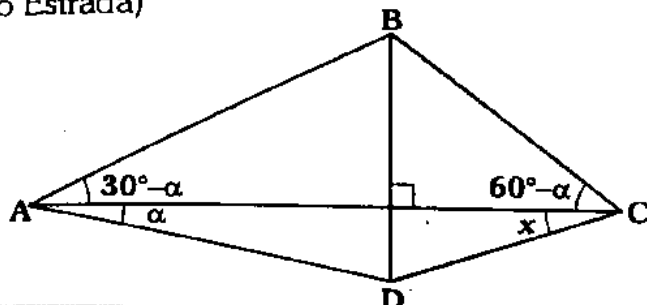
Notemos que el $\triangle ABC$ es escaleno, sin embargo:

$$a = l$$

Fuente:
 Revista Escolar Iberoamericana de Matemáticas
 (Triángulos especiales - Bellot Rosado)

TEOREMA

(Casos genéricos de cuadriláteros convexos de diagonales perpendiculares - Por Diego Bravo Estrada)



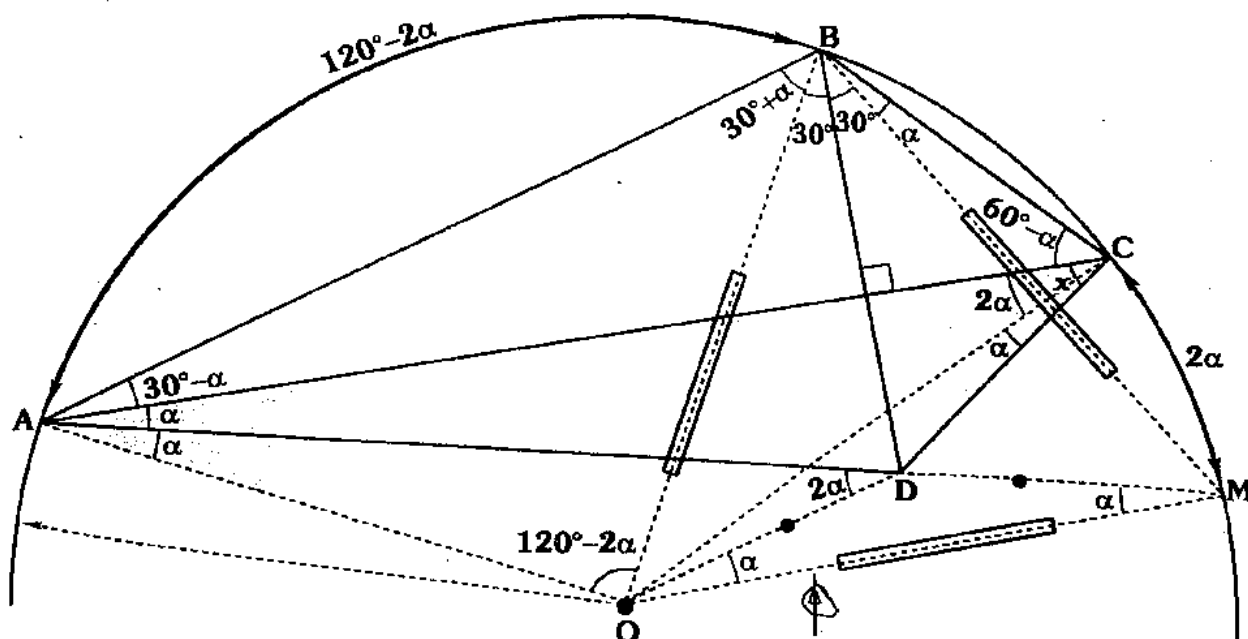
En el gráfico, $\alpha < 30^\circ$

Se cumple:

$$x = 3\alpha$$

Prueba

- Se traza la circunferencia que pasa por A, B y C de centro O.



- La prolongación a $\overline{AD}$ corta a la circunferencia en M entonces Δ es equilátero.
- Notemos: $m\angle MBC = \alpha$ y $m\widehat{AB} = 120^\circ - 2\alpha \Rightarrow m\angle OAM = \alpha \Rightarrow m\angle ABO = 30^\circ + \alpha$
- ΔAOC : isósceles $\Rightarrow m\angle OCA = 2\alpha$
- ΔAOM : isósceles $\Rightarrow m\angle OMA = \alpha$
- En ΔOBM equilátero, como $m\angle OBD = m\angle DBM = 30^\circ \Rightarrow OD = DM$
 $\Rightarrow m\angle DOM = \alpha \Rightarrow m\angle ODA = 2\alpha$
- Como $m\angle ACO = m\angle ADO$ entonces $\Delta AODC$: inscriptible entonces $m\angle DCO = \alpha$

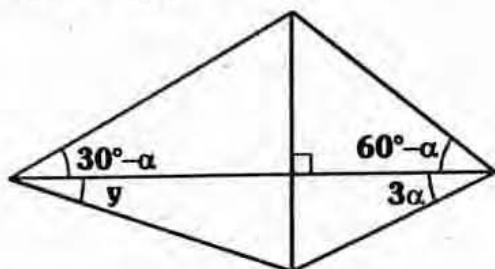
$$\therefore x = 3\alpha$$

Observaciones

- La prueba anterior es equivalente a la propiedad trigonométrica

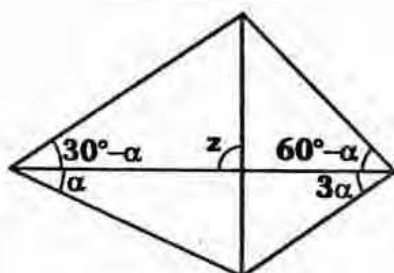
$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$$

La propiedad anterior, es recíproca (Veamos algunos casos)



Se cumple

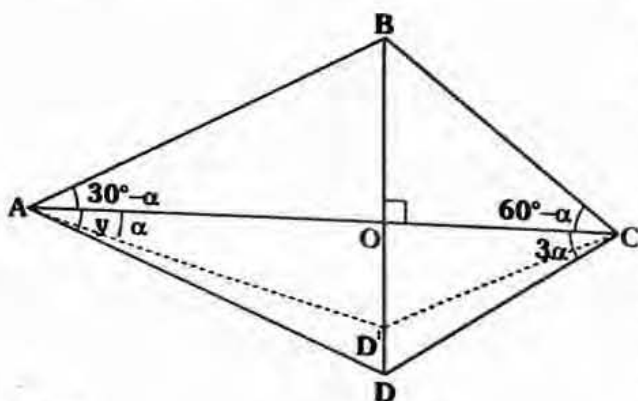
$$y = \alpha$$



Se cumple

$$z = 90^\circ$$

- Para la prueba optemos por el método del absurdo.



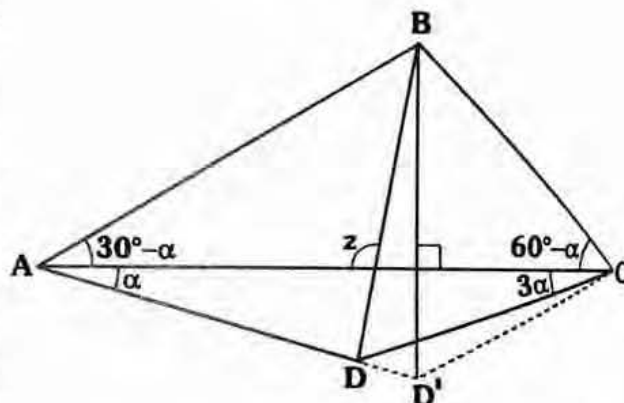
- Supongamos que $y \neq \alpha$, entonces se ubica D' en $\overline{OD}$ tal que $m\angle CAO = \alpha$.
- Por teorema:

$$m\angle ACO = 3\alpha \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$$\text{pues } m\angle ACD = 3\alpha$$

$$\therefore y = \alpha$$

- Para la demostración de la segunda parte, en forma similar (por el absurdo supongamos que $z \neq 90^\circ$).



- Sea D'' en $\overline{AD}$ tal que $\overline{BD''} \perp \overline{AC}$ entonces por teorema anterior:

$$m\angle ACD'' = 3\alpha$$

- Pero: $m\angle ACD = 3\alpha \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

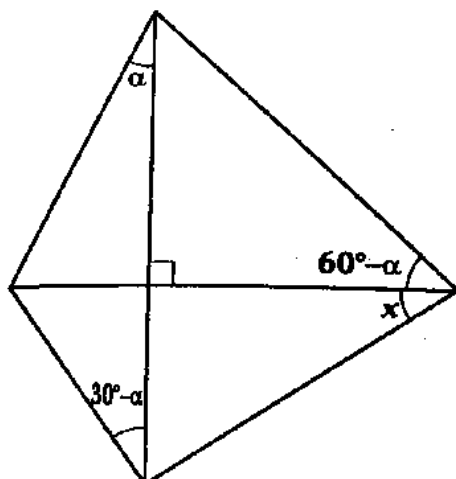
$$\therefore D = D''$$

$$\therefore z = 90^\circ$$

Prueba

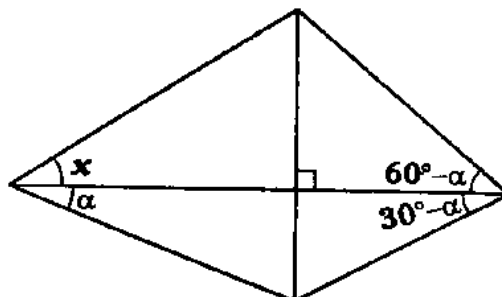
- Las siguientes propiedades son consecuencias de la anterior (estas a su vez son recíprocas).

Se cumple:



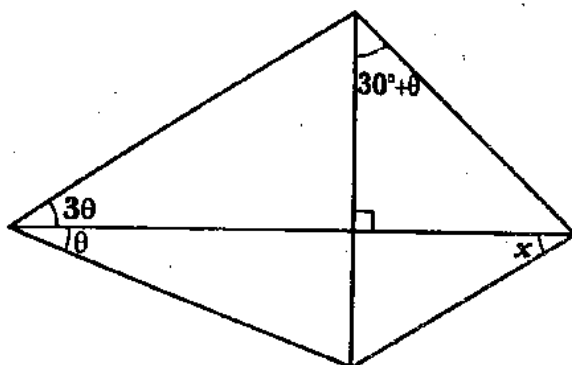
$$x = 3\alpha$$

Se cumple:



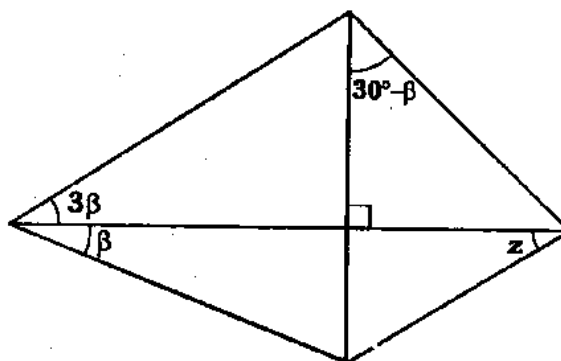
$$x = 3\alpha$$

Se cumple:



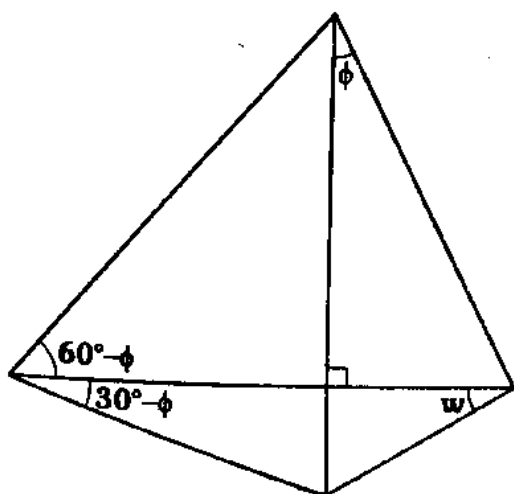
$$x = 30^\circ - \theta$$

Se cumple:



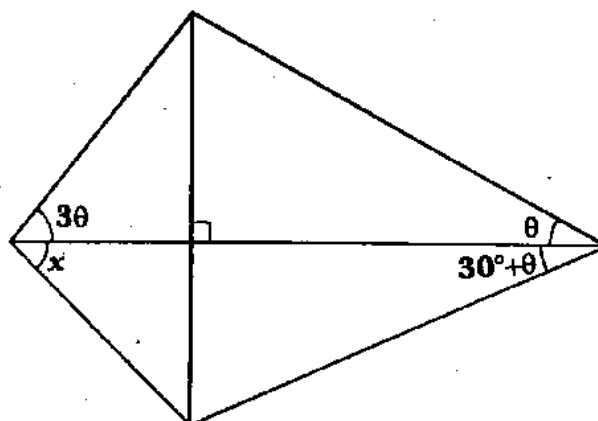
$$z = 30^\circ + \beta$$

Se cumple:



$$w = 3\phi$$

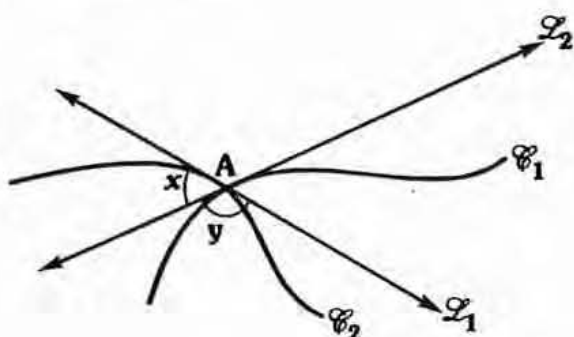
Se cumple:



$$x = 60^\circ + \theta$$

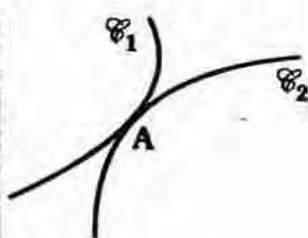
ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

□ ÁNGULO ENTRE CURVAS

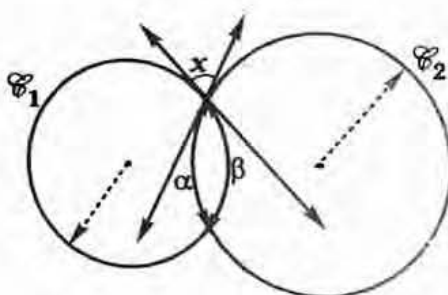


- Sea C_1 y C_2 secante en A $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son tangentes a C_1 y C_2 en A.
- x ó y : Medida del ángulo entre C_1 y C_2
- Donde: $x + y = 180^\circ$

Veamos algunos casos particulares

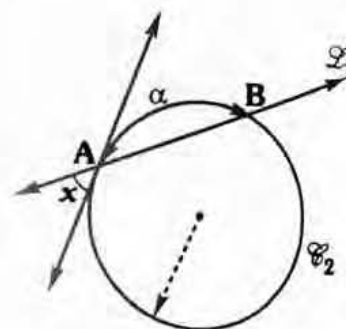


Si C_1 y C_2 son tangentes la medida del ángulo entre C_1 y C_2 es 0° ó 180°



x : medida del ángulo entre C_1 y C_2

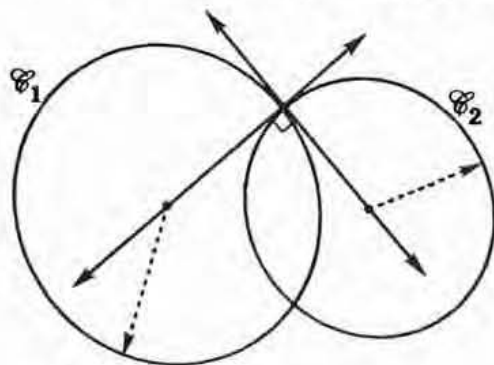
$$\Rightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



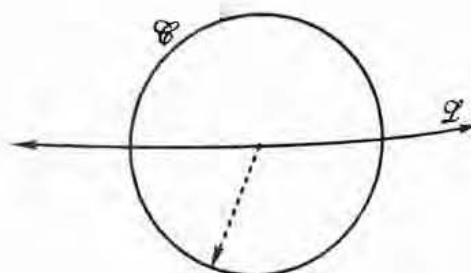
$x = \frac{\alpha}{2}$: Medida del ángulo entre C_1 y C_2

Observaciones

- Si $x = 90^\circ \rightarrow C_1$ y C_2 son ortogonales (curvas ortogonales).



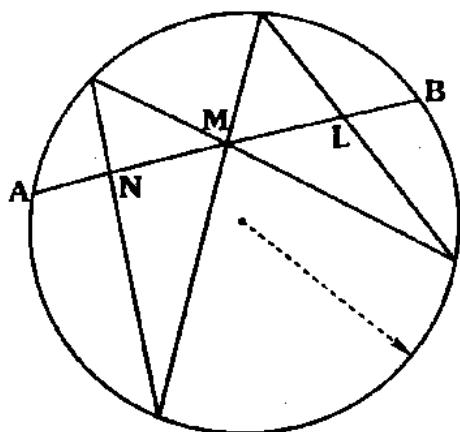
C_1 y C_2 : ortogonales



C y L : ortogonales

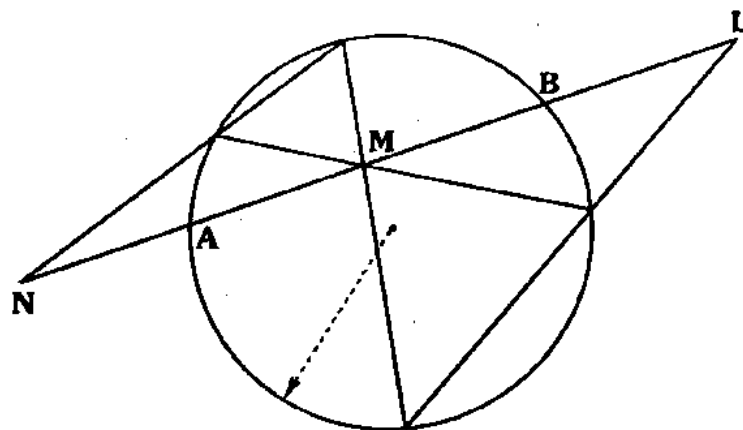
TEOREMAS DE PAPILON

Tenemos los siguientes casos (todos se prueban en forma similar).



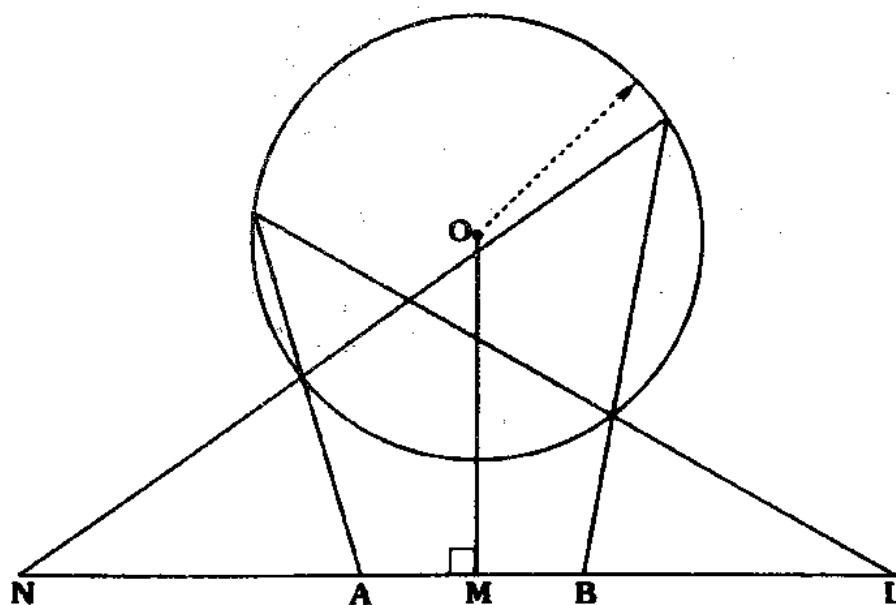
Si $AM = MB$, se cumple:

$$NM = ML$$



Si $AM = MB$, se cumple

$$NM = ML$$

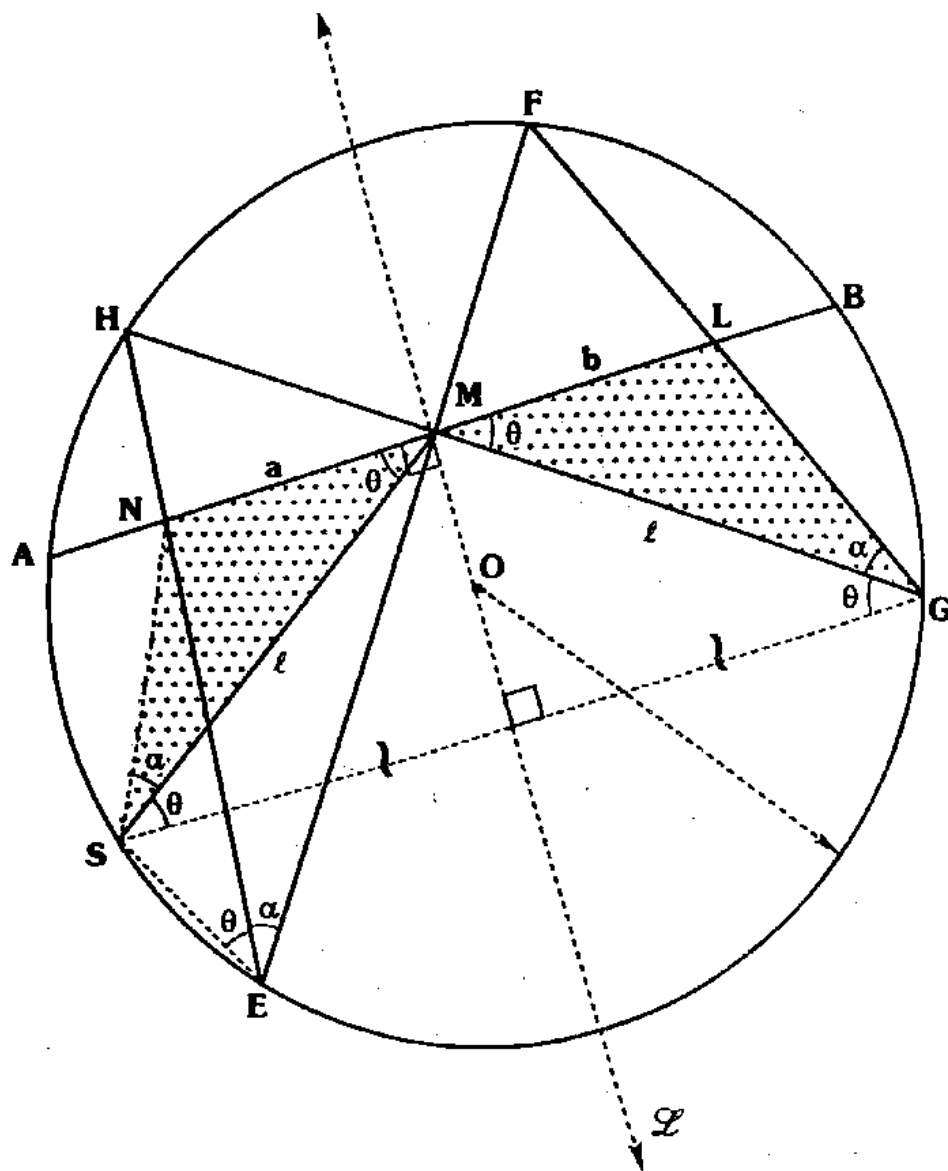


Si $AM = MB$, se cumple:

$$NM = ML$$

Las tres pruebas son similares

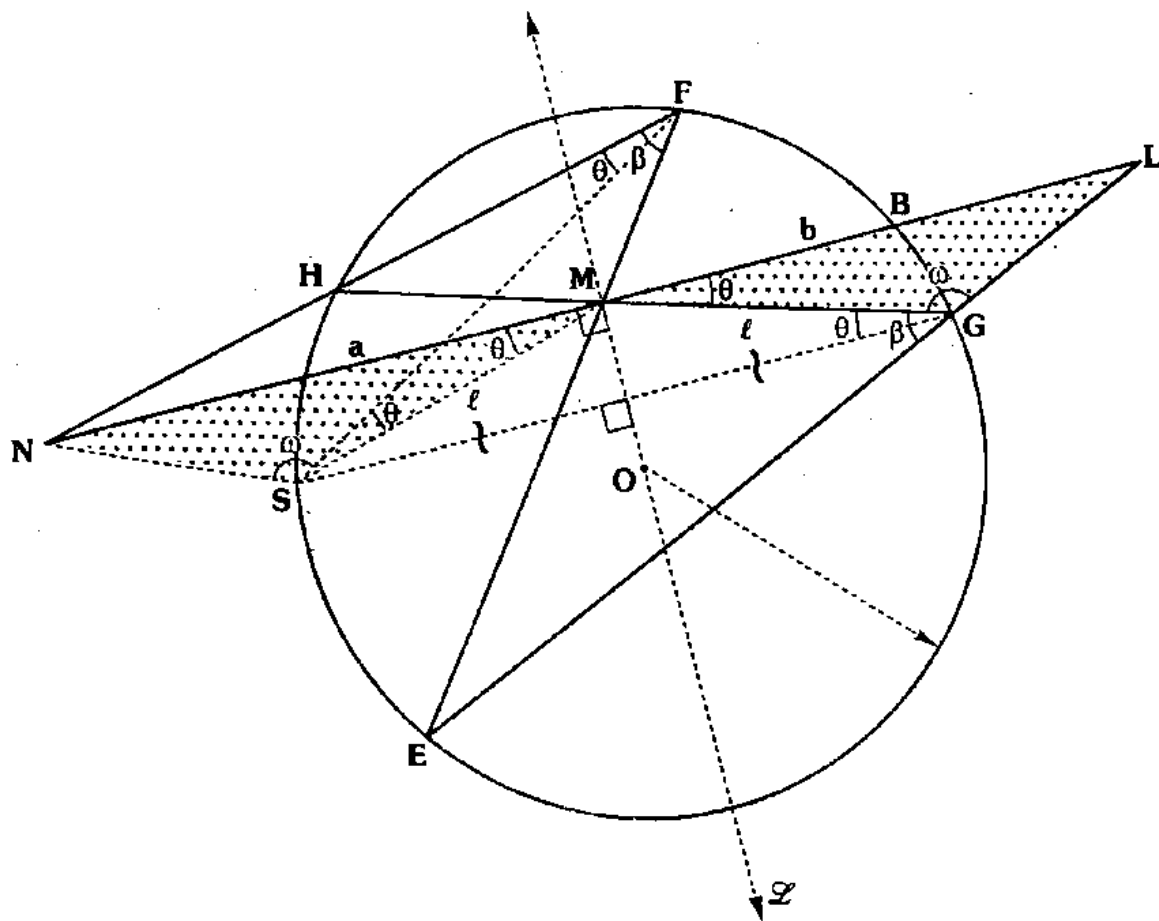
Caso (1) :



- Como $AM = MB \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
- Se traza $\overline{GS} \perp \overline{\mathcal{L}} \Rightarrow MS = MG$
- $\triangle SMG$: isósceles $\Rightarrow m\angle MSG = m\angle SGM$
- Por ángulo inscrito: $m\angle SEH = \theta \Rightarrow \triangle SNME$: inscriptible
 $\Rightarrow m\angle NSM = m\angle NEM = \alpha$
- $\triangle SMN \cong \triangle GML$ (ALA)

$$\therefore \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Caso (2) :



Con la misma idea anterior:

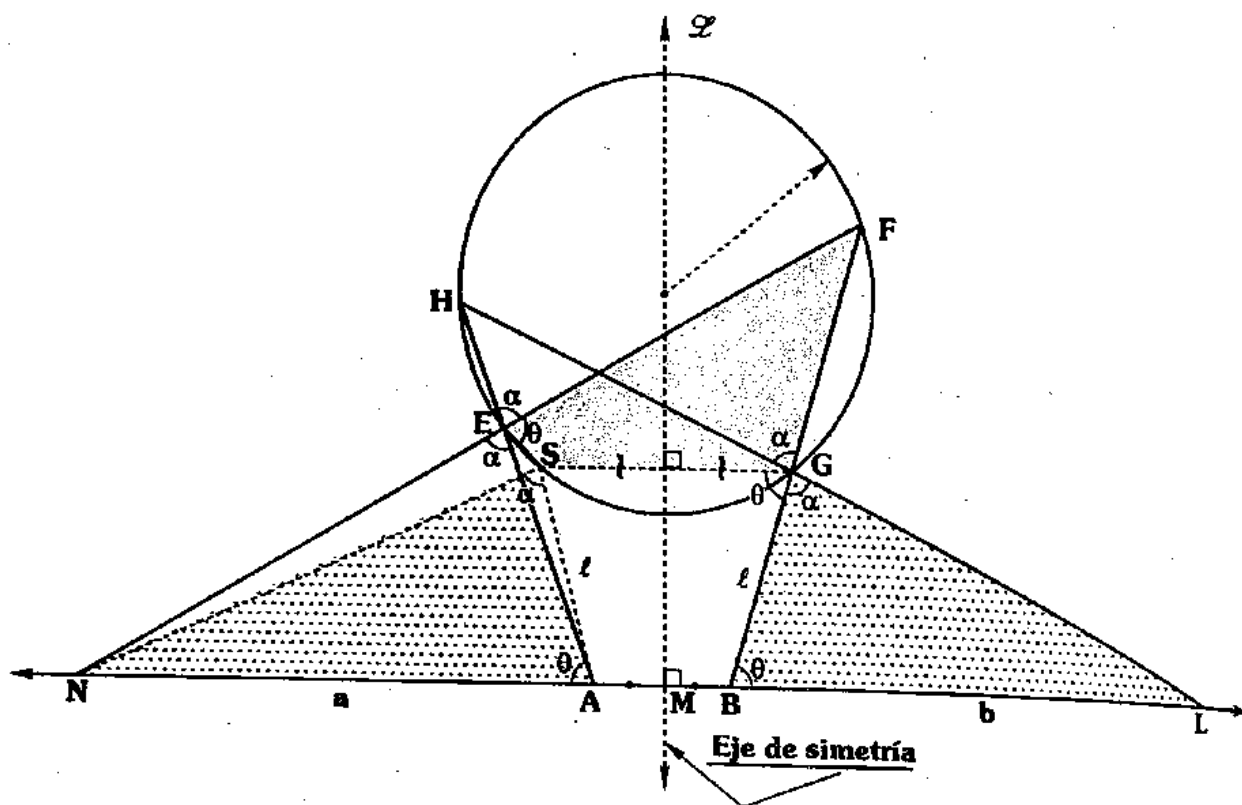
- Se ubica S en la circunferencia tal que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$
- También:
 - $\triangle SMG$: isósceles
 - Como $m\angle HFS = m\angle SMN = \theta$
- Entonces $\triangle NFMS$: inscriptible, luego:

$$\underbrace{m \angle \text{NFM}}_{\theta} = \underbrace{m \angle \text{NSM}}_{\omega} = 180^\circ$$

- Como: $m_{\alpha HGE} = \beta \rightarrow m_{\alpha MGL} = \omega$
- $\Delta SMN \equiv \Delta MGL$ (ALA)

$$\therefore \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Caso (3) :



- Se traza la cuerda SG, tal que $\overline{SG} \perp \vec{Z} \rightarrow BG = AS$
- También:

$$m\angle GBL = m\angle SGB = m\angle SAN = \theta$$

- Como $\triangle SEFG$ es inscrito

$$\rightarrow m\angle SEF = \theta$$

Entonces $\triangle NESA$ es inscriptible

$$\rightarrow m\angle NEA = \alpha$$

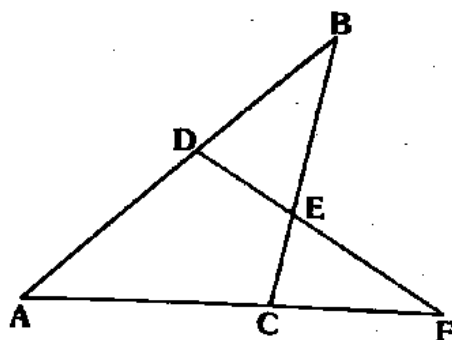
- $\triangle NSA \cong \triangle LGB$ (ALA)

$$\therefore a = b$$

APLICACIONES DE LOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES

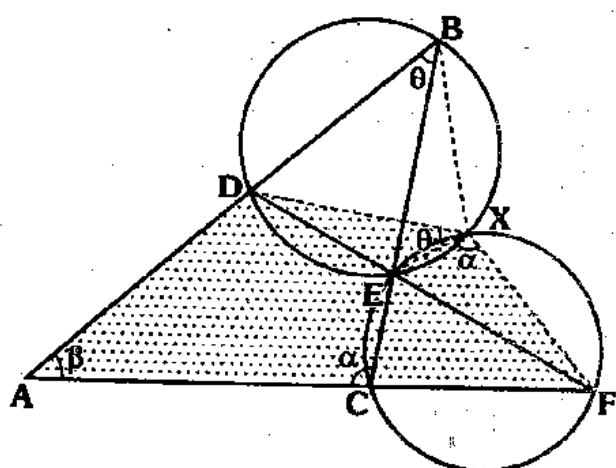
Una de las aplicaciones de los cuadriláteros inscriptible es la aplicación para la concurrencia de circunferencias.
Veamos algunos casos:

TEOREMA



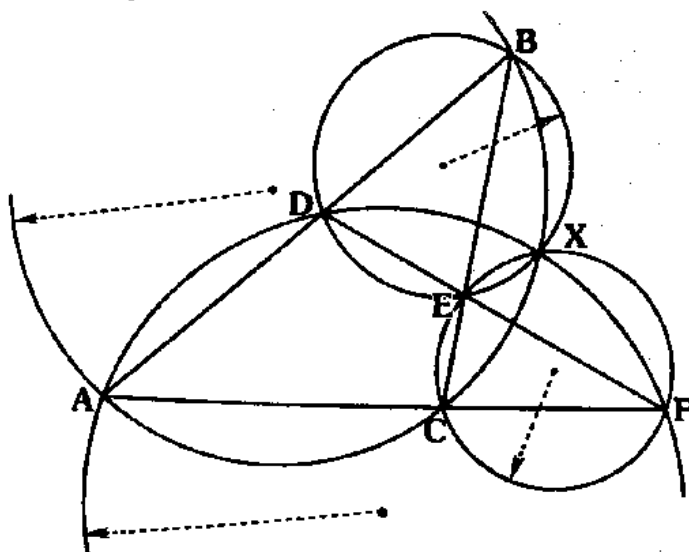
En la gráfica las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ADF, DEB y CEF son concurrentes.

Prueba



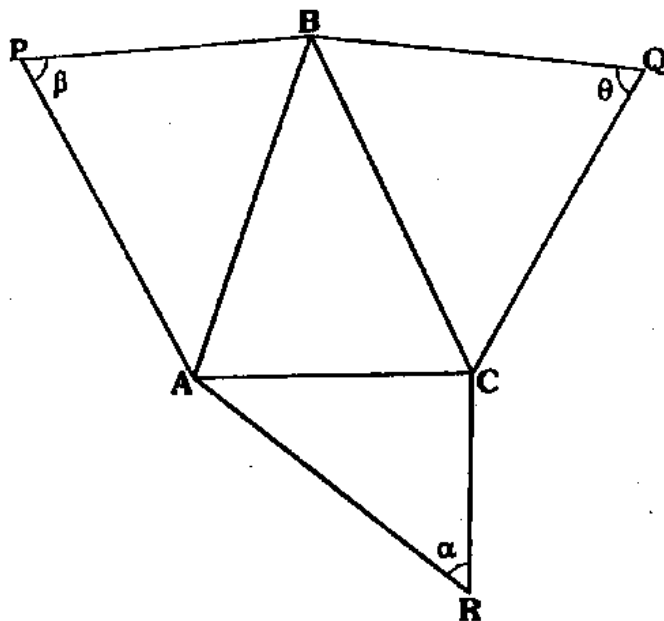
- Trazamos las circunferencias circunscritas a los triángulo DEB y CEF secantes en E y X.
- Sea $m\angle BAC = \beta$, $m\angle ABC = \theta$ y $m\angle ACB = \alpha \rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180^\circ$
- En los cuadriláteros DBDXE y CEXF: $m\angle DXE = \theta$ y $m\angle EXF = \alpha$
 $\rightarrow \triangle ADXF$ es inscriptible.
- Análogamente se prueba que el $\triangle ABXC$ es inscriptible

La figura quedaría así:



Las circunferencias concurren en X.

TEOREMA

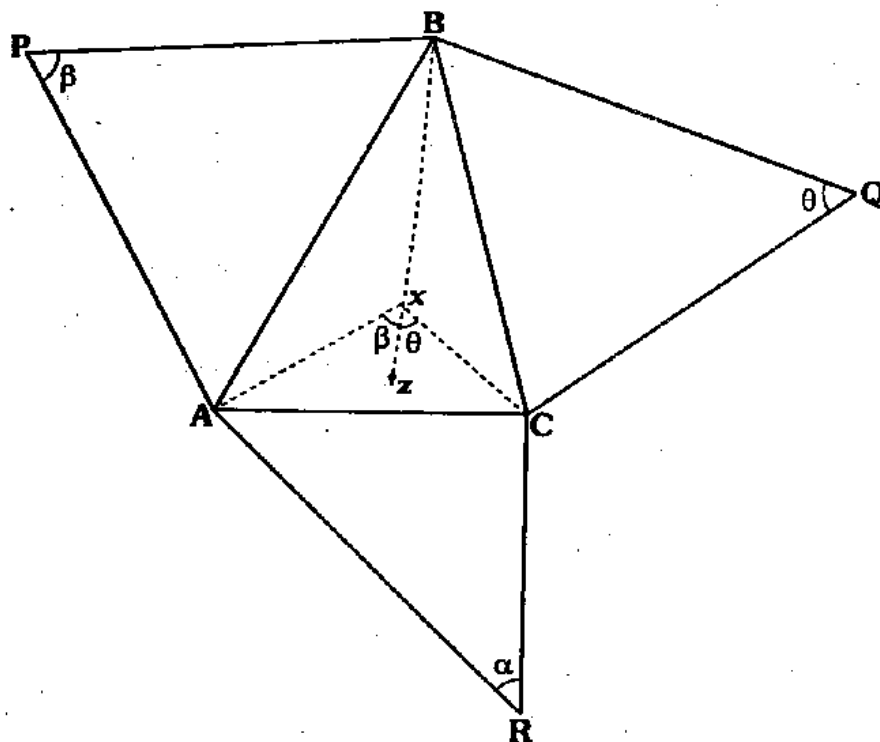


En el gráfico, si $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$

Se cumple:

Las circunferencias circunscritas a los triángulos APB, BQC y ACR son concurrentes.

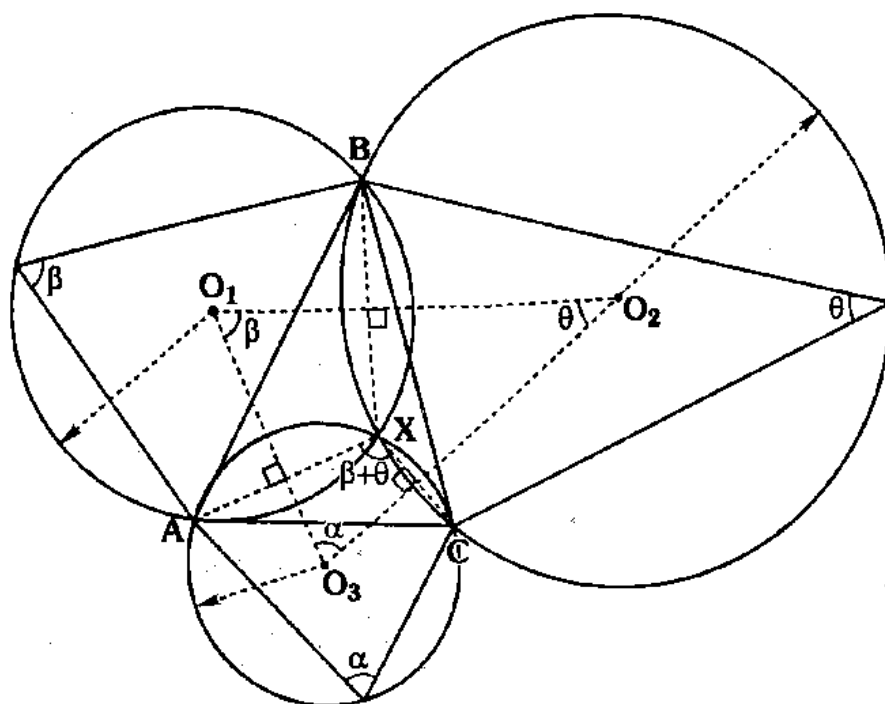
Puede



- Sean B y X los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABP y BQC, entonces los cuadriláteros APBX y CQBX son inscriptibles
- Luego: $m\angle AXZ = \beta$ y $m\angle CXZ = \theta$
- Podemos afirmar que el cuadrilátero AXCR es inscriptible.

$\therefore$ Las circunferencias a los triángulos APB, BQC y ACR concurren en X.

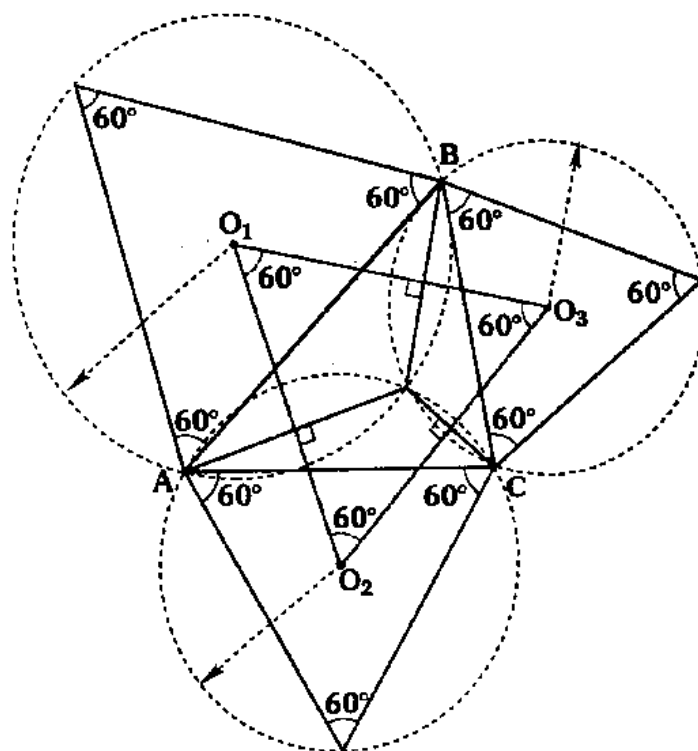
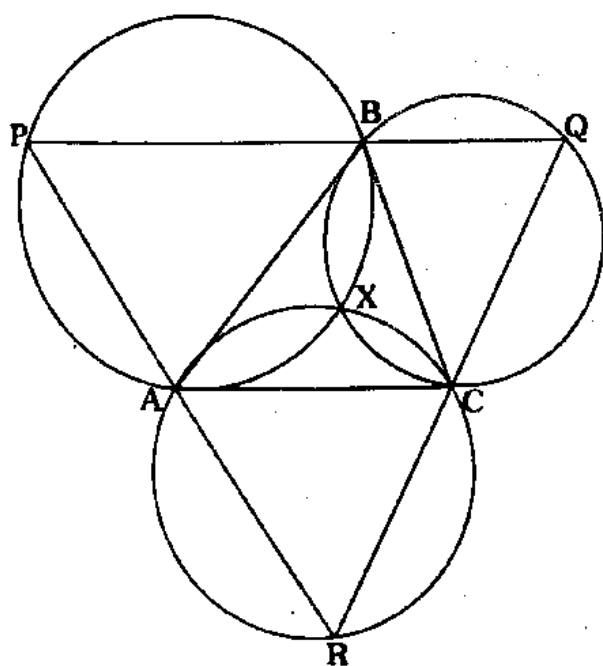
La figura, quedaría así:



Es fácil ver que el triángulo que tiene vértices los centros de las circunferencias tiene sus ángulos internos de medidas: α , β y θ

Observación

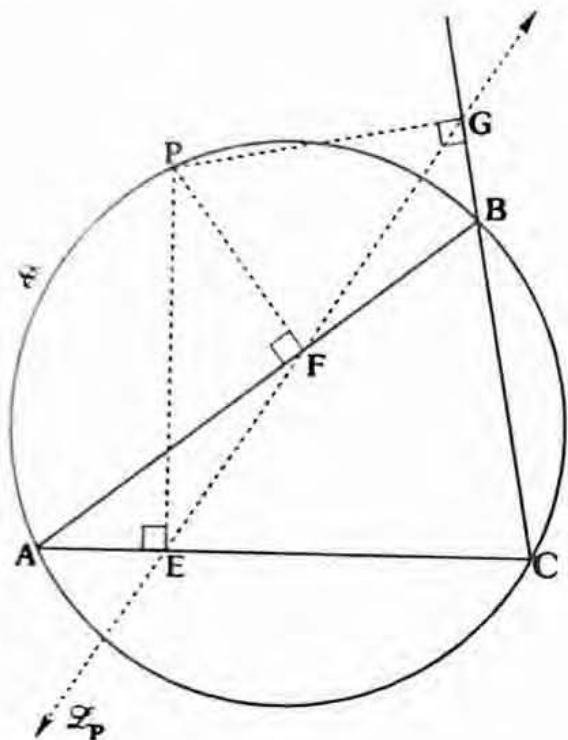
Veamos algunos casos particulares.



Se cumple que: $\Delta O_1 O_2 O_3$ es equilátero

RECTA DE SIMSON – WALLACE

En todo triángulo, las proyecciones ortogonales de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados, son colineales. La recta que contiene a dichos puntos se llama recta de Simson – Wallace.



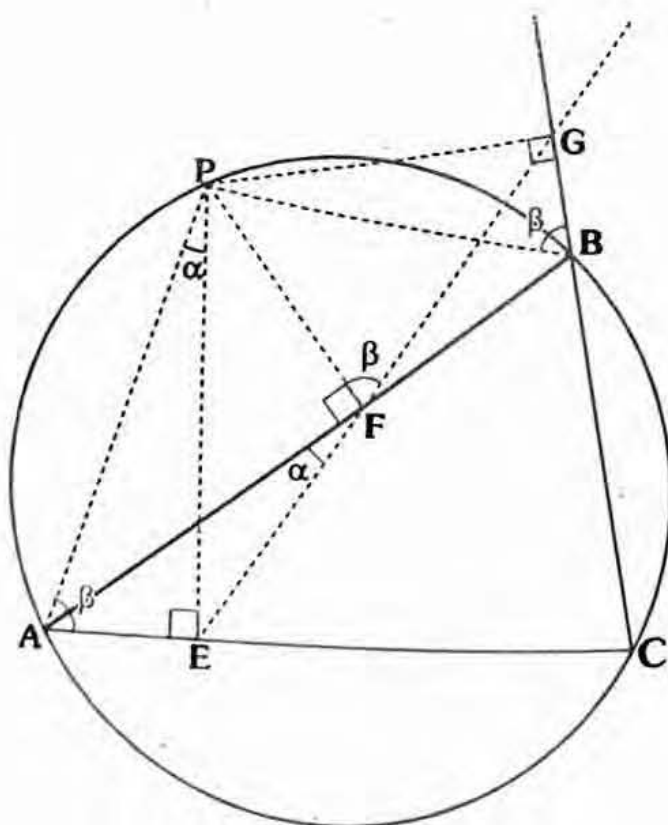
Se cumple:

$$P \in \gamma$$

E, F y G: colineales

L_P : Recta de Simson del punto P.

Prueba



- Sea $m\angle AFE = \alpha$ y $m\angle PFG = \beta$
- Vamos a demostrar: $\alpha + \beta = 90^\circ$
- Como los cuadriláteros APFE y PFBG son inscriptible, entonces:

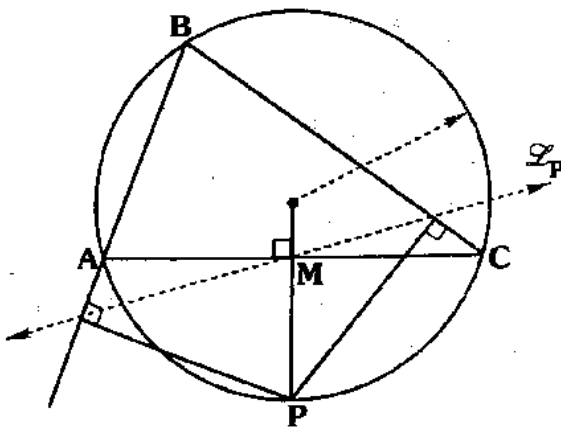
$$m\angle APE = \alpha \quad \text{y} \quad m\angle PBG = \beta$$

- En $\triangle APBC$: $m\angle PAC = \beta$
- En $\triangle AEP$: $\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow m\angle EFA + m\angle AFG = 180^\circ$

$\therefore$ E, F y G son colineales.

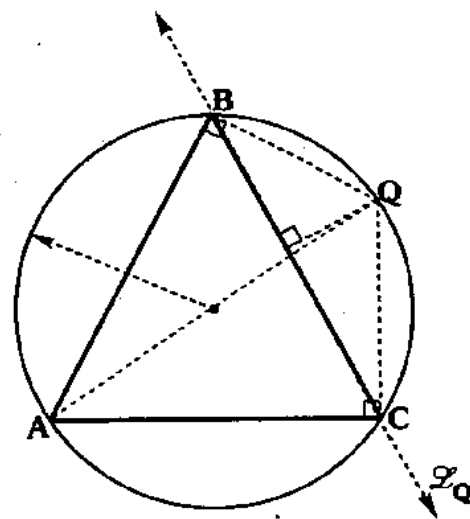
Observación

Veamos algunos casos de la recta de Simson



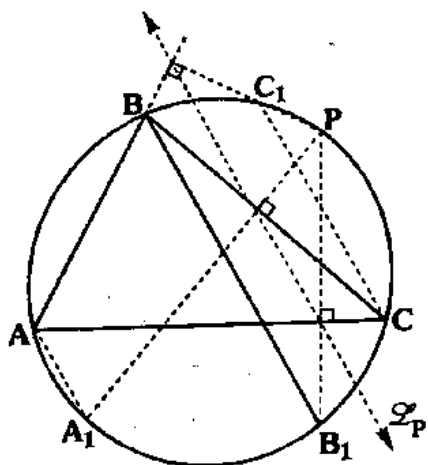
$\mathcal{L}_P$: Recta de Simson del punto P
respecto del $\triangle ABC$

Notemos que la recta de Simson
para este caso pasa por el punto
medio de un lado



$\mathcal{L}_Q$: Recta de Simson de Q
respecto del $\triangle ABC$

Notemos que la recta de
Simson pueda estar sobre
un lado



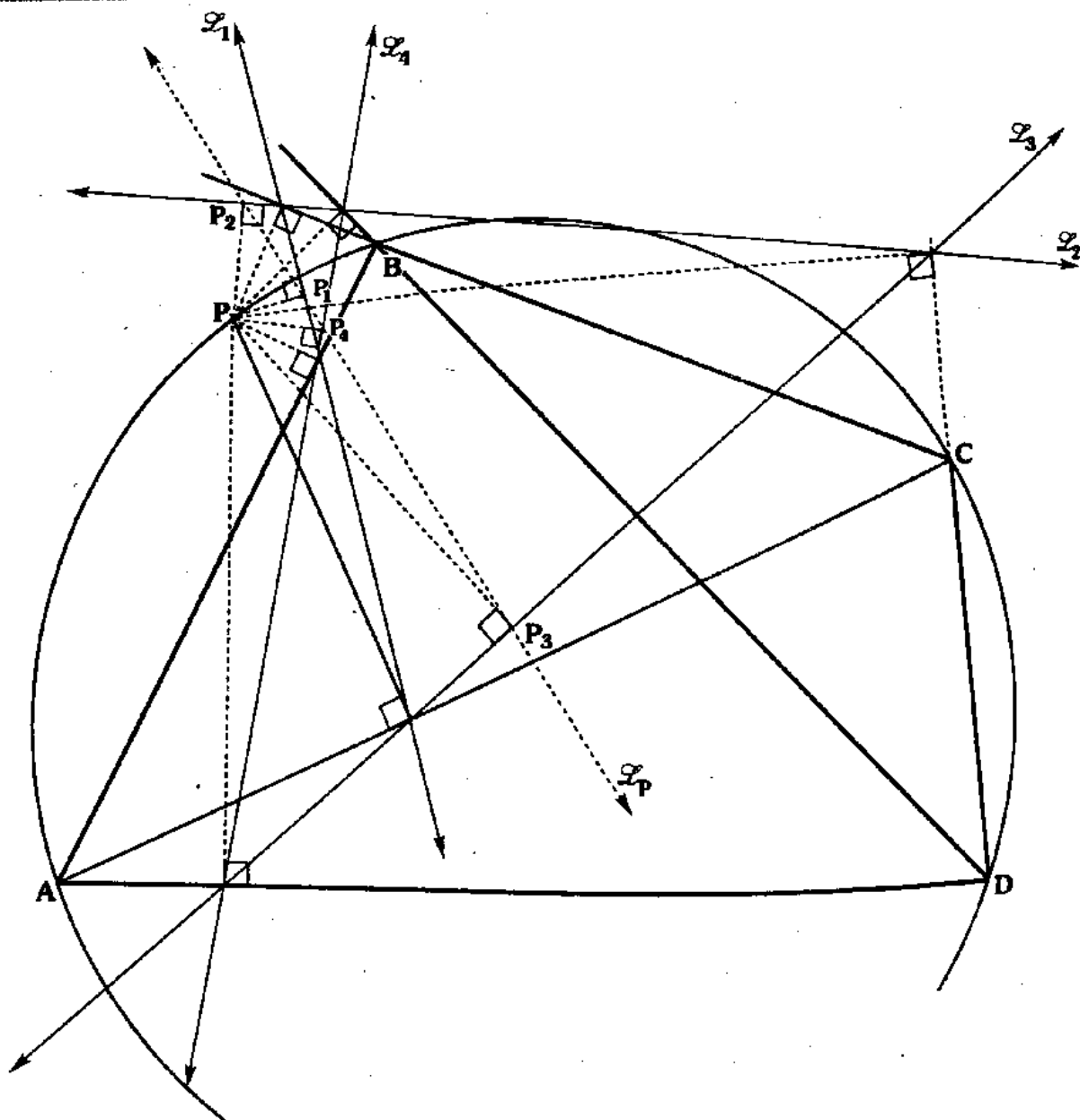
Sea Z_P : recta de Simson del punto P

Se cumple:

$$Z_P \parallel \overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

RECTA DE SIMSON PARA EL CUADRILÁTERO

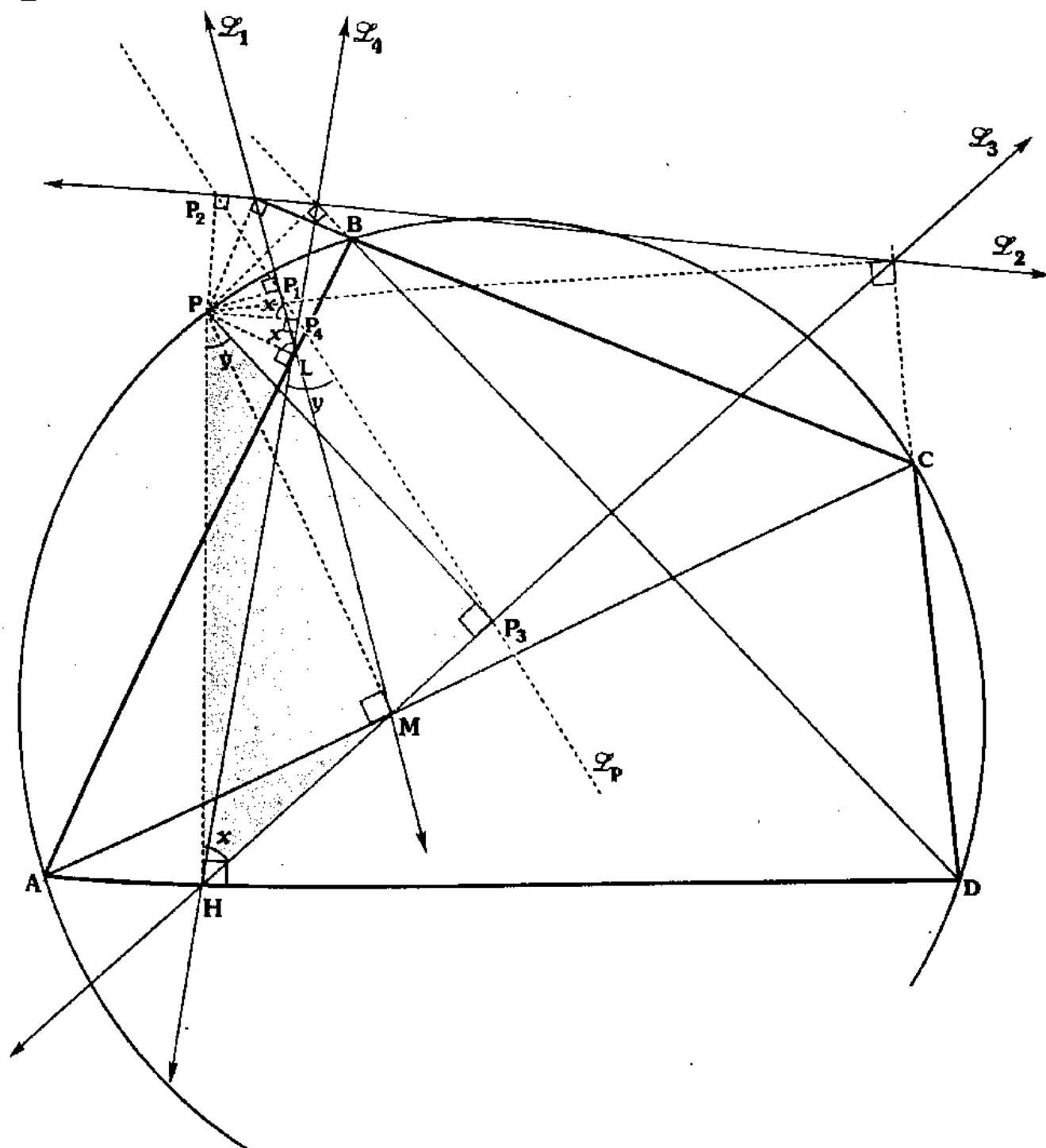


Se da el cuadrilátero inscrito ABCD:

- $\overline{\mathcal{L}}_1$: Recta de Simson de P respecto al $\triangle ABC$
- $\overline{\mathcal{L}}_2$: Recta de Simson de P respecto al $\triangle BCD$
- $\overline{\mathcal{L}}_3$: Recta de Simson de P respecto al $\triangle ACD$
- $\overline{\mathcal{L}}_4$: Recta de Simson de P respecto al $\triangle ABD$

Se cumple: P_1, P_2, P_3 y P_4 : colineales y la recta que los contiene se denomina: recta de Simson de P respecto del cuadrilátero ABCD.

Prueba



• Sea:

$$m\angle PP_4P_1 = x \quad y$$

$$m\angle HP_4P_3 = y$$

• Vamos a demostrar que:

$$x + y = 90^\circ$$

• $\triangle PP_4P_3H$: inscriptible

$$\rightarrow m\angle HPP_3 = y$$

• $\triangle PP_1P_4L$: inscriptible

$$\rightarrow m\angle PLP_1 = x$$

• Como los puntos P, L, M, H y A son cíclicos.

• $\triangle PLMH$: inscriptible

$$\rightarrow m\angle PHM = x$$

• En $\triangle HP_3P$: $x + y = 90^\circ$

$$\rightarrow P_3, P_4 \text{ y } P_1 : \text{colineales.}$$



Geometría

ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS

ANUAL

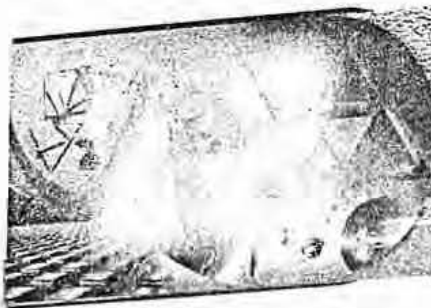
CEPRE UNI

SEMESTRAL

SEMESTRAL INTENSIVO

REPASO

CIRCUNFERENCIA

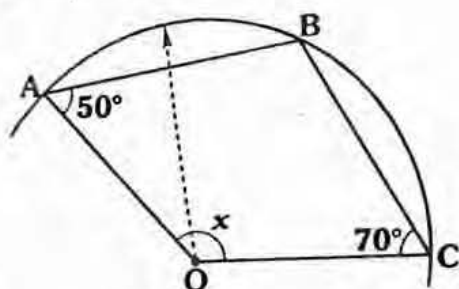


Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

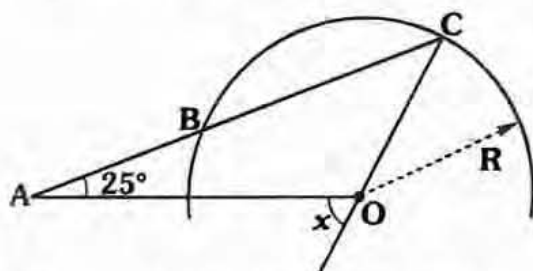
En el gráfico, calcule "x".



- A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 2

En el gráfico, $AB=R$. Calcule "x".



- A) 50° B) 60° C) 65°
D) 75° E) 80°

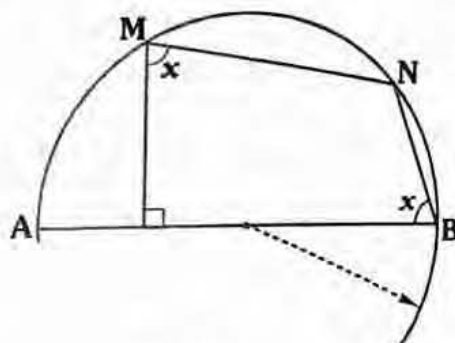
PROBLEMA N° 3

Se tienen los puntos consecutivos A, T, C y D sobre una recta, tal que $AT=3$ y $TC=2$, con centro en A y radio AT se traza la circunferencia $\mathcal{C}$. Desde C, se traza la tangente $\overline{CM}$ (M es punto de tangencia). Calcule $m\angle MCD$.

- A) 120° B) 127° C) 143°
D) 121° E) 105°

PROBLEMA N° 4

En el gráfico, $m\widehat{AM} = 60^\circ$, calcule "x".



- A) 60° B) 75° C) 80°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA N° 5

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

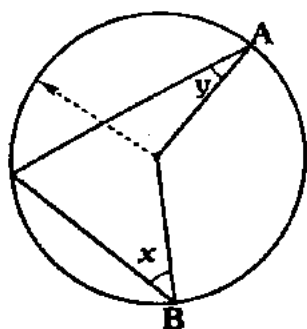
- I) La unión de todos los puntos que equidistan de un punto fijo, forman una circunferencia.
II) Si una recta coplanar a una circunferencia se intersectan en un punto entonces la recta es tangente a dicha circunferencia.

III) Si una recta coplanar a un arco de circunferencia la corta en un solo punto es tangente a dicho arco.

- A) VFV B) FVF C) FFF
D) VVV E) VVF

PROBLEMA N° 6

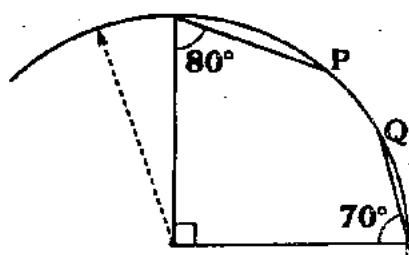
Si $m\widehat{AB} = 100^\circ$. Calcule $x + y$



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 7

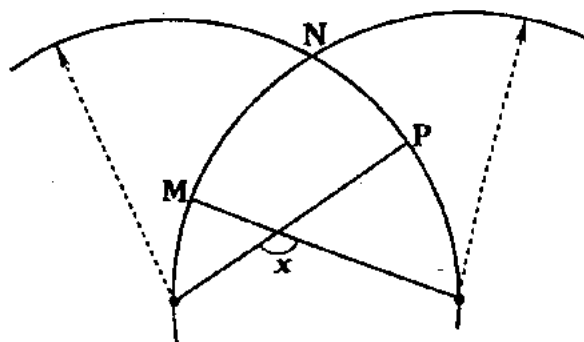
En el gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 8

Si $m\widehat{MN} + m\widehat{NP} = 50^\circ$, calcule "x".



- A) 110° B) 140° C) 150°
D) 170° E) 135°

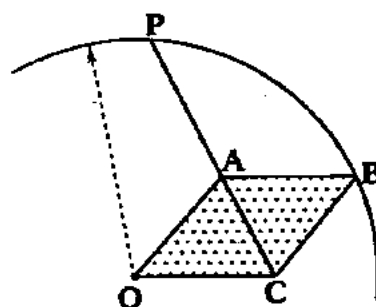
PROBLEMA N° 9

Se tiene una circunferencia de diámetro $\overline{FG}$ y centro O, $\overline{AM}$ es una cuerda secante a $\overline{FG}$, con F en $\overline{AM}$. Si $m\widehat{FM} = 65^\circ$ y $m\angle OAM = 40^\circ$. Calcule $m\widehat{AG}$.

- A) 130° B) 135°
C) 140° D) 145°
E) 155°

PROBLEMA N° 10

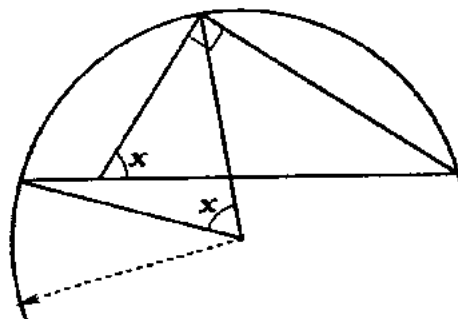
En el gráfico, OABC es un rombo. Calcule $m\widehat{BP}$



- A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 11

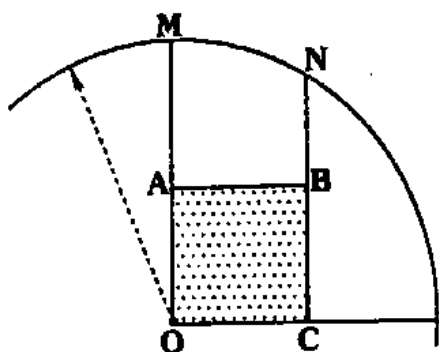
Calcule x.



- A) 72° B) 60°
C) 45° D) 36°
E) 30°

PROBLEMA N° 12

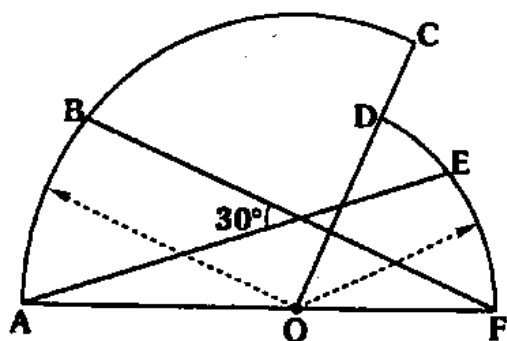
En el gráfico, OABC es un cuadrado y $OA=AM$. Calcule $m\widehat{MN}$.



- A) $\frac{53^\circ}{2}$ B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) 30°
D) 37° E) 14°

PROBLEMA N° 13

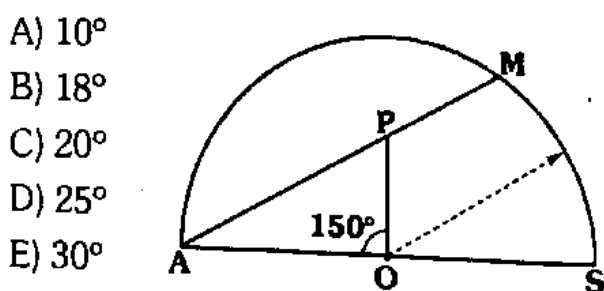
En el gráfico, $m\widehat{AB} = m\widehat{EF}$. Calcule $m\widehat{BC} + m\widehat{DE}$.



- A) 150° B) 140° C) 120°
D) 100° E) 145°

PROBLEMA N° 14

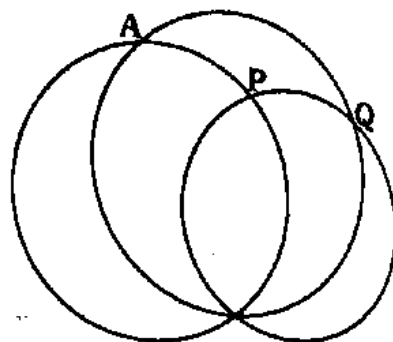
En el gráfico, $OP=PM$. Calcule $m\widehat{SM}$.



- A) 10°
B) 18°
C) 20°
D) 25°
E) 30°

PROBLEMA N° 15

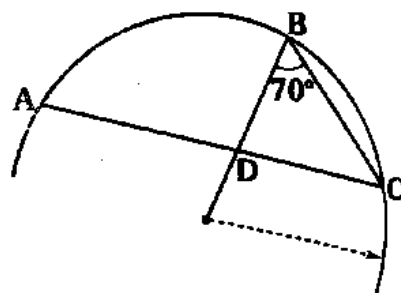
En el gráfico, $m\widehat{AP} = 40^\circ$ y $m\widehat{PQ} = 30^\circ$. Calcule $m\widehat{AQ}$.



- A) 60° B) 50° C) 70°
D) 35° E) 80°

PROBLEMA N° 16

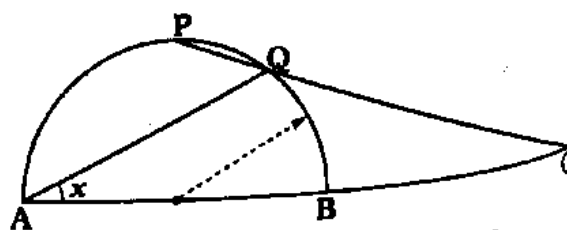
En el gráfico, $BC=CD$. Calcule $m\widehat{ABC}$.



- A) 110° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 150°

PROBLEMA N° 17

En el gráfico, $AB=BC$ y $m\widehat{AP} = m\widehat{PQB}$. Calcule "x".



- A) 16° B) $18^\circ 30'$ C) 15°
D) $26^\circ 30'$ E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 18

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si $BQ=3$, $QD=2$ y $m\angle DBC = m\widehat{AD}$.

Calcule $m\widehat{AD}$. ($\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{Q\}$)

- A) 37° B) 53° C) 74°
D) 60° E) $\frac{127^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 19

En la semicircunferencia de diámetro AE se ubican los puntos B y D (B en $\widehat{AD}$), las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se cortan en C. Si $AB=BC$ y $m\angle ACE = 70^\circ$.

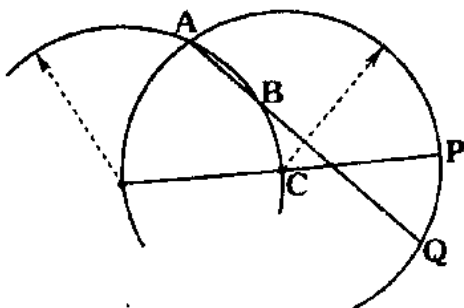
Calcule $m\widehat{ED}$.

- A) 140° B) 130°
C) 120° D) 110°
E) 100°

PROBLEMA N° 20

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 2(m\widehat{BC})$.

Calcule $m\widehat{PQ}$.

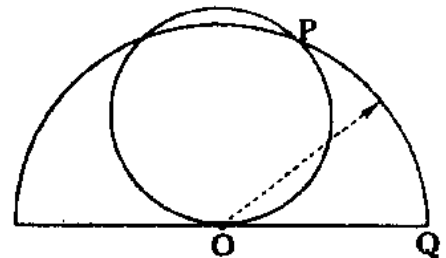


- A) 60° B) 45°
C) 40° D) 30°
E) 35°

PROBLEMA N° 21

En el gráfico, O es punto de tangencia y $m\widehat{OP} = 140^\circ$. Calcule $m\widehat{PQ}$.

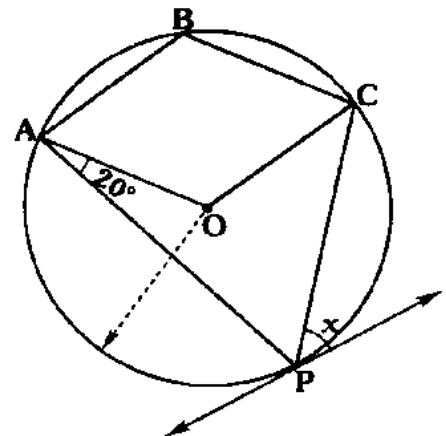
- A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



PROBLEMA N° 22

En el gráfico, ABCO es un paralelogramo, P es punto de tangencia. Calcule "x".

- A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 50°
E) 40°

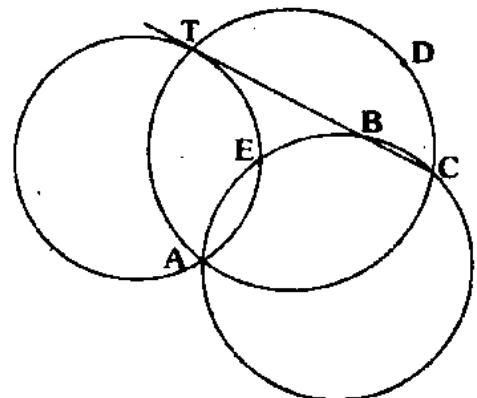


PROBLEMA N° 23

En el gráfico, T es punto de tangencia.

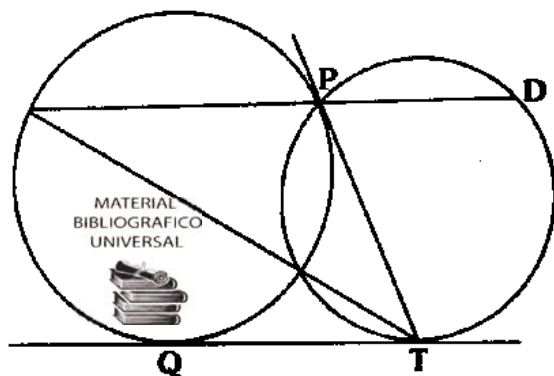
Calcule: $m\widehat{TDC} + m\widehat{AB} + m\widehat{AET}$

- A) 180°
B) 270°
C) 360°
D) 450°
E) 330°



PROBLEMA N° 24

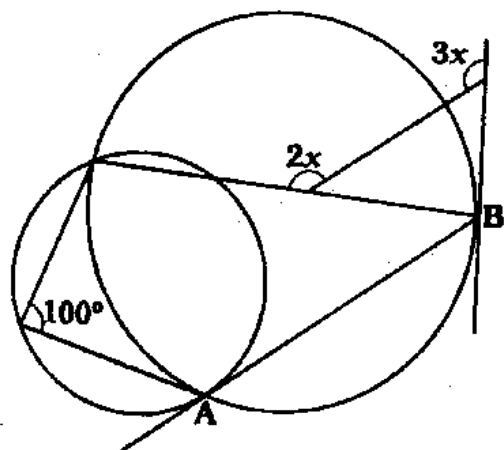
En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{PD} = 80^\circ$, calcule $m\widehat{TD}$.



- A) 100° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 150°

PROBLEMA N° 25

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



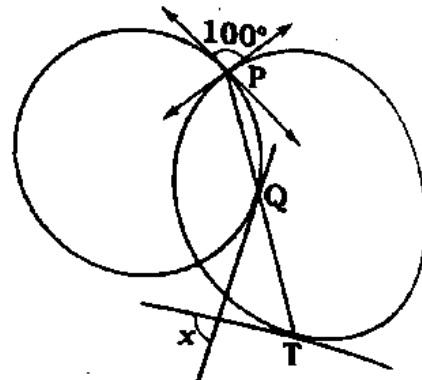
- A) 40° B) 56° C) 54°
D) 44° E) 52°

PROBLEMA N° 26

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule "x".

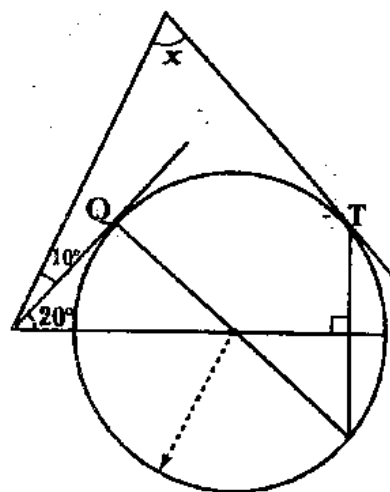
Calcule "x".

- A) 55°
B) 110°
C) 70°
D) 80°
E) 65°



PROBLEMA N° 27

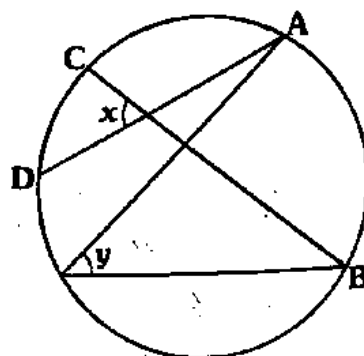
En el gráfico, Q y T son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 100° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 110°

PROBLEMA N° 28

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 100^\circ$ y $m\widehat{CD} = 20^\circ$. Calcule $x + y$.

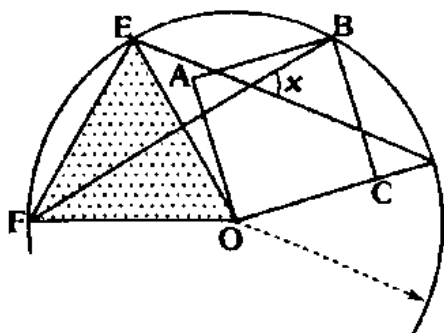


- A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA N° 29

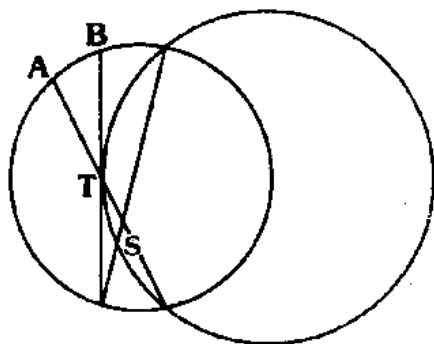
En el gráfico, las regiones sombreadas son regulares. Calcule "x".

- A) 60°
- B) $67,5^\circ$
- C) $52,5^\circ$
- D) $37,5^\circ$
- E) $77,5^\circ$



PROBLEMA N° 30

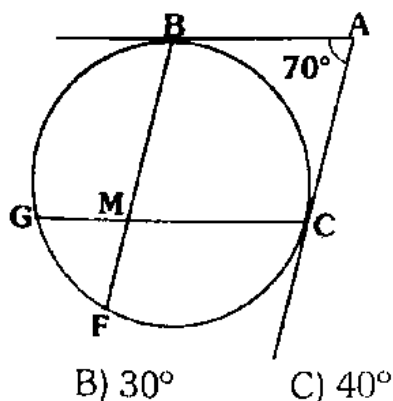
En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\widehat{AB} = 40^\circ$. Calcule $m\widehat{TS}$.



- A) 20°
- B) 30°
- C) 40°
- D) 50°
- E) 60°

PROBLEMA N° 31

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y MBAC es un paralelogramo. Calcule $m\widehat{FG}$.

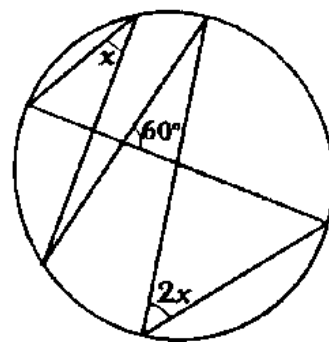


- A) 20°
- B) 30°
- C) 40°
- D) 45°
- E) 50°

PROBLEMA N° 32

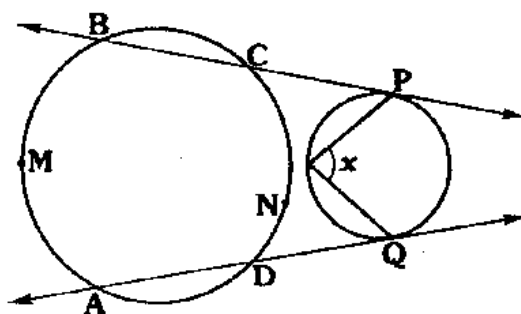
Calcule "x", en:

- A) 20°
- B) 30°
- C) 40°
- D) 50°
- E) 25°



PROBLEMA N° 33

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AMB} = 200^\circ$ y $m\widehat{CND} = 100^\circ$. Calcule "x".

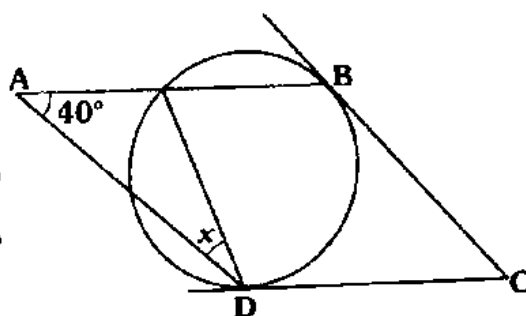


- A) 30°
- B) 50°
- C) 65°
- D) 45°
- E) 75°

PROBLEMA N° 34

En el gráfico, B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo. Calcule "x".

- A) 20°
- B) 25°
- C) 30°
- D) 35°
- E) 40°

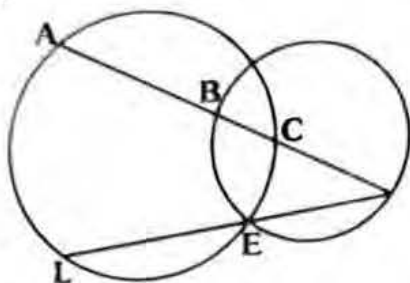


PROBLEMA N° 35

En el gráfico, $m\widehat{BE} = 2(m\widehat{EC})$ y $m\widehat{AL} + m\widehat{BE} + m\widehat{EC} = 240^\circ$.

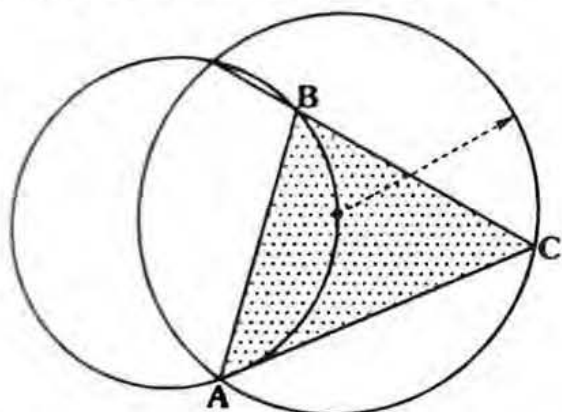
Calcule $m\widehat{BE}$.

- A) 40°
- B) 70°
- C) 80°
- D) 100°
- E) 120°



PROBLEMA N° 36

Indique que tipo de triángulo es ABC.

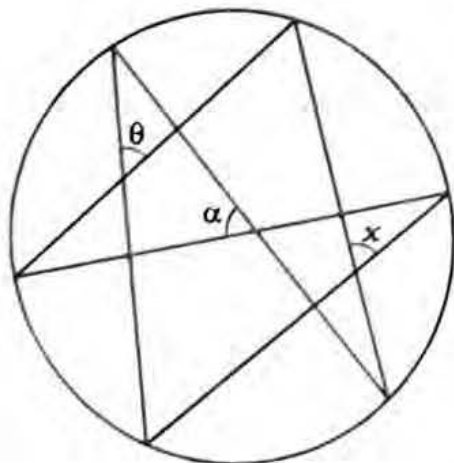


- A) Escaleno
- B) Rectángulo
- C) Equilátero
- D) Acutángulo
- E) Isósceles

PROBLEMA N° 37

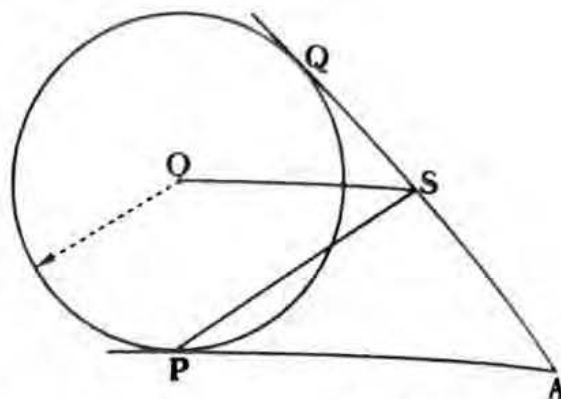
Si $\alpha + \theta = 100^\circ$. Calcule "x".

- A) 50°
- B) 40°
- C) 80°
- D) 70°
- E) 60°



PROBLEMA N° 38

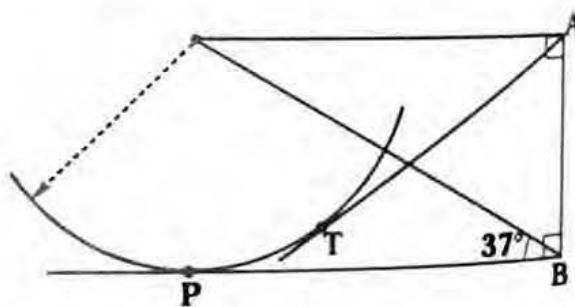
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $OS \parallel PA$, $QS = a$ y $AS = b$. Calcule SP.



- A) $\sqrt{ab}$
- B) $\frac{a+b}{2}$
- C) $\sqrt{b^2 + a^2}$
- D) $\sqrt{2b^2 + a^2}$
- E) $\sqrt{2b^2 - a^2}$

PROBLEMA N° 39

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si $PB = 4$, calcule AT.

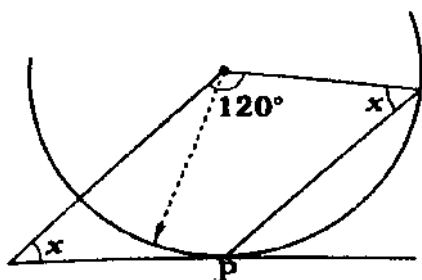


- A) 5
- B) $\sqrt{29}$
- C) $\sqrt{34}$
- D) $\sqrt{30}$
- E) $\sqrt{7}$

PROBLEMA N° 40

En el gráfico, P es punto de tangencia. Calcule "x".

- A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 36°

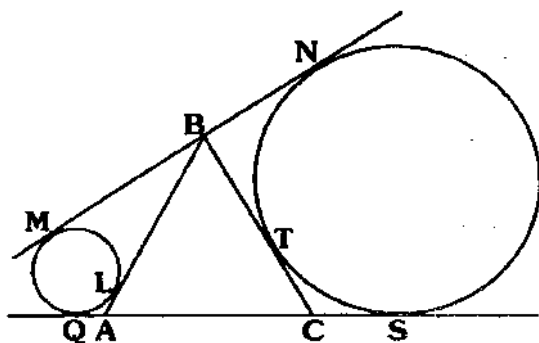


PROBLEMA N° 41

En el gráfico, M, N, L, T, S y Q son puntos de tangencia.

Si el triángulo ABC es equilátero, calcule:

$$\frac{MN}{AB}$$



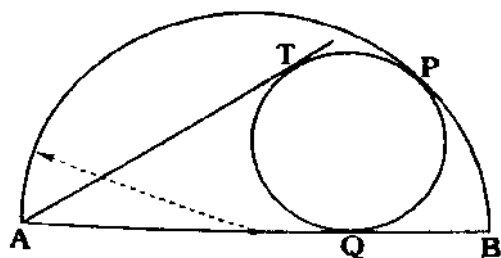
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1,5
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA N° 42

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TQ} + m\widehat{PB} = 200^\circ$.

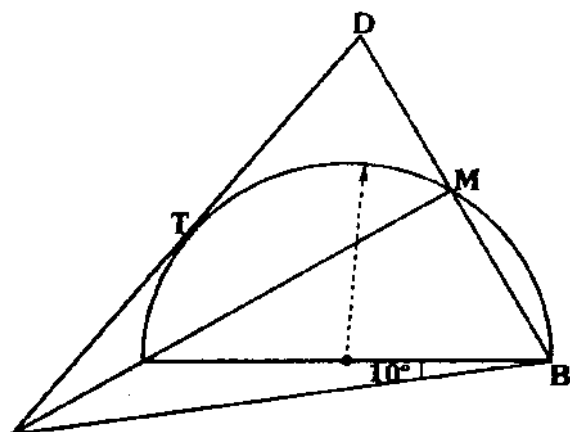
Calcule $m\widehat{TP}$.

- A) 70°
B) 75°
C) 60°
D) 80°
E) 120°



PROBLEMA N° 43

En el gráfico, T es punto de tangencia y $BM = MD$. Calcule $m\widehat{MT}$.

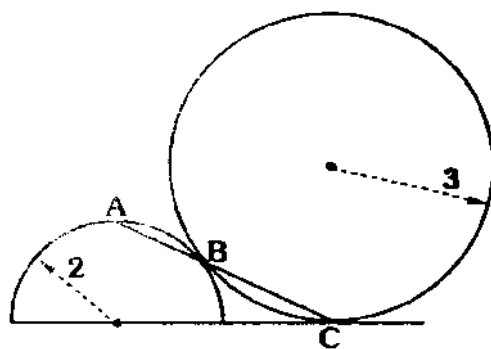


- A) 90° B) 80° C) 50°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA N° 44

B y C son puntos de tangencia.

Calcule $m\widehat{AB}$.



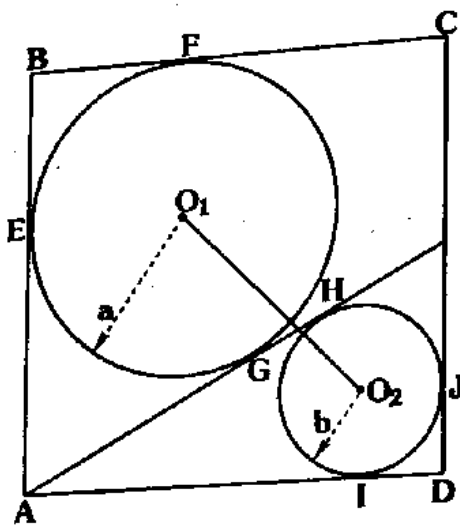
- A) 37° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 30°

PROBLEMA N° 45

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y E, F, G, H, I y J son puntos de tangencia.

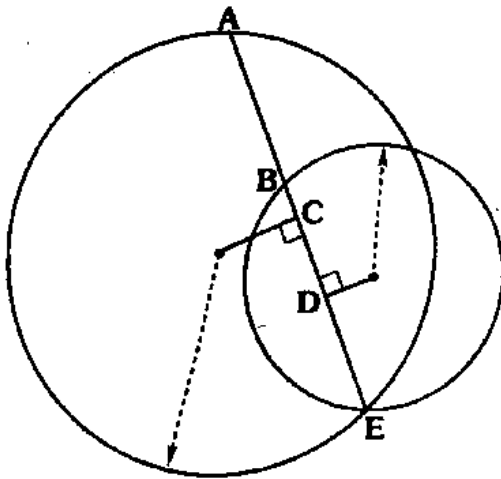
Si $a^2 + b^2 = 100$, calcule O_1O_2 .

- A) 10
B) $5\sqrt{2}$
C) $10\sqrt{2}$
D) 15
E) 12,5



PROBLEMA N° 46

En el gráfico, $AB=10$. Calcule CD .

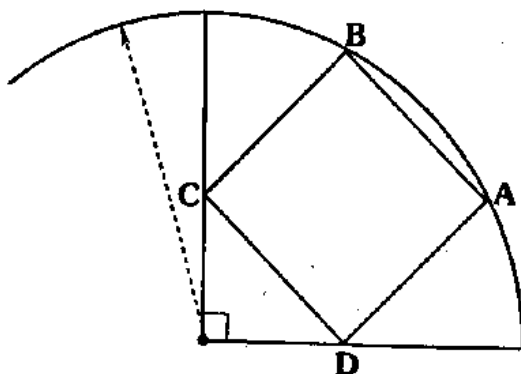


- A) 10 B) 7,5 C) 5
D) 6,5 E) 8

PROBLEMA N° 47

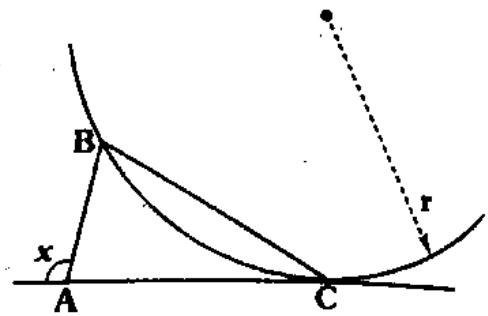
En el gráfico, calcule $m\widehat{AB}$. Si $ABCD$ es un cuadrado.

- A) 30°
B) 53°
C) 37°
D) 28°
E) 16°



PROBLEMA N° 48

En el gráfico, C es punto de tangencia. Si $AC=BC=r$, calcule " x ".

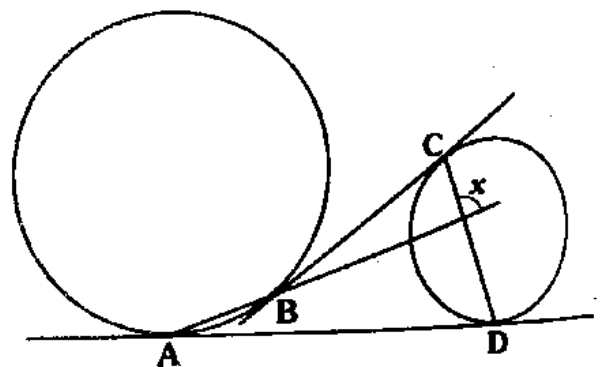


- A) 90° B) 75° C) 84°
D) 105° E) 115°

PROBLEMA N° 49

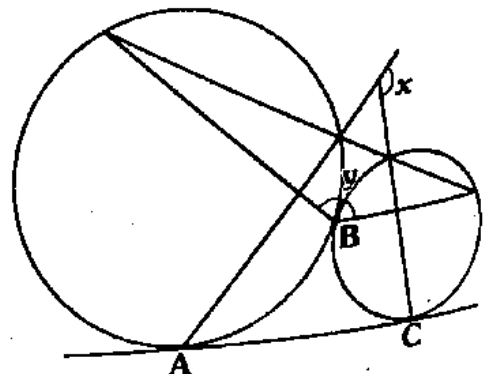
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demostrar que $x = 90^\circ$.



PROBLEMA N° 50

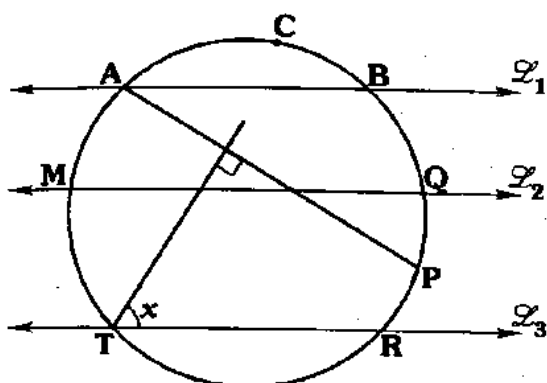
En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencias. Indique la relación entre x e y .



- A) $x=y$ B) $x+y=180^\circ$
 C) $y=90^\circ+x$ D) $x+y=270^\circ$
 E) $y=45^\circ+x$

PROBLEMA N° 51

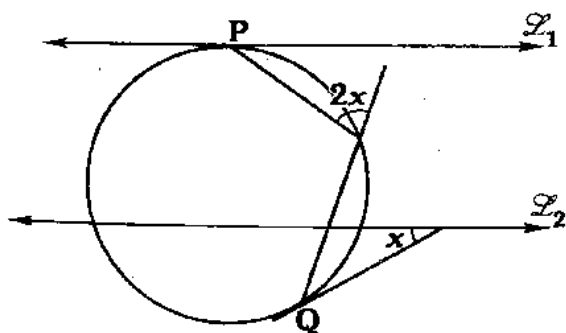
En el gráfico, $\overline{\mathcal{L}_1} \parallel \overline{\mathcal{L}_2} \parallel \overline{\mathcal{L}_3}$, $m\widehat{QP} = m\widehat{PR}$ y $m\widehat{ACB} + m\widehat{MTR} = 160^\circ$. Calcule "x".



- A) 60° B) 65° C) 70°
 D) 40° E) 80°

PROBLEMA N° 52

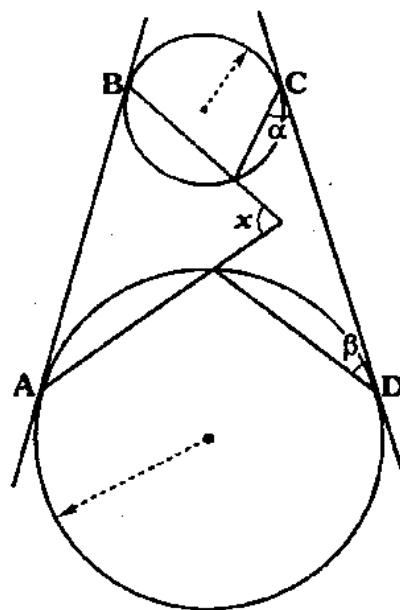
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overline{\mathcal{L}_1} \parallel \overline{\mathcal{L}_2}$. Calcule "x".



- A) 30° B) 18° C) 36°
 D) 35° E) 40°

PROBLEMA N° 53

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $\alpha + \beta = 86^\circ$. Calcule "x".



- A) 94° B) 104° C) 86°
 D) 152° E) 133°

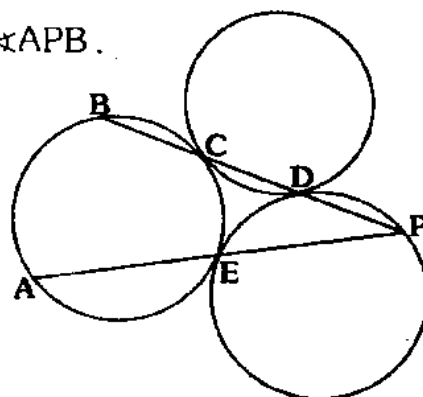
PROBLEMA N° 54

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, P, B, Q y S, las tangentes en P y Q son perpendiculares y $m\angle ABS = 80^\circ$. Calcule la medida del menor ángulo entre $\overline{PS}$ y $\overline{AQ}$.

- A) B) 80° C) 65°
 D) 55° E) 75°

PROBLEMA N° 55

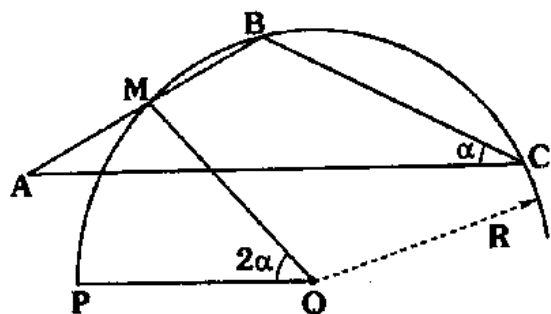
En el gráfico, C, D y E son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AE} - m\widehat{BC} = 40^\circ$. Calcule $m\angle APB$.



- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 40°
 E) 50°

PROBLEMA N° 56

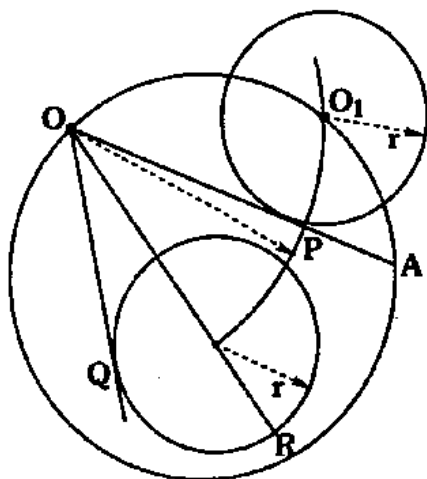
En el gráfico, $AM=MB$, $\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ y $R=4$.
Calcule AC.



- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA N° 57

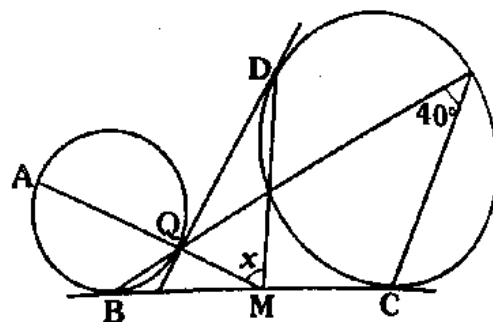
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{O_1A} = 2\alpha$. Calcule $m\widehat{QR}$.



- A) 2α B) $90^\circ - \alpha$
C) $90^\circ + \alpha$ D) $90^\circ - 2\alpha$
E) $90^\circ + 2\alpha$

PROBLEMA N° 58

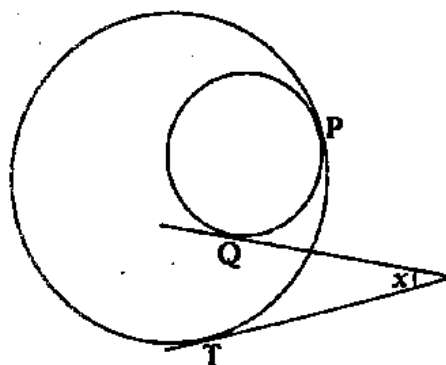
Calcule "x", si $m\widehat{AB} = 80^\circ$ (B, Q, D y C son puntos de tangencia).



- A) 90° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 70°

PROBLEMA N° 59

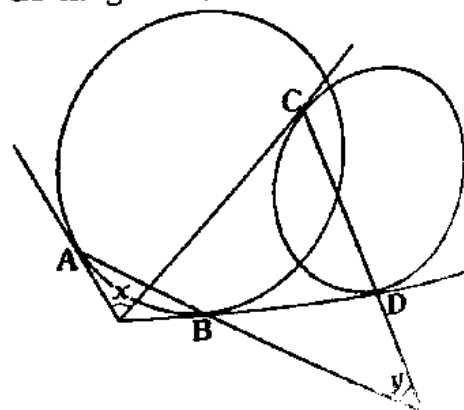
En el gráfico, calcule "x", si $m\widehat{PQ} - m\widehat{PT} = 40^\circ$. (P, Q y T son puntos de tangencia).



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 60

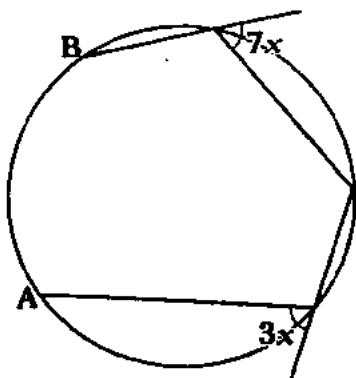
En el gráfico, calcule x/y (A, B, C y D son puntos de tangencia).



- A) 1
B) 2
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA N° 61

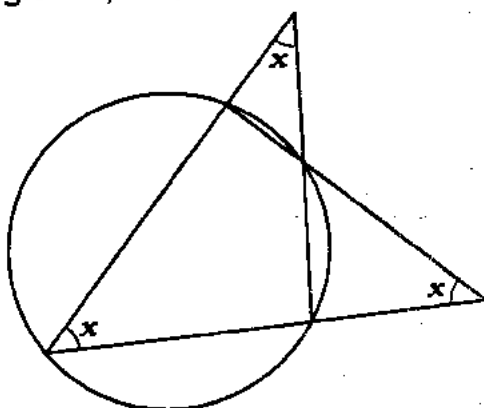
En el gráfico, $m\widehat{AB} = 120^\circ$. Calcule "x".



- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 62

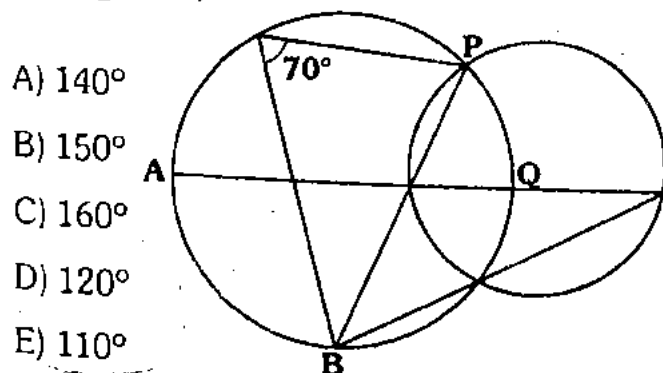
En el gráfico, calcule "x".



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA N° 63

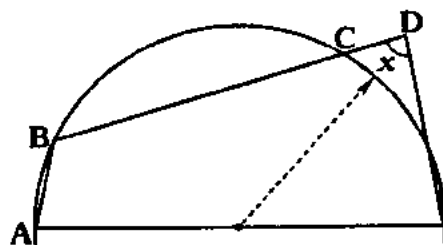
En el gráfico, calcule $m\widehat{AB} + m\widehat{PQ}$.



- A) 140°
B) 150°
C) 160°
D) 120°
E) 110°

PROBLEMA N° 64

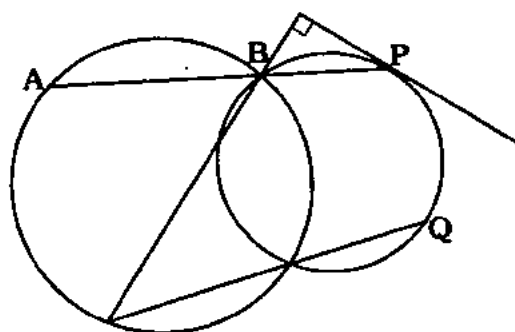
En el gráfico, $AB = CD$, $m\widehat{AB} = 20^\circ$ y $m\widehat{BC} = 100^\circ$. Calcule "x".



- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 65°

PROBLEMA N° 65

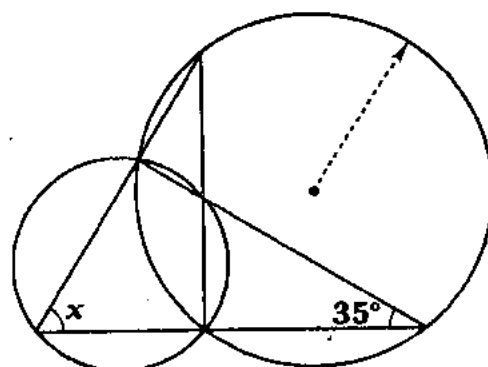
P es punto de tangencia y $m\widehat{PQ} = 80^\circ$.
Calcule $m\widehat{AB}$.



- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 66

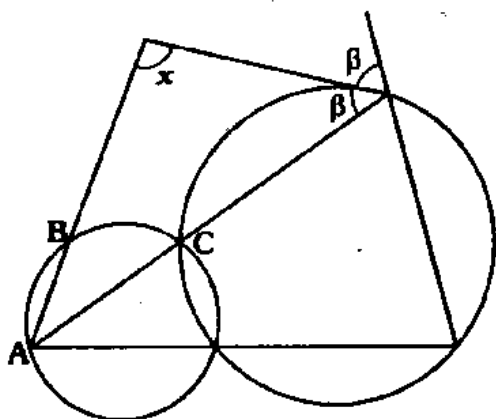
Calcule "x", en:



- A) 35° B) 55° C) 70°
D) 80° E) 65°

PROBLEMA N° 67

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule "x" en:

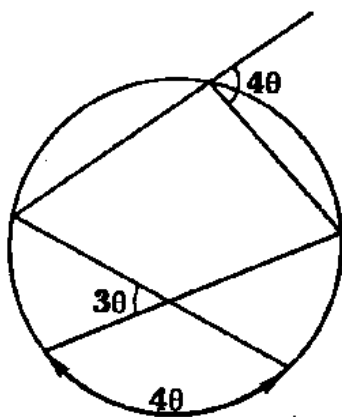


- A) 60° B) 90° C) 120°
D) 75° E) 65°

PROBLEMA N° 68

En el gráfico, calcule " θ ".

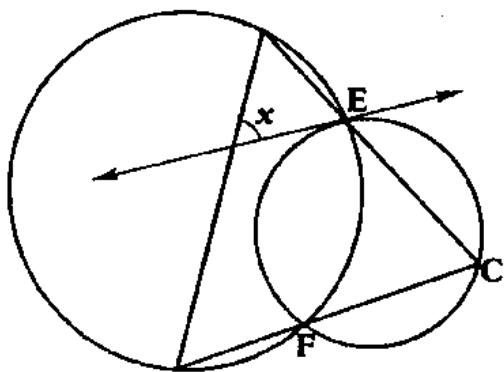
- A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



PROBLEMA N° 69

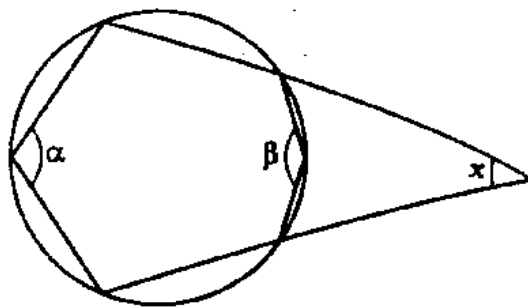
En el gráfico, E es punto de tangencia y $m\widehat{EFC} = 230^\circ$. Calcule "x".

- A) 70°
B) 60°
C) 55°
D) 65°
E) 50°



PROBLEMA N° 70

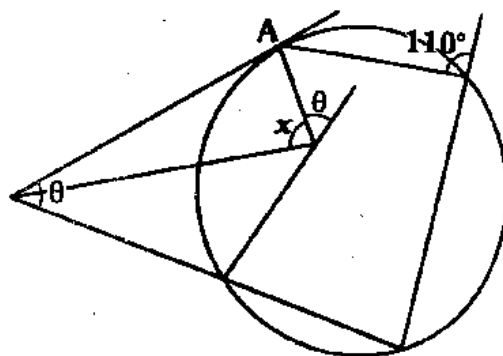
En el gráfico, $\beta - \alpha = 40^\circ$. Calcule "x".



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 80°

PROBLEMA N° 71

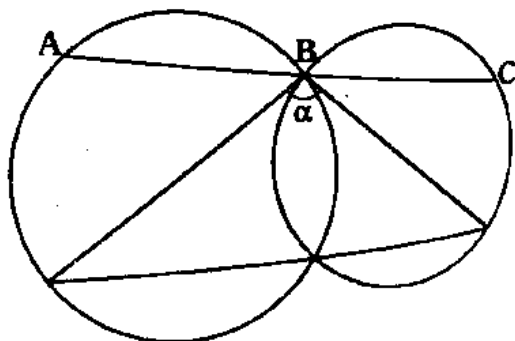
A es punto de tangencia. Calcule "x".



- A) 55° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA N° 72

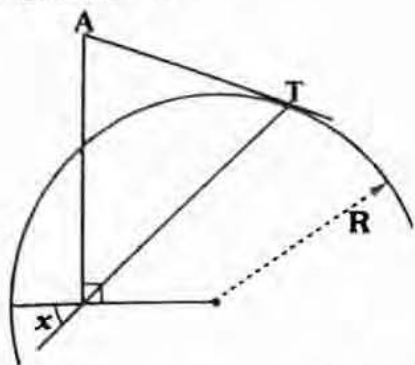
En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 210^\circ$. Calcule "x".



- A) 150° B) 75° C) 105°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 73

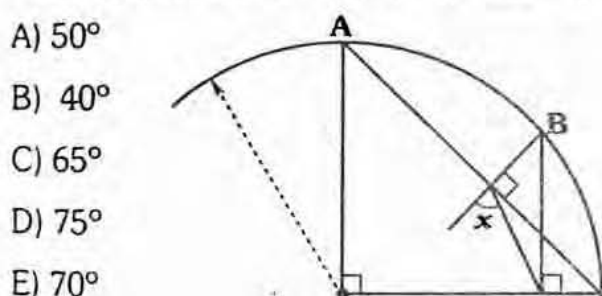
En el gráfico, T es punto de tangencia y $AT=R$. Calcule "x".



- A) 30° B) 53° C) 60°
D) 45° E) $\frac{127^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 74

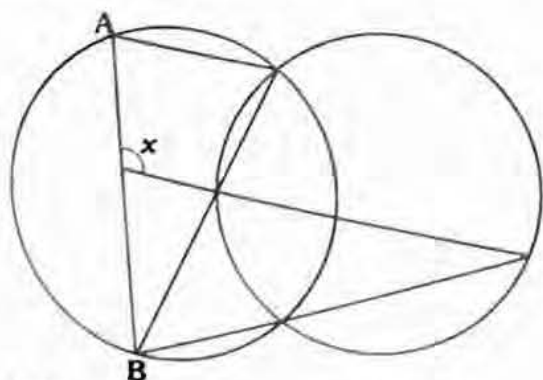
En el gráfico, $m\widehat{AB} = 50^\circ$. Calcule "x".



- A) 50°
B) 40°
C) 65°
D) 75°
E) 70°

PROBLEMA Nº 75

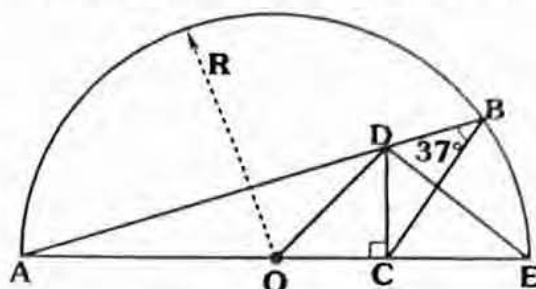
Si $m\widehat{AB} = 160^\circ$, calcule "x".



- A) 100° B) 80° C) 160°
D) 140° E) 120°

PROBLEMA N° 76

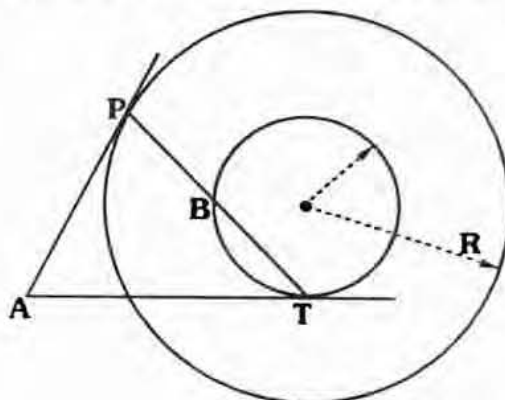
En el gráfico, $DE=5$ y $R=7$, calcule OD.



- ❖ A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 4
❖ D) 3 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 77

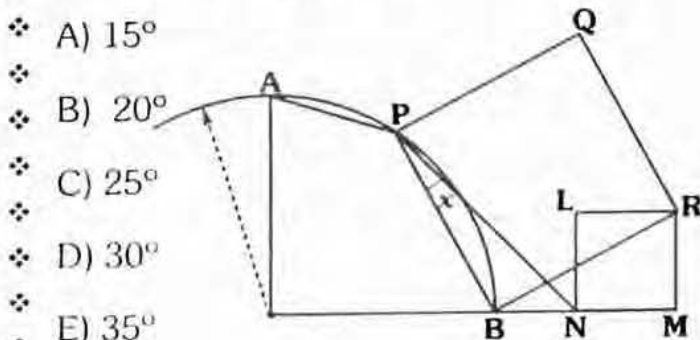
En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{BT} = 74^\circ$ y $AP = 6$. Calcule R.



- ❖ A) 5 B) 6 C) 7
❖ D) 8 E) 9

PROBLEMA N° 78

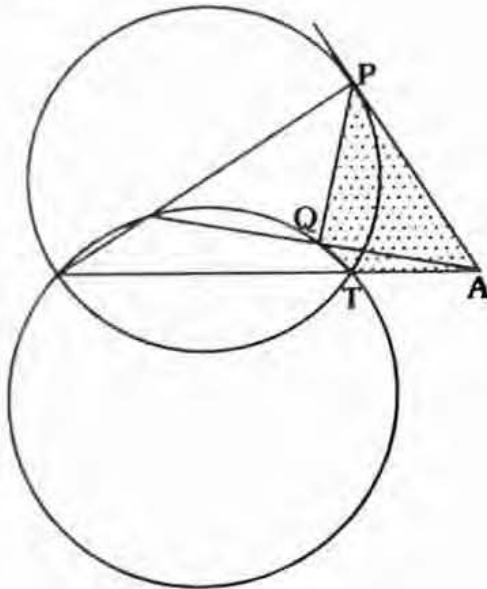
Si BPQR y NLRM son cuadrados y $m\widehat{AP} = 40^\circ$. Calcule "x".



- ❖ A) 15°
- ❖ B) 20°
- ❖ C) 25°
- ❖ D) 30°
- ❖ E) 35°

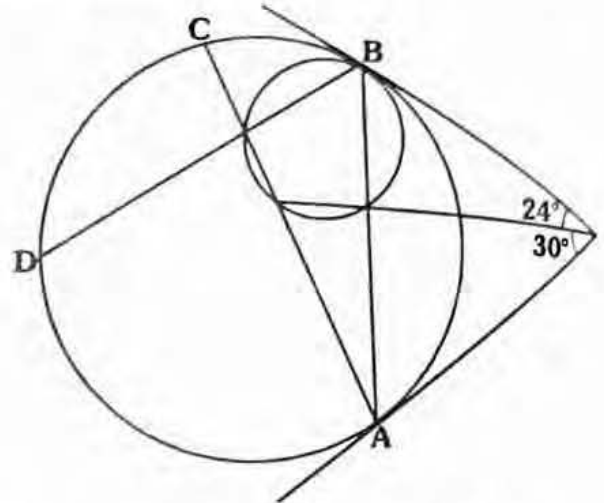
PROBLEMA N° 79

En el gráfico, P es punto de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero ATQP es inscriptible.



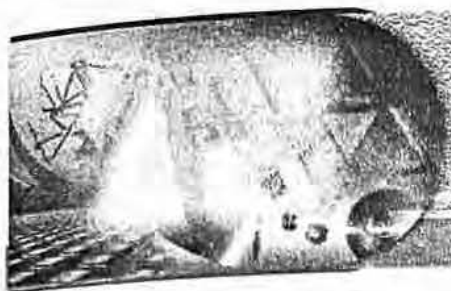
PROBLEMA N° 80

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{CD}$.



- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 48° E) 68°





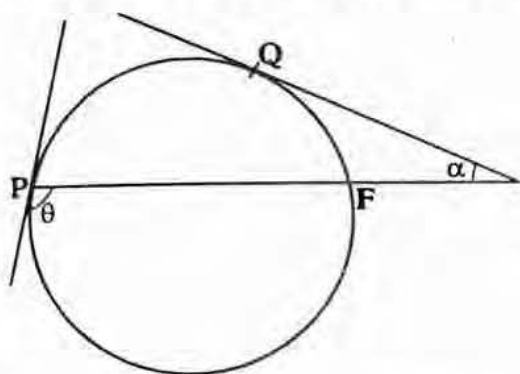
Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA N° 81

(Seminario)

En la figura adjunta, P y Q son puntos de tangencia, $\alpha + \theta = 150^\circ$. Halle $m\widehat{QF}$.



- A) 26° B) 28° C) 30°
D) 32° E) 34°

PROBLEMA N° 82

(Seminario)

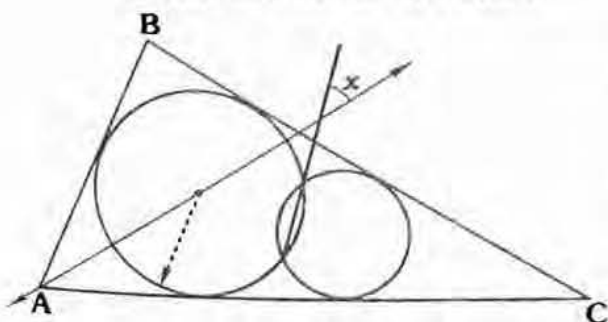
Dos circunferencias congruentes contenidas en el mismo plano, no puede tener solamente el siguiente número de tangentes comunes:

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) N.A

PROBLEMA N° 83

(Seminario)

En un triángulo ABC; $m\angle B = \beta$. Halle: "x".



- ❖ A) $\frac{\beta}{4}$ B) $\frac{\beta}{2}$ C) β
❖ D) $90 - \beta$ E) $90 - \frac{\beta}{2}$

PROBLEMA N° 84

(Seminario)

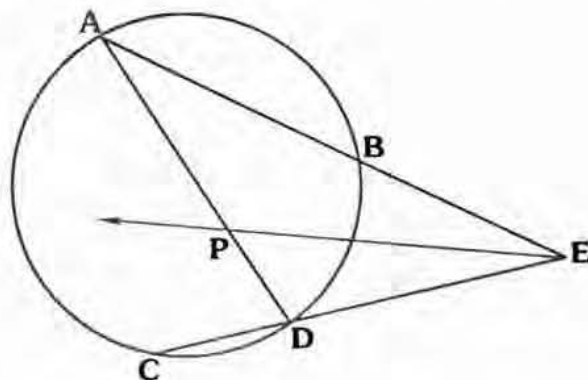
❖ Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios congruentes y centro O y O' respectivamente. Si desde O y O' se trazan las tangentes a la otra circunferencia determinando un ángulo que mide $5X$, luego el mayor valor de X es:

- ❖ A) 12° B) 15° C) 18°
❖ D) 21° E) 24°

PROBLEMA N° 85

(Seminario)

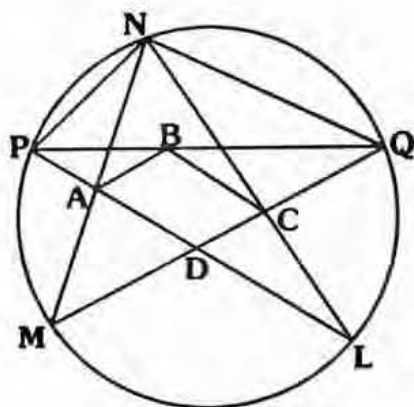
❖ En la figura mostrada $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 120^\circ$ y $m\angle AEP = m\angle PED$. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por $\overline{AD}$ y $\overline{EP}$.



- ❖ A) 20° B) 30° C) 40°
❖ D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 86 (PRÁCTICA CALIFICADA)

En la figura mostrada ABCD es un paralelogramo y $m\widehat{PNQ} = 160^\circ$. Calcule la medida del ángulo MNL.



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 87 (Seminario)

Se tienen las circunferencias exteriores con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (B y C en $\overline{AD}$), en $\overline{BC}$ se ubica el punto P y en una recta tangente común exterior se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MP}$ y $\overline{NP}$ son tangentes a las circunferencias en los puntos Q y T respectivamente y $m\angle DPT = m\angle QPA$.

Si $PQ = a$ y $PT = b$ entonces, la longitud de $\overline{MN}$ es:

- A) $a+b$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$
D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

PROBLEMA N° 88 (Seminario)

Sea ABC un triángulo rectángulo; $m\angle B = 90^\circ$. La circunferencia ex-inscrita relativa al cateto $\overline{BC}$, determina los puntos de tangencia: Q en $\overline{BC}$ y M, N en las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente,

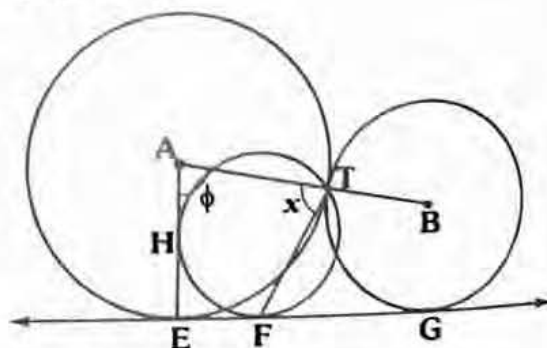
- ❖ se traza $\overline{QJ} \perp \overline{MN}$ (J en $\overline{MN}$). Halle
❖ $m\angle CJB$.
❖ A) 30° B) 45° C) 60°
❖ D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 89 (Seminario)

- ❖ ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
❖ inscrito en una circunferencia tal que
❖ $AD = 2BC$, CH es altura y su prolongación
❖ intercepta a la circunferencia en G. Si
❖ $DG = BD$ y $AD = 8$. Halle CH.
❖ A) 1 B) 2 C) 3
❖ D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 90 (Seminario)

- ❖ En la figura A, B son centros de las circunferencias; E, F, G, H y T son puntos de tangencia. Halle x, si dos circunferencias son de igual radio.



- ❖ A) $90^\circ + \frac{\phi}{2}$ B) $180^\circ - 2\phi$
❖ C) $180^\circ - \frac{3}{2}\phi$ D) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$
❖ E) $180^\circ - \frac{\phi}{2}$

PROBLEMA N° 91 (Seminario)

- ❖ Una circunferencia $\mathcal{C}_2$ contiene al centro O de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y la interseca en A y B; si en $\mathcal{C}_2$ se trazan las cuerdas perpendi-

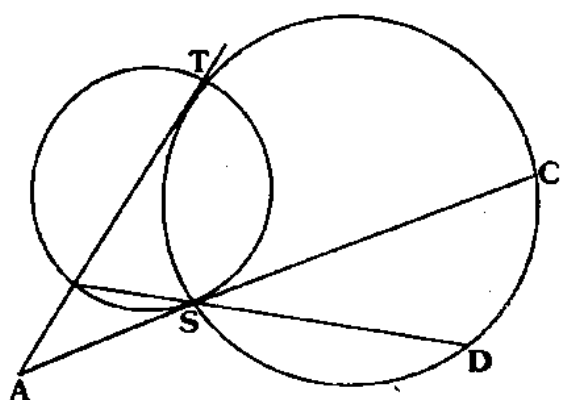
culares $\overline{OP}$ y $\overline{AQ}$ de modo $m\widehat{PQ} = 120^\circ$.
Calcule la $m\widehat{AB}$ en $\mathcal{C}_1$.

- A) 100° B) 110°
C) 120° D) 130°
E) 140°

PROBLEMA N° 92

(Seminario)

En la figura $m\widehat{DC} = 80^\circ$, $m\widehat{DS} = 40^\circ$ y T y S son puntos de tangencia, halle $m\angle TAS$.



- A) 20° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA N° 93

(Seminario)

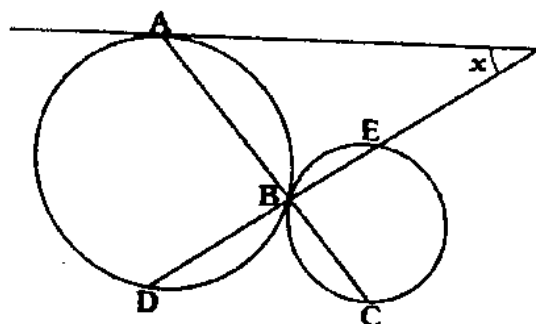
Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se interceptan en los puntos P y Q. En los arcos mayores PQ de cada circunferencia se ubican los puntos A y B respectivamente. Si $m\widehat{AP} = 40^\circ$, $m\widehat{PB} = 50^\circ$ y la suma de las medidas de los arcos menores PQ es 110° . Halle $m\angle APB$.

- A) 90° B) 95° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA N° 94

(Seminario)

En la figura A, B, son puntos de tangencia y $m\widehat{BD} = 102^\circ$ y $m\widehat{BC} = 114^\circ$. Halle "x".



- A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 95

(Seminario)

Dos circunferencias congruentes se intersectan en C y E. Si en una de ellas se eligen los puntos A y B tal que $\overline{AE} \cap \overline{BC} = \{D\}$ y D pertenece a la otra circunferencia. Si $m\widehat{AB} = 122^\circ$.

Calcule $m\angle CDE$.

- A) 110° B) $118,5^\circ$ C) $120,5^\circ$
D) 135° E) 140°

PROBLEMA N° 96

(Seminario)

Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes exteriores y la recta que pasa por el punto de tangencia E intercepta a $\mathcal{C}_1$ en A a $\mathcal{C}_2$ en B. Si $\overline{AF}$ es cuerda en $\mathcal{C}_1$, $\overline{BG}$ es cuerda en $\mathcal{C}_2$, $\overline{FG}$ es tangente común y los rayos AX y BY forman con AB ángulos de medidas "α" y "ω", siendo 2α y 2ω las medidas de los ángulos que forman FA con AX y GB con BY; calcule la medida del menor ángulo que determinan AX con BY.

- A) 30° B) 70° C) 75°
D) 90° E) A y D

PROBLEMA N° 97

(Seminario)

$\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores en P, desde un punto exterior Q se

trazan una recta tangente a cada circunferencia en T y S ($T \in \mathcal{C}_1$ y $S \in \mathcal{C}_2$). Si $m\angle TQS = 80^\circ$.

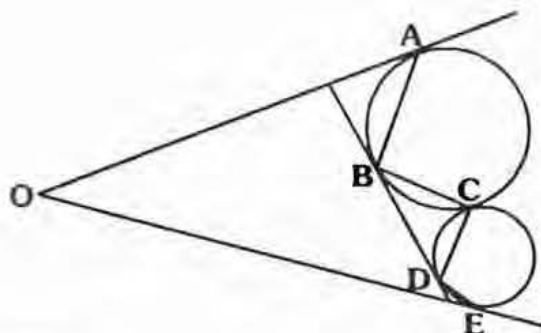
Halle la medida del ángulo agudo que forman las rectas PS y TP.

- A) 40° B) 45° C) 50°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA N° 98

(Seminario)

En la figura mostrada los puntos A, B, C, D y E son de tangencia. Si $m\angle AOE = 2^\circ$, entonces $m\angle ABC + m\angle CDE$ es:



- A) 179° B) 180°
C) 181° D) 182°
E) 190°

PROBLEMA N° 99

(Seminario)

Desde un punto C exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{CT}$ y la secante $\overline{CBA}$. En la prolongación de la cuerda TB se ubica el punto D tal que la $m\angle BDC = 40^\circ$. En la prolongación del segmento CT se ubica el punto E y en la prolongación del segmento DC se ubica el punto F. Si $m\angle ATE = m\angle TCF$.

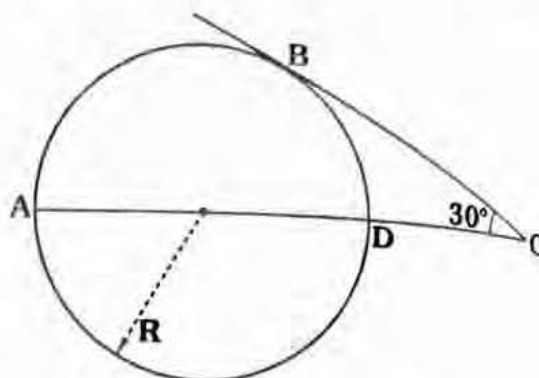
Halle $m\angle ACT$.

- A) 20° B) 40° C) 45°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA N° 100

(Seminario)

En la figura mostrada, calcular el radio de una circunferencia que equidista de A, B, C y D.



- A) R B) 2R C) $\frac{3R}{2}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2R}{3}$

PROBLEMA N° 101

(Seminario)

En un cuadrado ABCD se traza la circunferencia inscrita determinando los puntos de tangencia P y T con los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ intersecan a la circunferencia, y al arco menor PT en los puntos M y N respectivamente, calcule $m\widehat{MN}$.

- A) 80° B) 82° C) 84°
D) 86° E) 88°

PROBLEMA N° 102

(Seminario)

En un triángulo ABC, $m\angle A = 30^\circ$ y $m\angle B = 96^\circ$, $E \in \overline{AB}$. Si $AE = BC$.

Calcule la $m\angle ACE$.

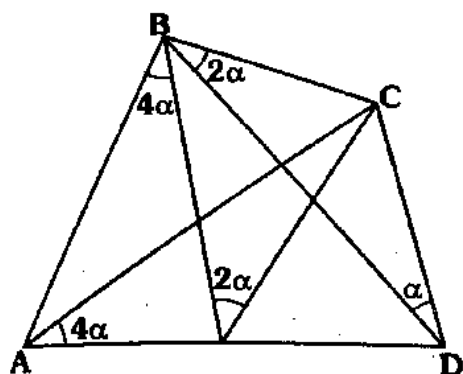
- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

PROBLEMA N° 103

(Seminario)

En la figura adjunta, $AB = AD$.

Halle el valor de " α ".



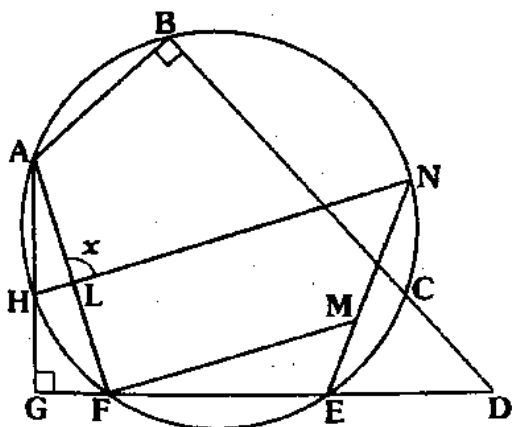
- A) 6° B) 8° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA N° 104 (Seminario)

En la figura adjunta:

$$m\angle ABD = m\angle AGD = 90^\circ$$

$MN = ME$, $NC \cong CE$, $m\angle MGE = 20^\circ$, Halle el valor de X.



- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

PROBLEMA N° 105 (Seminario)

Las circunferencias que tienen como diámetros las tres cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ de una circunferencia dada, se intersectan por pares en los puntos P, Q, y R respectivamente, luego podemos afirmar que:

- ❖ A) $m\angle BCD = 120^\circ$
- ❖ B) $m\angle PCD = 90^\circ$
- ❖ C) P, Q y R son colineales
- ❖ D) $m\angle PQD = 120^\circ$
- ❖ E) Todas las proposiciones son falsas.

PROBLEMA N° 106 (Seminario)

En un triángulo ABC, se circunscribe una circunferencia, se traza la cuerda $\overline{DE}$ que intersecta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente, $BD \cong BE$, la $m\angle ABC = 10^\circ$, la $m\angle PCB = 5^\circ$.

Halle la $m\angle AQC$.

- ❖ A) 10 B) 15 C) 18
- ❖ D) 20 E) 25

PROBLEMA N° 107 (Seminario)

ABCD es un cuadrilátero bicéntrico: I es el centro de la circunferencia inscrita $\mathcal{C}_1$. O es el centro de la circunferencia circunscrita $\mathcal{C}_2$ la recta IO intersecta a las circunferencias $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_1$, en los puntos consecutivos P, Q, S y T. Si $PQ = a$, $ST = b$ y $b > a$, halle OI. (P y T en $\mathcal{C}_2$ y Q y S en $\mathcal{C}_1$).

- ❖ A) $\frac{b-a}{2}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $a-b+1$
- ❖ D) $\sqrt{ab}$ E) $\frac{2b-a}{2}$

PROBLEMA N° 108 (Seminario)

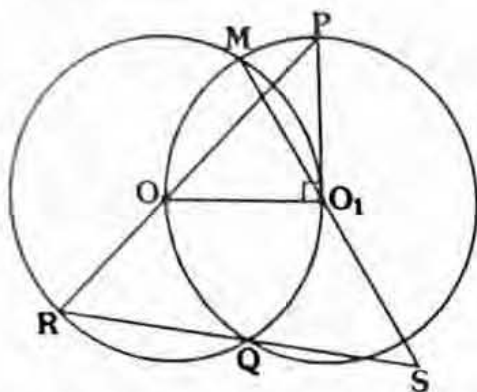
En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{QC}$ y $m\angle A = 80^\circ$ y $m\angle ABQ = 70^\circ$.

Halle $m\angle BCA$

- ❖ A) 15° B) 18° C) 20°
- ❖ D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 109 (Seminario)

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. O y O_1 son los centros $m\angle OO_1P = 90^\circ$. Halle la $m\angle RSM$.



- A) 30° B) 36° C) 80°
D) 45° E) $52,5^\circ$

PROBLEMA N° 110 (Seminario)

En un triángulo ABC , demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo biseca al segmento que une el incentro con el excentro.

PROBLEMA N° 111 (Seminario)

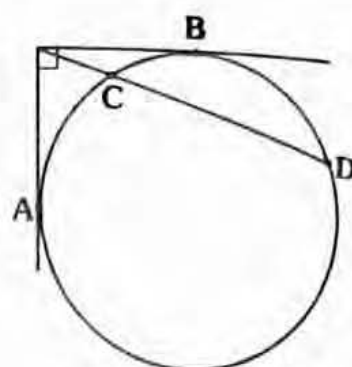
En un triángulo acutángulo ABC , se trazan las alturas AQ , BF y CP .

Si $m\angle BAC = \alpha$, $m\angle ABC = \beta$ y $m\angle BCA = \gamma$, entonces demostrar que:

- A) $m\angle PQF = 180^\circ - 2\alpha$
B) $m\angle PFQ = 180^\circ - 2\beta$
C) $m\angle QPF = 180^\circ - 2\gamma$
D) $m\angle QPF = 170^\circ - 4\gamma$
E) $m\angle QPF = 184^\circ - 2\theta$

PROBLEMA N° 112 (Práctica)

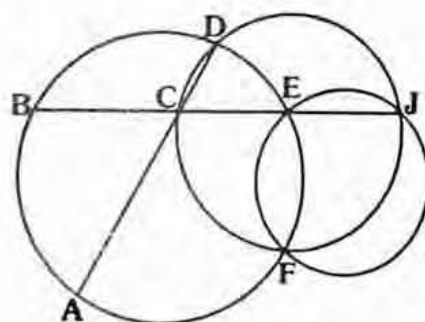
En la figura, A y B son puntos de tangencia, $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$, halle $m\widehat{BD}$.



- A) 30° B) 43° C) 45°
D) 60° E) 53°

PROBLEMA N° 113 (Seminario)

En la figura, $m\widehat{EJ} = 50^\circ$. Hallar $m\widehat{AB}$

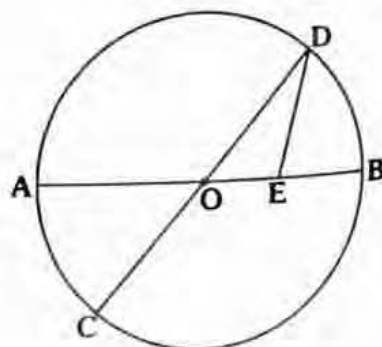


- A) 50° B) 40° C) 130°
D) 65° E) 75°

PROBLEMA N° 114 (Seminario)

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ diámetro de la circunferencia, si $DE = 5u$ y $2(m\angle CDE) + 3(m\angle DOB) = 180^\circ$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es.

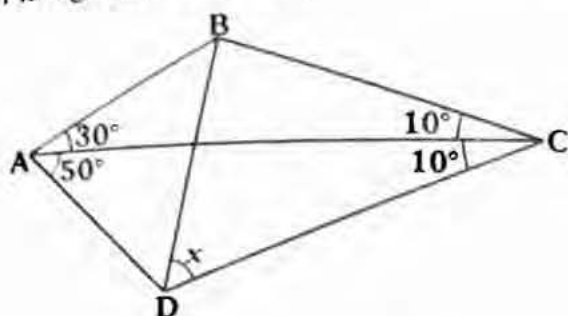
- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



PROBLEMA N° 115

(Seminario)

En la figura, hallar "x".



- A) 30° B) 45° C) 49°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA N° 116

(Seminario)

Indicar el valor de verdad de:

- I. Todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.
- II. Si dos circunferencias son secantes, entonces el segmento que une los centros intercepta a la cuerda común.
- III. La mediatriz de una cuerda contiene al centro de la circunferencia.

- A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

PROBLEMA N° 117

(Seminario)

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. Dos puntos distintos de una circunferencia determinan un solo arco.
- II. Si un segmento intercepta a una circunferencia en un punto, entonces es tangente.
- III. Si dos circunferencias coplanarias, no tienen un punto común, entonces son exteriores.

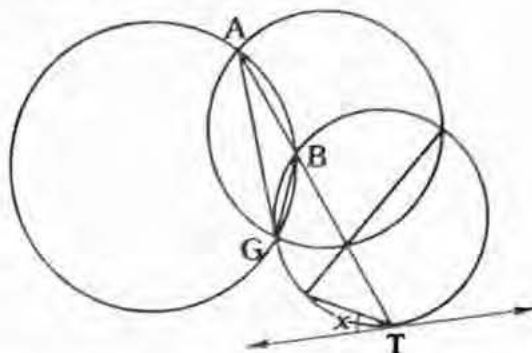
- A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

PROBLEMA N° 118

(Seminario)

Se tienen tres circunferencias que pasan por el punto G, siendo $m\angle AGB = 50^\circ$; calcule "x". (T es punto de tangencia)

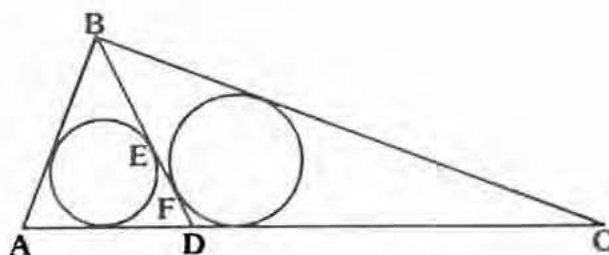
- A) 45°
B) 25°
C) 65°
D) 50°
E) 75°



PROBLEMA N° 119

(Seminario)

En el triángulo rectángulo ABC, E y F son puntos de tangencia $BE - FD = 8$, halle la longitud del inradio de ABC.

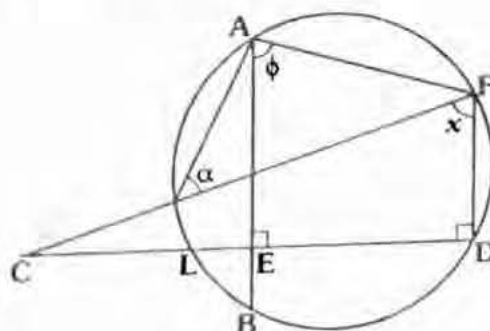


- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA N° 120

(Seminario)

En la figura mostrada, R es radio de la circunferencia $CL = 2R$. Hallar "x".



- A) $90^\circ + \alpha - \phi$ B) $90^\circ + \phi - \alpha$
 C) $90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha - \phi)$ D) $90^\circ + \frac{1}{2}(\phi - \alpha)$
 E) $90^\circ + \frac{1}{4}(\alpha - \phi)$

PROBLEMA N° 121

(Seminario)

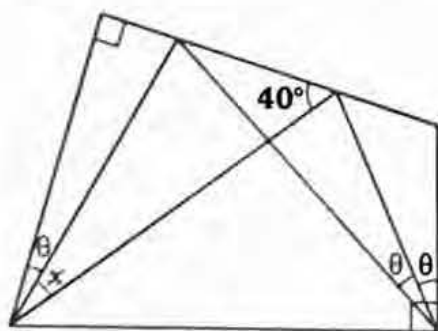
Indique cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- I. Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O, $\overleftrightarrow{L}$ es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda $\overline{AB}$ y del arco $\overline{AB}$. Entonces $O \in \overleftrightarrow{L}$.
 II. El teorema de Pithot, se aplica a un polígono circunscrito de número par de lados.
 III. Todo paralelogramo es inscriptible.
 A) I B) II C) I y II
 D) I y III E) III

PROBLEMA N° 122

(Seminario)

En la figura, hallar "x".

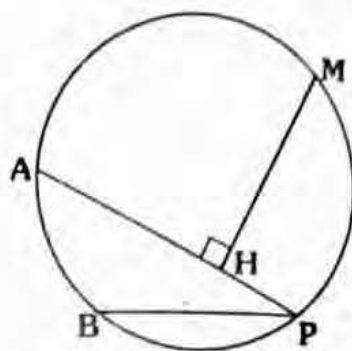


- A) 20° B) 40° C) 50°
 D) 70° E) 25°

PROBLEMA N° 123

(Seminario)

En la figura: $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$ y $AH = 5$.
 Halle el valor de $HP + PB$.



- A) 3 B) 3,5 C) 4
 D) 4,5 E) 5

PROBLEMA N° 124

(Seminario)

En un triángulo ABC $m\angle A = 30^\circ$ y $m\angle C = 20^\circ$. Se ubica F en $\overline{AC}$ tal que $AF = BC$. Halle $m\angle FBC$.

- A) 10 B) 15 C) 20
 D) 25 E) 30

PROBLEMA N° 125

(Seminario)

En un cuadrilátero inscrito ABCD se ubica M en el arco $\overline{BC}$, tal que las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{DC}$ se interceptan en N. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DN}$ y $m\angle ADM = 50^\circ$, halle $m\angle DNB$.

- A) 30° B) 35° C) 40°
 D) 45° E) 50°

PROBLEMA N° 126

(Práctica)

En un triángulo rectángulo ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ y se circunscribe una circunferencia al triángulo BHM. Si $m\widehat{HM} = \theta$, halle $m\angle C$.

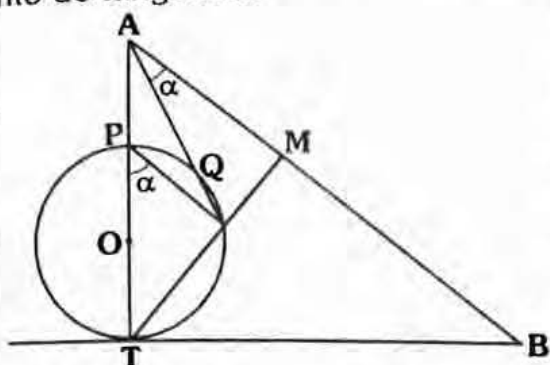
- A) $30^\circ - \frac{\theta}{2}$ B) $75^\circ - \frac{\theta}{4}$ C) $60^\circ - \frac{\theta}{4}$
 D) $30^\circ - \frac{\theta}{4}$ E) $45^\circ - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA N° 127

(Seminario)

En la figura adjunta, $AM = MB$ y $m\widehat{PQ} = 24^\circ$. Halle el valor de " α ", siendo O el centro y T el punto de tangencia.

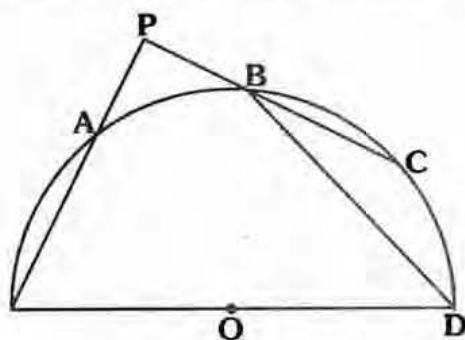
- A) 30°
- B) 32°
- C) 34°
- D) 36°
- E) 40°



PROBLEMA N° 128

(Seminario)

En la figura adjunta, $BD = 2(AP)$ y O es centro y $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$. Halle $m\widehat{AB}$.



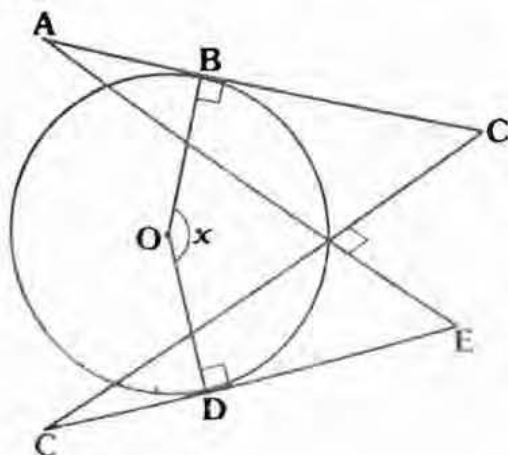
- A) 40°
- B) 45°
- C) 50°
- D) 55°
- E) 60°

PROBLEMA N° 129

(Seminario)

En la figura, $AB = BC$ y $CD = DE$. Halle " x ". (O es centro).

- A) 100°
- B) 110°
- C) 115°
- D) 120°
- E) 130°



PROBLEMA N° 130

(Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ que se interceptan en I. La circunferencia inscrita en el cuadrilátero AFIE es tangente a $\overline{FI}$ en P, a $\overline{IE}$ en Q y en M a $\overline{AE}$. Si $m\angle A = 2m\angle PMQ$, halle $m\angle BIC$.

- A) 110°
- B) 120°
- C) 130°
- D) 140°
- E) 150°

PROBLEMA N° 131

(Seminario)

Se tienen dos circunferencias de centros O_1 y O_2 secantes en B y D en cada circunferencia se toman los puntos A y C de manera que $m\widehat{ABD} = 120^\circ$ y $m\widehat{CBD} = 150^\circ$. Hallar la $m\angle ABC$.

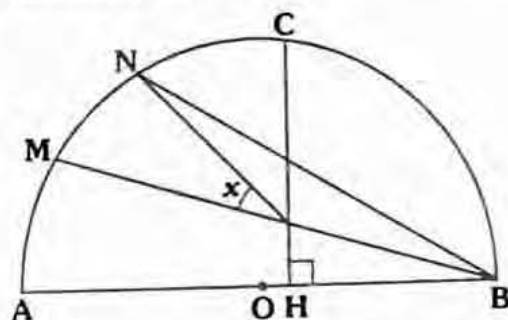
- A) 30°
- B) 60°
- C) 75°
- D) 135°
- E) 120°

PROBLEMA N° 132

(Seminario)

En la figura, $m\widehat{AM} = 40^\circ$, $m\widehat{MN} = 20^\circ$, $m\widehat{BC} = 80^\circ$ y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{AB}$ es diámetro ($AO = OB$).

- A) 20°
- B) 25°
- C) 30°
- D) 35°
- E) 40°



PROBLEMA N° 133

(Seminario)

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean diámetros de dos semicircunferencias que se interceptan en M. Por M se traza una secante que determinan los puntos E y F en las semicircunferencias.

Si $m\widehat{EM} + m\widehat{MF} = \theta$, halle $m\angle BMC$.

- A) $90^\circ - \frac{\theta}{3}$ B) $90^\circ - \frac{\theta}{4}$ C) $90^\circ + \frac{\theta}{2}$
D) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ E) $90^\circ - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA N° 134

(Seminario)

Se tienen tres circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ secantes dos a dos que se interceptan $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en A y B; $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$ en A y C; $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ en A y D. La prolongación de $\overline{BC}$ intercepta a $\mathcal{C}_3$ en F y a $\mathcal{C}_2$ en E, la prolongación de $\overline{DE}$ corta a $\mathcal{C}_3$ en Q. Si $m\widehat{BC} = 2\alpha$, halle $m\widehat{QF}$.

- A) α B) 3α C) $90 - 2\alpha$
D) 2α E) $90^\circ - \alpha$

PROBLEMA N° 135

(Seminario)

En un triángulo ABC, $m\angle A = 96^\circ$ y $m\angle C = 30^\circ$. Si se traza la ceviana $\overline{BQ}$ tal que $\overline{BQ} \perp \overline{AC}$, halle $m\angle QBC$.

- A) 18° B) 20° C) 22° D) 24° E) 28°

PROBLEMA N° 136

(Seminario)

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la secante $\overline{APQ}$; tal que $m\widehat{CQ} = 2(m\widehat{CP})$ y $m\angle BAC = 90^\circ$. Calcular $m\angle PAC$.

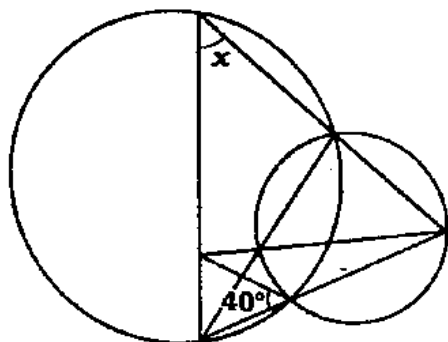
- A) 15° B) 30° C) 45° D) 18° E) $22^\circ 30'$

PROBLEMA N° 137

(Seminario)

En la figura adjunta, halle "x".

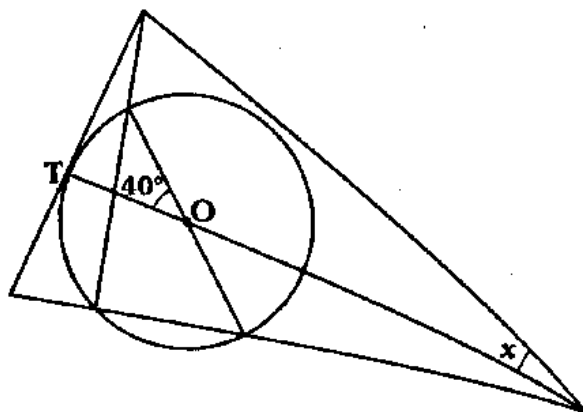
- A) 40°
B) 30°
C) 20°
D) 50°
E) 80°



PROBLEMA N° 138

(Seminario)

En la figura adjunta, O es el centro de la circunferencia, T es el punto de tangencia, halle el valor de "x".

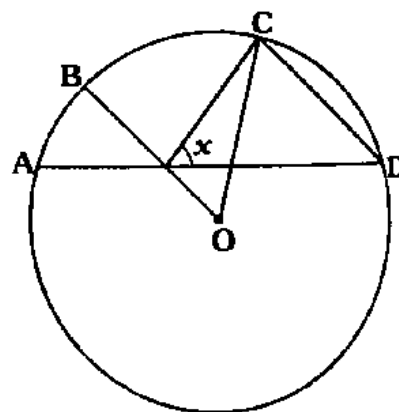


- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 139

(Seminario)

En la figura adjunta: $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$, O es el centro y $m\angle OCD = 70^\circ$. Halle el valor de "x".



- A) 30°
B) 25°
C) 40°
D) 45°
E) 60°

PROBLEMA N° 140

(Seminario)

Se tienen dos circunferencias ortogonales $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se interceptan en M y N. En $\mathcal{C}_1$ se ubica un punto A y en $\mathcal{C}_2$ un punto B. Por A y B se trazan tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se interceptan en C. Si MBA es una cuerda de $\mathcal{C}_1$, halle $m\angle ACB$.

- A) 45° B) 55° C) 75°
D) 80° E) 90°

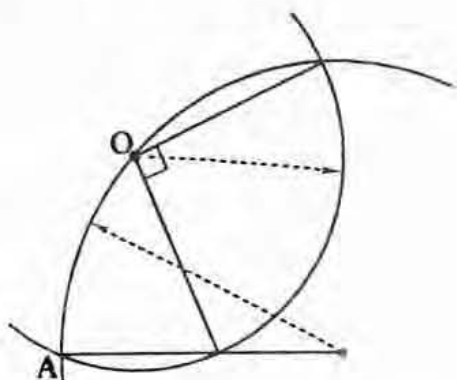


Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 141

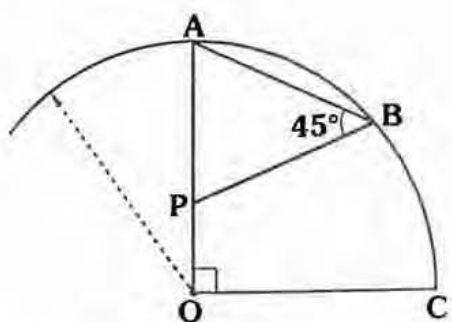
En el gráfico, calcule $m\widehat{AO}$.



- A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 54°

PROBLEMA N° 142

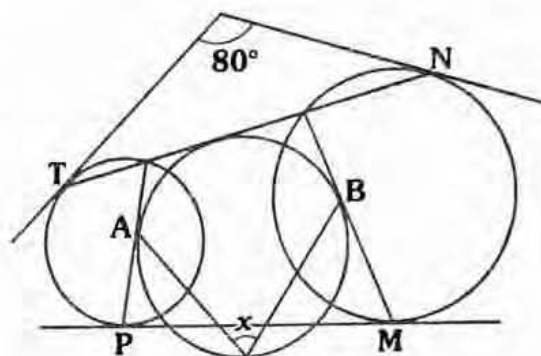
Si $BC=4$ y PC toma su menor valor entero. Calcule $m\widehat{BC}$.



- A) 30° B) 53° C) 45°
D) 36° E) 37°

PROBLEMA N° 143

Si T, P, M, N, A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

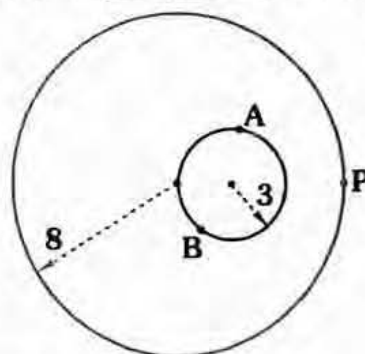


- A) 40° B) 50° C) 65°
D) 80° E) 100°

PROBLEMA N° 144

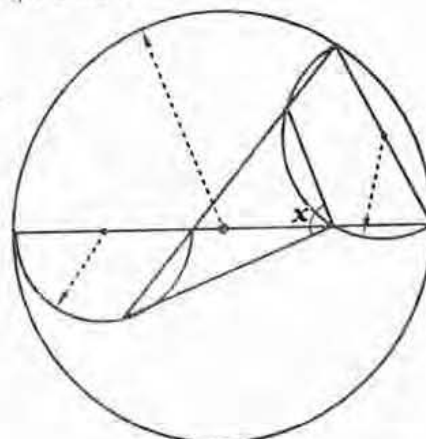
En el gráfico, A, B y P son puntos de tangencia. Calcule el mayor valor de $m\angle APB$.

- A) 45°
B) 60°
C) 74°
D) 53°
E) 106°



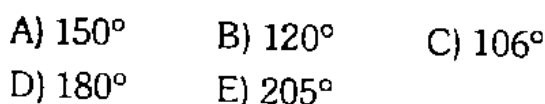
PROBLEMA N° 145

En el gráfico, calcule "x".

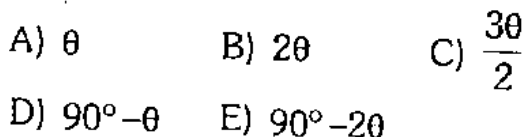


- A) 60°
B) 75°
C) 106°
D) 90°
E) 180°

En el gráfico, $\overline{AO} \parallel \overline{BC}$. Calcule $m\widehat{AD}$

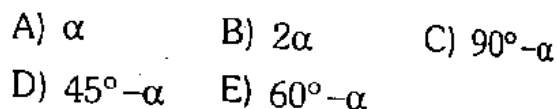


En el gráfico, P, Q, R, S y T son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{AB}$.



En una circunferencia de centro O , se ubican los puntos A , B y C . En $\overline{OB}$ se ubica P y D en $\overline{AC}$ tal que el cuadrilátero $BPDC$ es inscriptible. Demuestre que $\overline{OB} \perp \overline{PD}$.

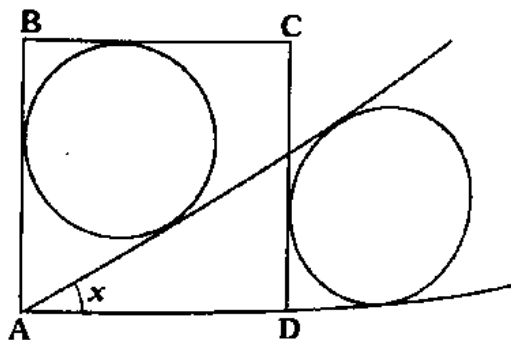
En el gráfico, P, Q, R, M, L y N son puntos de tangencia, si $\overline{LS} \parallel \overline{QP}$, calcule x en función de α .



Se tiene el cuadrado ABCD, se ubican M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AD}$, tal que $BM=MC$ y $DN=3(AN)$. Si $\overline{CN}$ y $\overline{DM}$ se cortan en P. Calcule $m\angle APN$.

- A) 10° B) $12^\circ 30'$ C) $11^\circ 30'$
D) $13^\circ 30'$ E) 39°

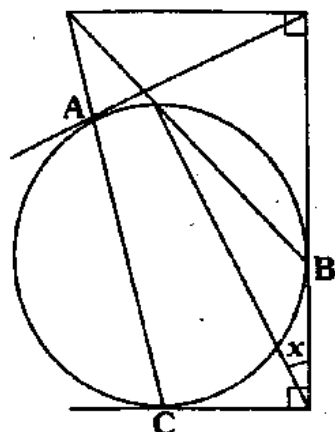
En el gráfico, las circunferencias son congruentes. Calcule "x".



- A) $\frac{53^\circ}{2}$ B) $\frac{45^\circ}{2}$ C) 30°
 D) 23° E) 37°

PROBLEMA N° 152

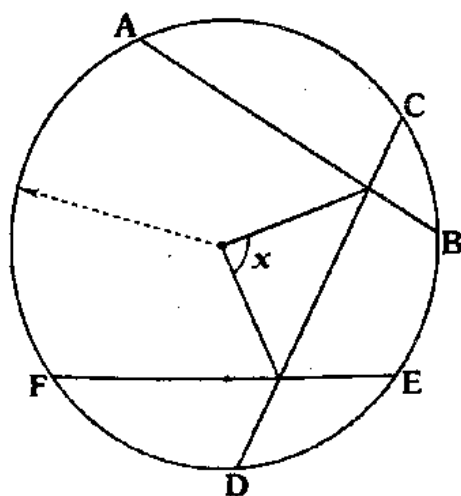
Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) $37^\circ/2$ B) 15° C) $45^\circ/2$
 D) $53^\circ/2$ E) 30°

PROBLEMA N° 153

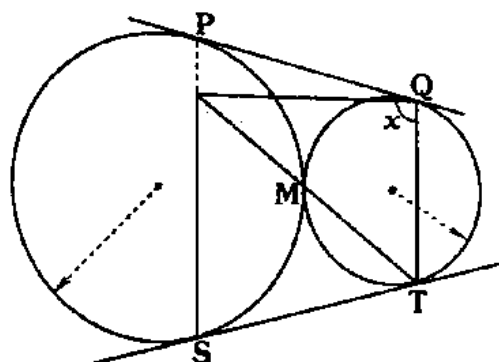
Si $AB = CD = EF$; $m\widehat{EB} = 40^\circ$ y $m\widehat{CD} = 110^\circ$. Calcule "x".



- A) 15° B) 45° C) 67°
 D) 70° E) 75°

PROBLEMA N° 154

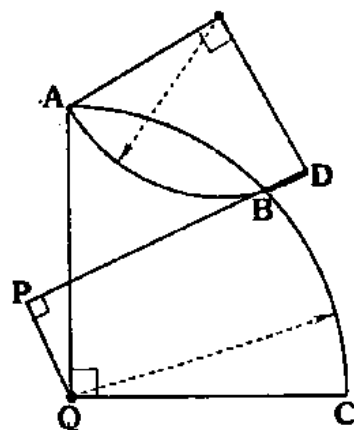
En el gráfico, P, Q, T, S y M son puntos de tangencia. Calcule x.



- A) 90° B) 120° C) 60°
 D) 135° E) 106°

PROBLEMA N° 155

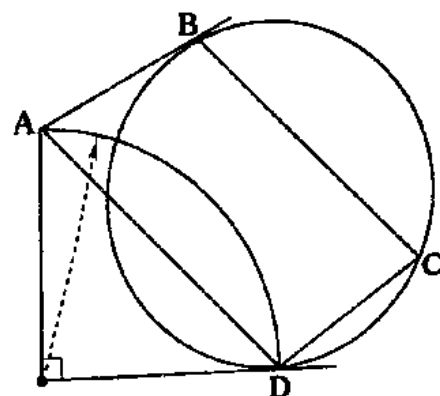
Si $AB = 2(PQ)$. Calcule $m\widehat{BC}$.



- A) 30°
 B) 60°
 C) 45°
 D) 53°
 E) 37°

PROBLEMA N° 156

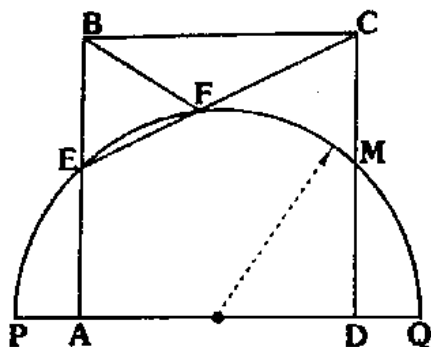
Si ABCD es un romboide; B y D son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{CD}$.



- A) 120°
 B) 60°
 C) 150°
 D) 90°
 E) 175°

PROBLEMA N° 157

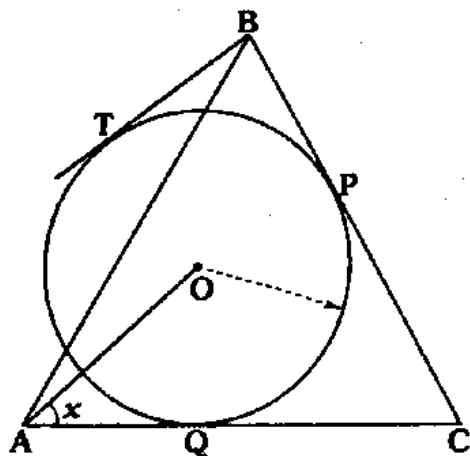
Si ABCD es un cuadrado, si $AP=DQ$; $EB=BF$. Calcule $m\widehat{FM}$.



- A) 60° B) 75° C) 53°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA N° 158

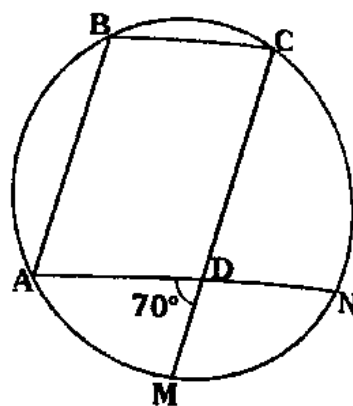
Si ABC es equilátero y $\overline{TB} \parallel \overline{AO}$; T, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 40° B) 30° C) 20°
D) 50° E) 45°

PROBLEMA N° 159

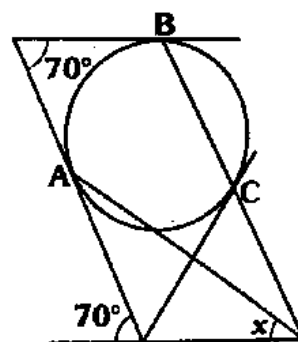
Si ABCD es un paralelogramo. Calcule $m\widehat{MN}$.



- A) 80° B) 60° C) 70°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA N° 160

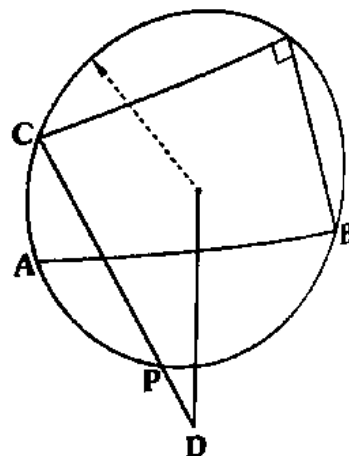
Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 45° B) 55° C) 35°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 161

Si $AB=CD$. Calcule $m\widehat{AP}$.

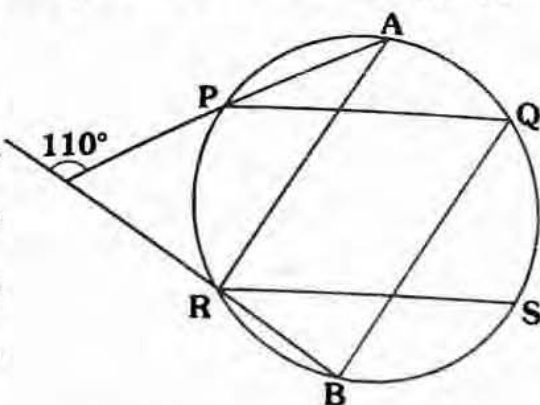


- A) 45°
B) 30°
C) 90°
D) 60°
E) 53°

PROBLEMA N° 162

Si $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{AR} \parallel \overline{QB}$. Calcule $m\widehat{RBS}$

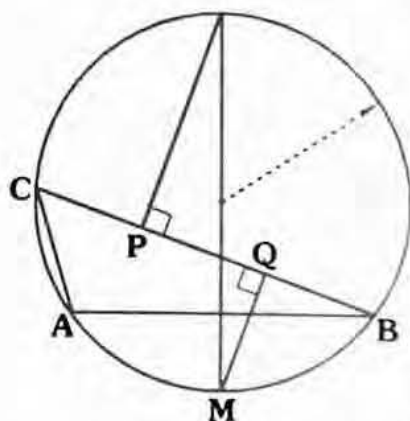
- A) 70°
- B) 140°
- C) 110°
- D) 120°
- E) 130°



PROBLEMA N° 163

Si $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$; $AC=6$. Calcule PQ .

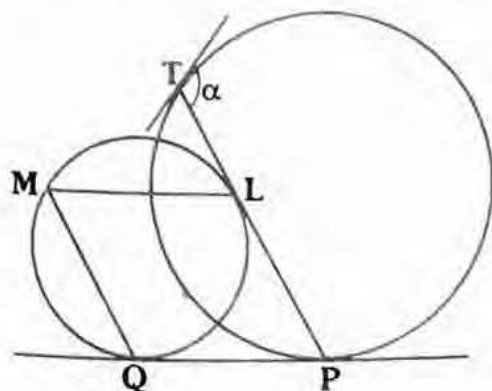
- A) 6
- B) 4,5
- C) $6\sqrt{2}$
- D) 3
- E) $6\sqrt{3}$



PROBLEMA N° 164

Si T, P, Q y L son puntos de tangencia y MLPQ es un paralelogramo. Calcule α .

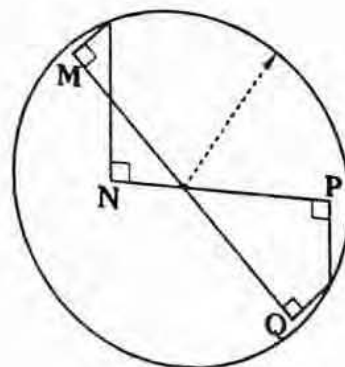
- A) 150°
- B) 135°
- C) 143°
- D) 120°
- E) 127°



PROBLEMA N° 165

Si $PQ=1$. Calcule MN .

- A) 0,5
- B) 1
- C) 0,8
- D) 1,2
- E) 1,5



PROBLEMA N° 166

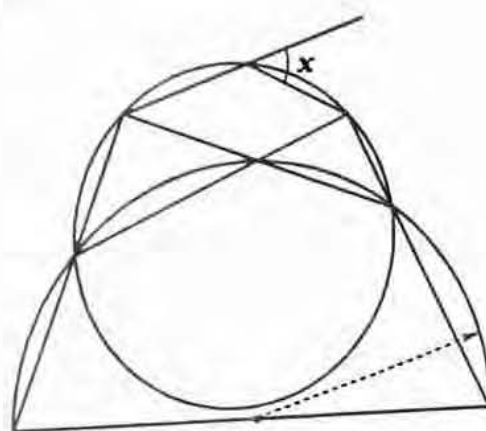
En una semicircunferencia de diametro $\overline{AB}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). En $\overline{PB}$ se ubica el punto Q tal que $m\angle APH = m\angle HPQ$; $AQ=8$.

Calcule PH .

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) $2\sqrt{2}$
- E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 167

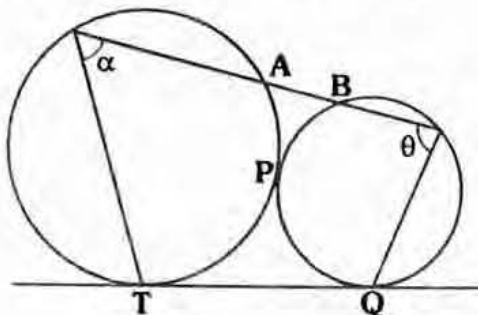
Calcule "x".



- A) 15°
- B) 30°
- C) 37°
- D) 45°
- E) 53°

PROBLEMA N° 168

Si T, P y Q son puntos de tangencia;
 $\alpha + \theta = 140^\circ$. Calcule $m\angle APB$.

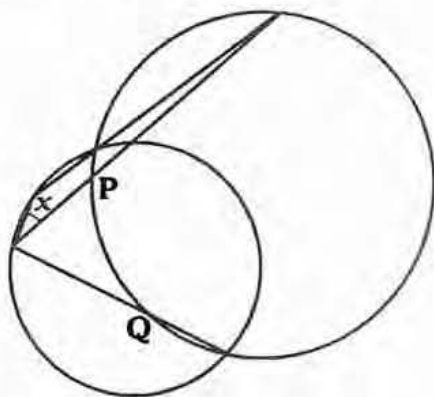


- A) 40° B) 55° C) 50°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA N° 169

Si $m\widehat{PQ} = 50^\circ$. Calcule "x".

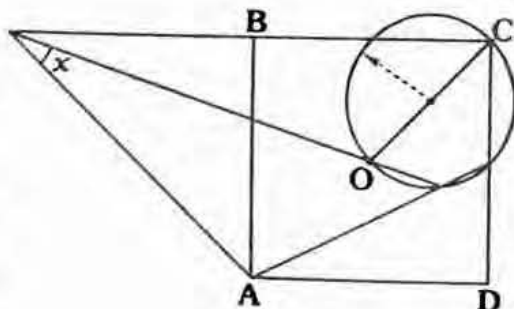
- A) 50°
B) 25°
C) 40°
D) 20°
E) 75°



PROBLEMA N° 170

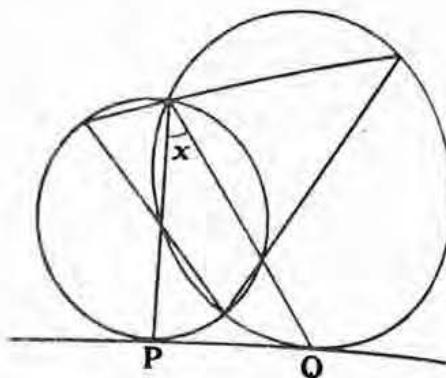
Si O es centro del cuadrado ABCD. Calcule "x".

- A) $\frac{53^\circ}{2}$
B) $\frac{37^\circ}{2}$
C) 45°
D) 30°
E) 15°



PROBLEMA N° 171

Si P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".

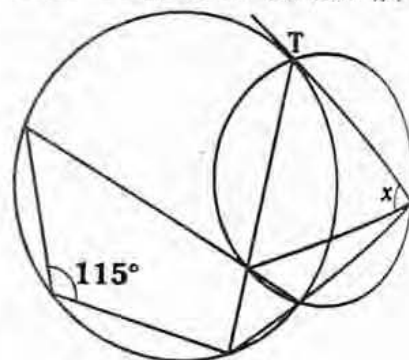


- A) 45° B) 30° C) 60°
D) 36° E) 54°

PROBLEMA N° 172

Si T es punto de tangencia. Calcule "x".

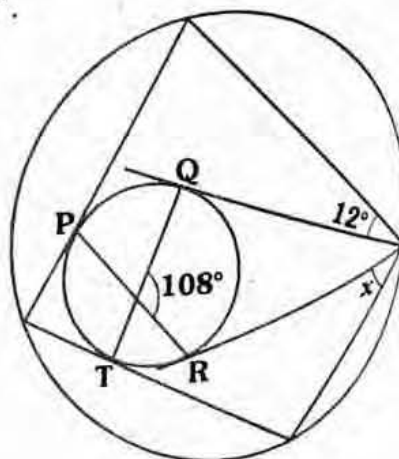
- A) 65°
B) 50°
C) 25°
D) 70°
E) 35°



PROBLEMA N° 173

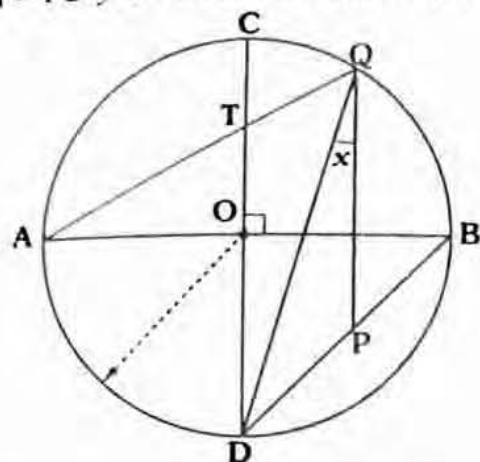
Si P, Q, T y R son puntos de tangencia.
Calcule "x".

- A) 48°
B) 36°
C) 24°
D) 12°
E) 60°



PROBLEMA N° 174

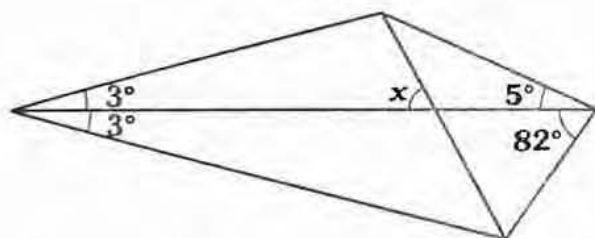
Si $CT=TO$ y $BP=PD$. Calcule " x ".



- A) 4° B) 14° C) 8°
D) 16° E) 15°

PROBLEMA N° 175

Calcule " x ".

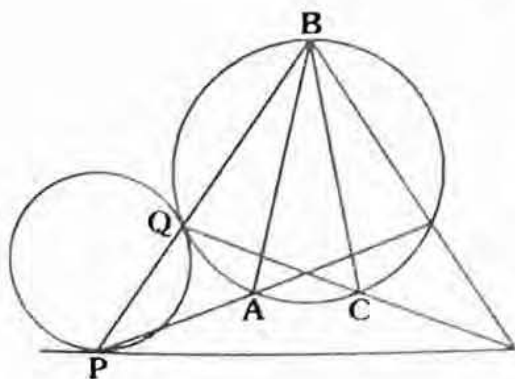


- A) 13° B) 15° C) 18°
D) 22.5° E) 10°

PROBLEMA N° 176

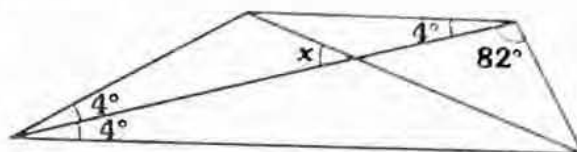
P y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{AB}{BC}$

- A) 1
B) 2
C) $\frac{3}{2}$
D) $\sqrt{2}$
E) FD.



PROBLEMA N° 177

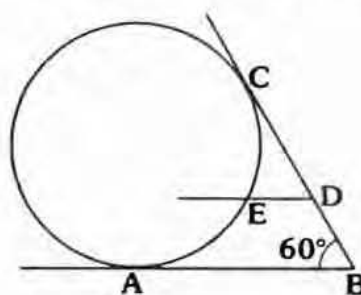
Calcule " x ".



- A) 8° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 24°

PROBLEMA N° 178

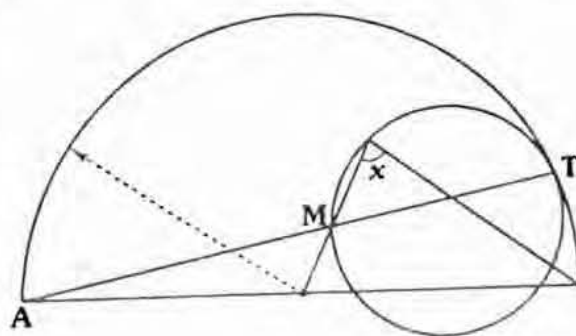
Si A y C son puntos de tangencia, $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ y $11(BD)=4(CD)$. Calcule $m\widehat{EC}$.



- A) 30° B) 60° C) 67°
D) 45° E) 70°

PROBLEMA N° 179

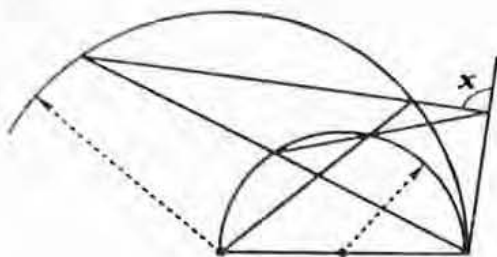
En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule " x " en función de α ($m\widehat{AT} = \alpha$).



- A) $90^\circ - \alpha$ B) $45^\circ + \alpha$ C) α
D) $90^\circ - 2\alpha$ E) 2α

PROBLEMA N° 180

En el gráfico, calcule "x".



- A) 60° B) 75°
C) 90° D) 105°
E) 120°

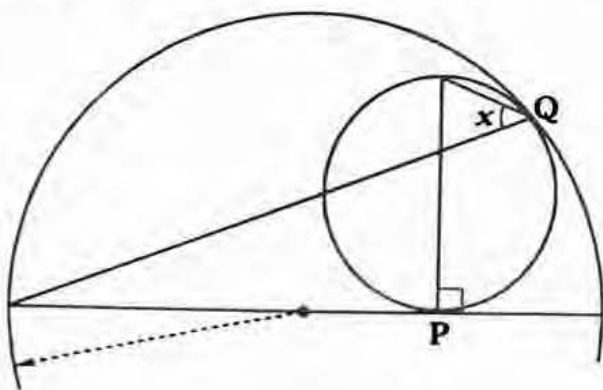
PROBLEMA N° 181

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los cuadrados ABPQ y BCMN, sea $\overline{MA} \cap \overline{QC} = \{S\}$.

Demostrar que $\overline{BS} \perp \overline{AC}$.

PROBLEMA N° 182

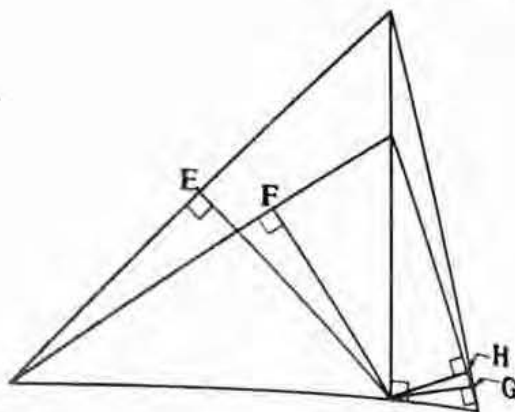
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

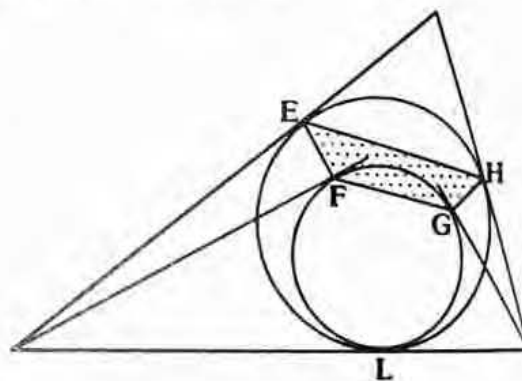
PROBLEMA N° 183

En el gráfico, demostrar que el cuadrilátero EFHG inscriptible.



PROBLEMA N° 184

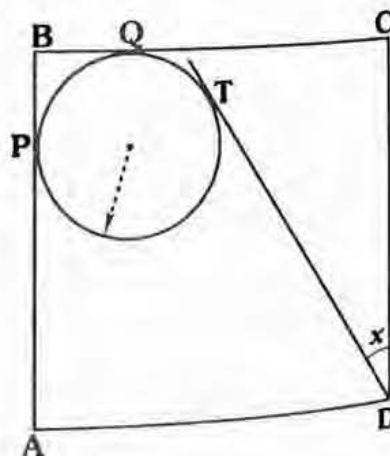
En el gráfico, L, E, F, G y H son puntos de tangencia, demostrar que el cuadrilátero EFGH es inscriptible.



PROBLEMA N° 185

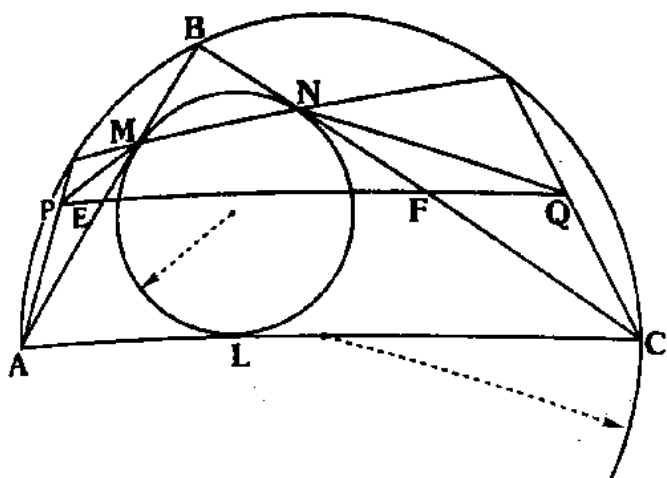
Si ABCD es un cuadrado; P, Q y T son puntos de tangencia y $TD = AB$.

Calcule "x".



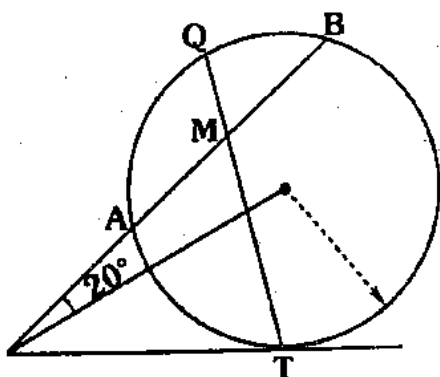
PROBLEMA N° 186

En el gráfico, $BE = EA$ y $BF = FC$, tangencia, demostrar que el cuadrilátero es inscriptible.



PROBLEMA N° 187

Si T es punto de tangencia y $AM = MB$. Calcule $m\widehat{TAQ}$.



- A) 140° B) 120° C) 100°
D) 90° E) 70°

PROBLEMA N° 188

En un triángulo ABC ($m\angle ABC > 90^\circ$) se traza la ceviana interior $\overline{BN}$, tal que $AN = 3(NC)$ además $m\angle BAC = 37^\circ$ y $m\angle NBC = 37^\circ/2$.

Calcule $m\angle ANB$.

- A) 37° B) 60° C) 143°
D) 53° E) 127°

PROBLEMA N° 189

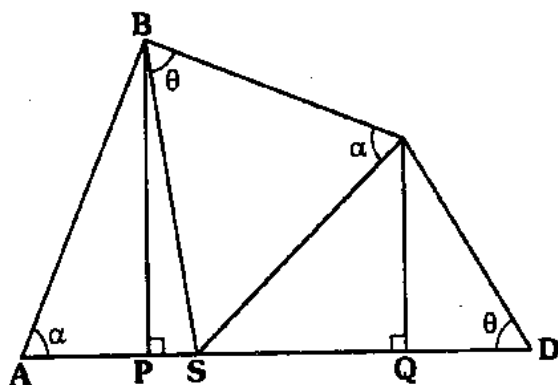
En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$); además P y Q son puntos medios de $\overline{HC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Calcule $m\angle BPQ$.

- A) 60° B) 120°
C) 135° D) 90°
E) 150°

PROBLEMA N° 190

En el gráfico, demostrar que:

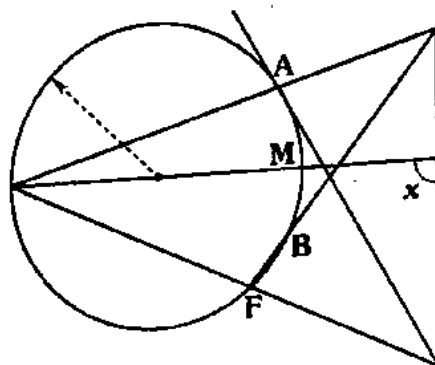
$$AD = 2(PQ)$$



PROBLEMA N° 191

Si A es punto de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$. Calcule α .

- A) 60°
B) 90°
C) 120°
D) 75°
E) 135°



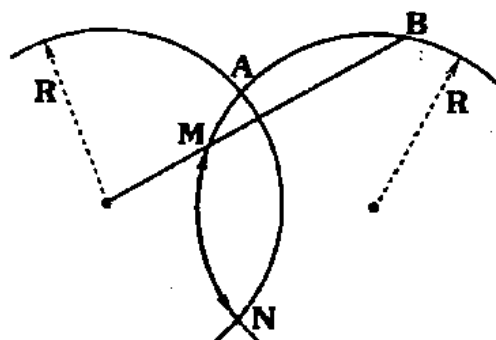
PROBLEMA N° 192

Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia en el arco BC se ubica el punto P y se trazan las perpendiculares PQ y PL a BC y AC respectivamente (Q en BC y L en AC); además A, Q y P son colineales, LQ interseca a AB en S, si la $m\angle BSL = \theta$. Calcule $m\widehat{AB}$.

- A) θ B) 2θ C) $90 - \theta^\circ$
D) $\frac{\theta}{2}$ E) $180^\circ - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA N° 193

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 60^\circ$. Calcule $m\widehat{MN}$



- A) 45° B) 53° C) 60°
D) 30° E) 90°

PROBLEMA N° 194

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, talque: $m\angle ACD = x$; $m\angle DAC = 4x$; $m\angle ABD = 2x$, $m\angle DBC = 9x$ y $m\angle ACB = 5x$. Calcule "x".

- A) 12° B) 9° C) 10°
D) 15° E) 18°

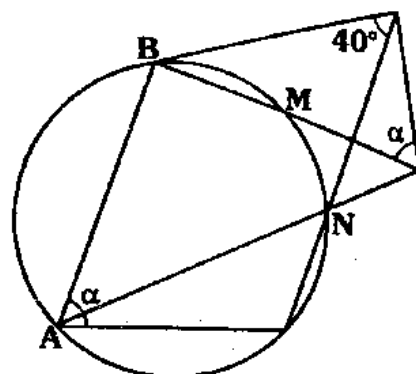
PROBLEMA N° 195

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$), una circunferencia es tan-

gente a AB y BC en P y Q respectivamente. Desde A se traza AL tangente a la circunferencia en L. La prolongación de QL corta a AC en S. Demostrar que $AS = SC$.

PROBLEMA N° 196

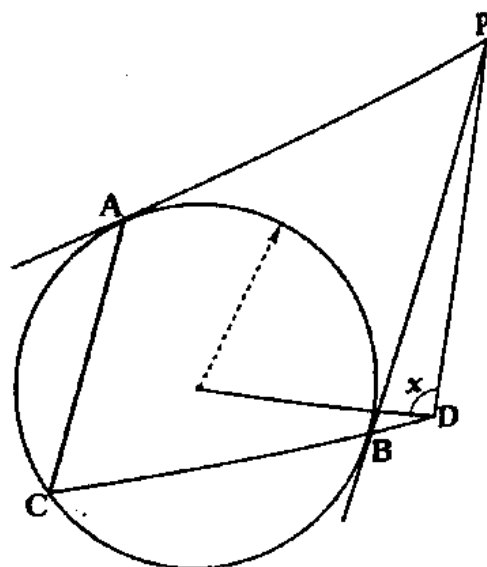
Si $m\widehat{AB} = 100^\circ$. Calcule $m\widehat{MN}$.



- A) 25° B) 10° C) 20°
D) 35° E) 15°

PROBLEMA N° 197

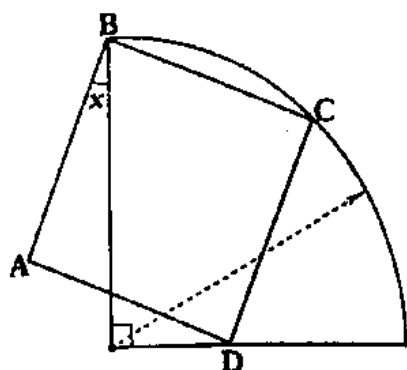
Si A y B son puntos de tangencia y $AC \parallel PD$. Calcule "x".



- A) 60° B) 45° C) 90°
D) 75° E) 36°

PROBLEMA N° 198

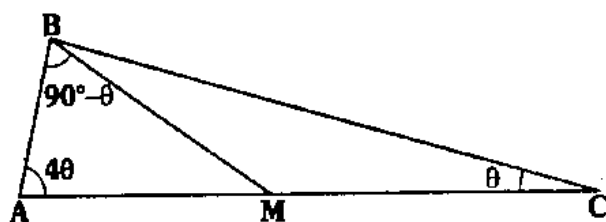
Si ABCD es un cuadrado. Calcule "x".



- A) 15° B) $37^\circ/2$ C) $53^\circ/2$
D) $45^\circ/2$ E) 14°

PROBLEMA N° 199

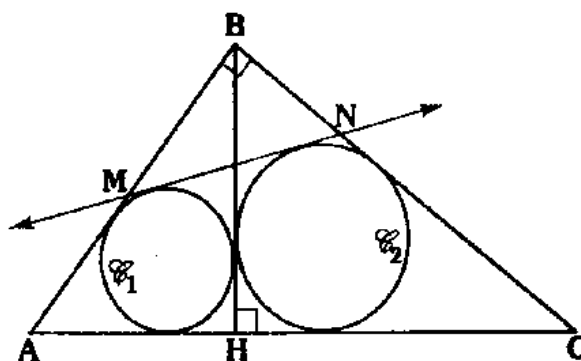
Si $AB=MC$. Calcule θ



- A) 12° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 200

- En el gráfico, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC.
Si $\overline{MN}$ es tangente a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Demuestre que el cuadrilátero AMNC es inscriptible.





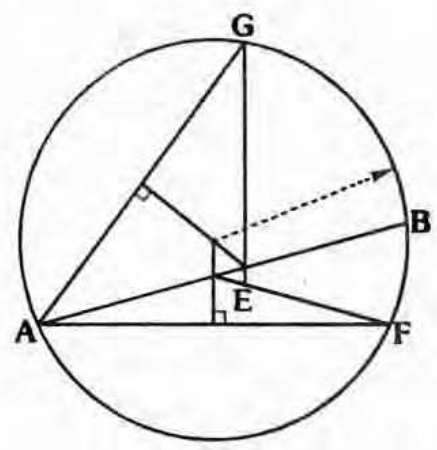
Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA N° 201

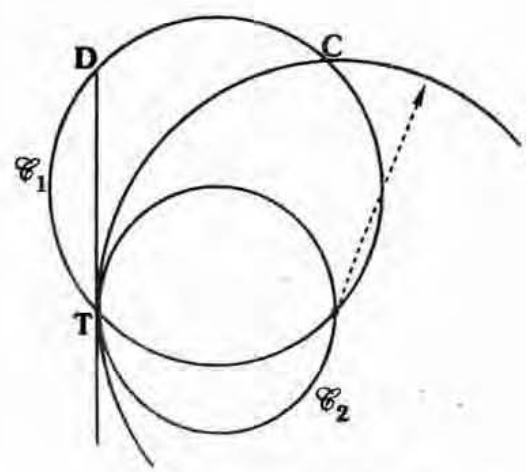
En el gráfico, $EF=5$ y $EG=12$. Calcule AB .

- A) 13
- B) 17
- C) $2\sqrt{15}$
- D) 18
- E) 8,5



PROBLEMA N° 202

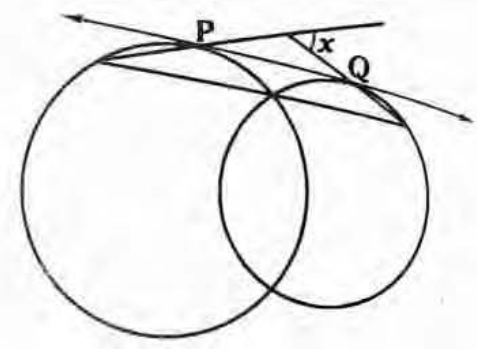
En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\widehat{CD} = \theta$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.



- A) θ
- B) $90^\circ - \theta$
- C) 2θ
- D) $\frac{\theta}{2}$
- E) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA N° 203

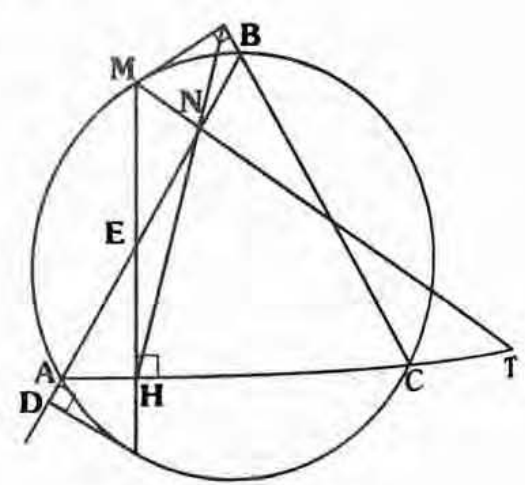
En el gráfico, las circunferencias son ortogonales. P y Q son puntos de tangencia, calcule "x".



- A) 30°
- B) 60°
- C) 15°
- D) 45°
- E) $\frac{45^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 204

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Si $AE=b$ y $AD=a$. Calcule CT.



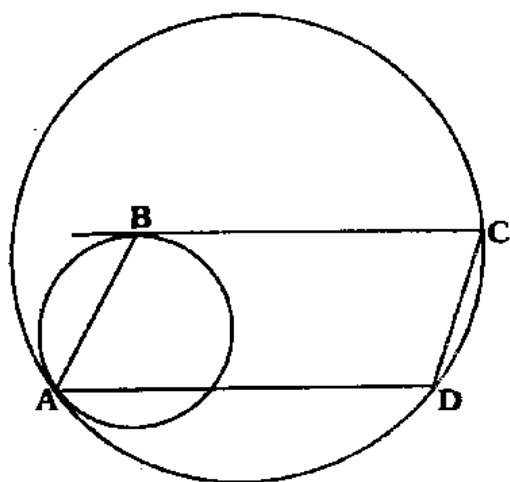
- A) $(a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B) $\frac{a+b}{2}$

C) $2b+a$ D) $2a+b$

E) $(a+2b)\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N° 205

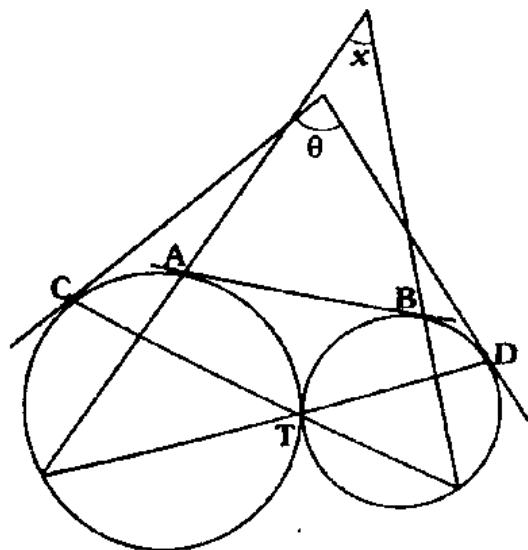
Si A y B son puntos de tangencia ABCD es un paralelogramo y $m\widehat{AD} = 100^\circ$.
Calcule $m\widehat{CD}$.



- A) 50° B) 40° C) 30°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA N° 206

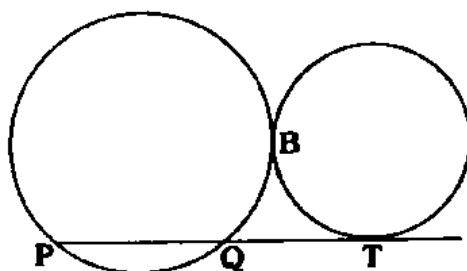
Si A, B, C, D y T son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) $\frac{\theta}{2}$ B) $180^\circ - \theta$ C) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$
D) $\frac{3\theta}{2}$ E) $49^\circ + \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA N° 207

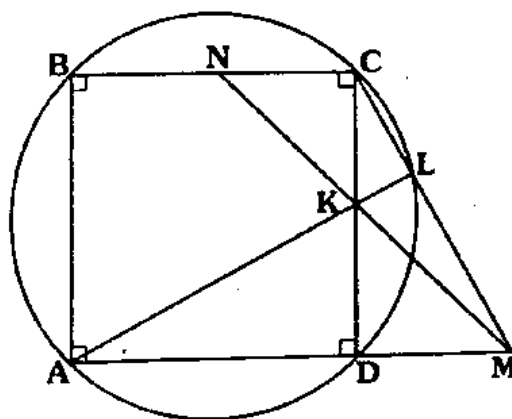
Si B y T son puntos de tangencia y $QT = 3(PQ)$; $m\widehat{BT} = 90^\circ$. Calcule $m\widehat{PQ}$.



- A) 16° B) 37° C) 53°
D) 32° E) 45°

PROBLEMA N° 208

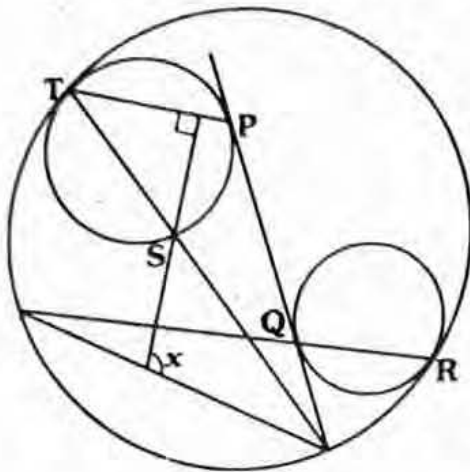
Si ABCD es un cuadrado probar que B, N, L y M están en una misma circunferencia.



PROBLEMA N° 209

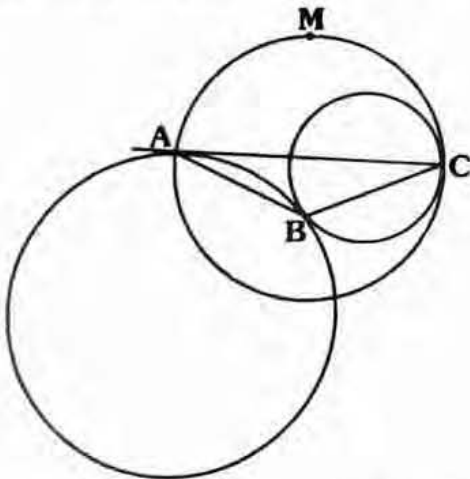
Si P, T, Q y R son puntos de tangencia; $m\widehat{TS} = 150^\circ$. Calcule "x".

- A) 105°
- B) 115°
- C) 120°
- D) 95°
- E) 110°



PROBLEMA N° 210

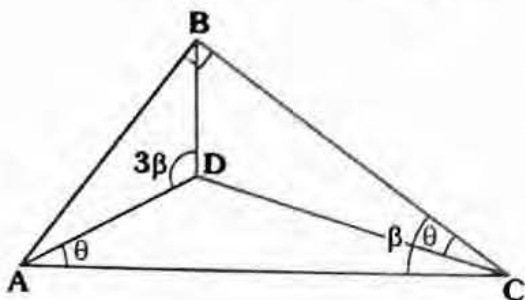
Si A, B y C son puntos de tangencia; $m\widehat{AMC} = 100^\circ$. Calcule $m\angle ABC$.



- A) 115°
- B) 105°
- C) 125°
- D) 130°
- E) 140°

PROBLEMA N° 211

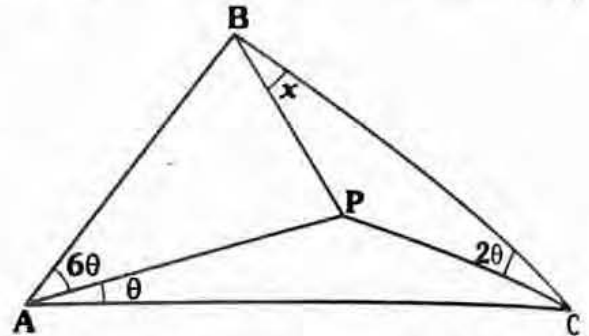
De acuerdo al gráfico, calcule $\frac{CD}{BD}$



- A) 1
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 2
- D) $2\sqrt{2}$
- E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 212

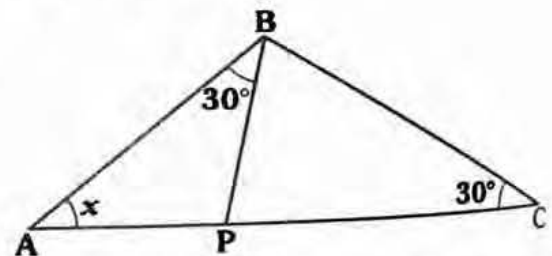
En el gráfico, $AB = AP = PC$. Calcule " x ".



- A) 30°
- B) 36°
- C) 20°
- D) 18°
- E) 30°

PROBLEMA N° 213

Si $AB = PC$, calcule " x ".

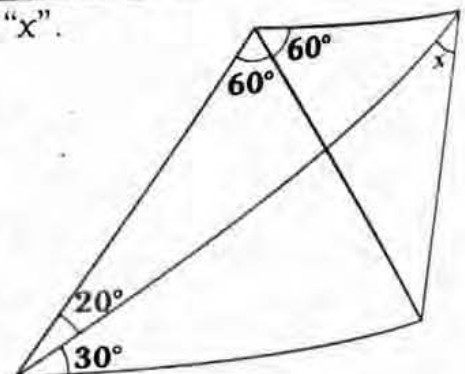


- A) 12°
- B) 24°
- C) 30°
- D) 18°
- E) 36°

PROBLEMA N° 214

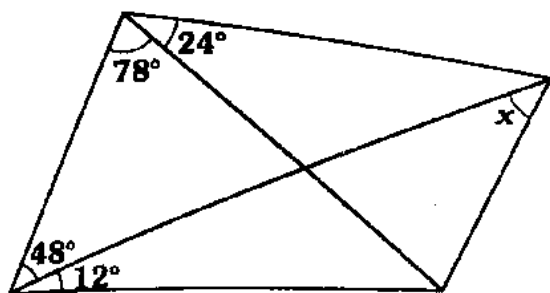
Calcule " x ".

- A) 20°
- B) 40°
- C) 50°
- D) 30°
- E) 25°



PROBLEMA N° 215

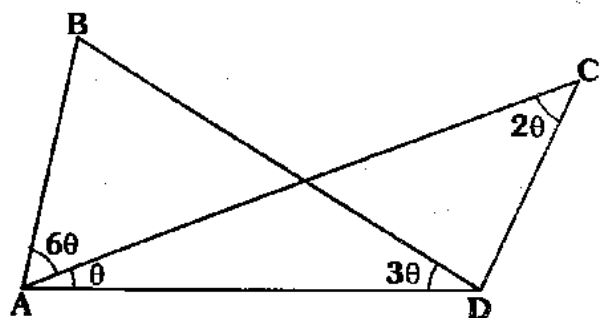
Calcule "x".



- A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 24°

PROBLEMA N° 216

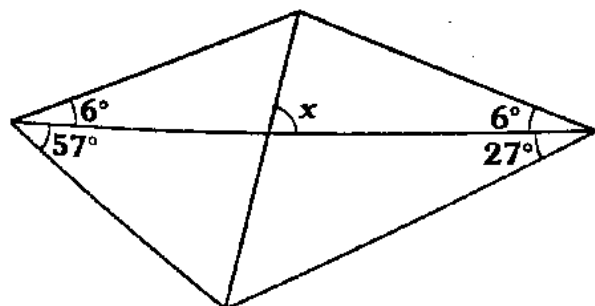
Si $AB=CD$, calcule " θ ".



- A) 12° B) 15° C) 10°
D) 9° E) 14°

PROBLEMA N° 217

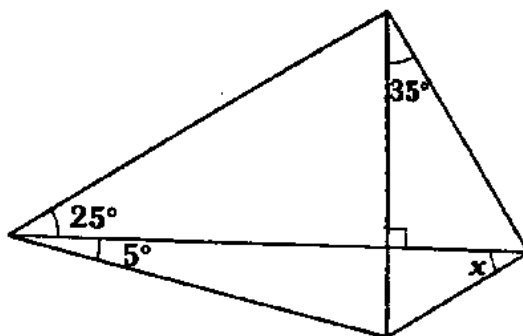
Calcule "x".



- A) 90° B) 80° C) 60°
D) 57° E) 63°

PROBLEMA N° 218

Calcule "x".



- A) 12° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 219

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en A), P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, si $AC = 2(PQ) = 6$ y el cuadrilátero APQC es circunscriptible. Calcule el inradio del triángulo BPQ.

- A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 1
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA N° 220

En la región interior a un triángulo equilátero ABC, se ubica el punto P y en $\overline{AP}$, su punto medio Q; si $m\angle PAC = 30^\circ$ y $m\angle PCB = m\angle QBA$.

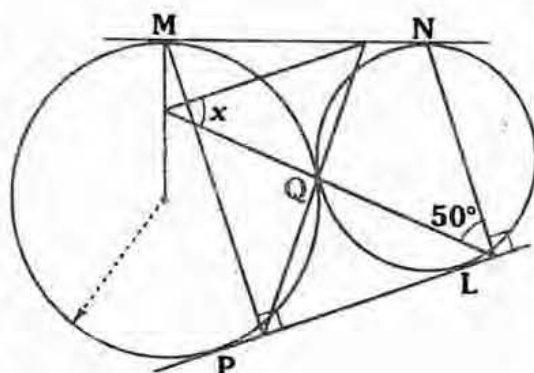
Calcule $m\angle QBA$.

- A) 10° B) 12°
C) 15° D) 16°
E) 20°

PROBLEMA N° 221

Si L, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".

- A) 50°
- B) 25°
- C) 40°
- D) 20°
- E) 30°



PROBLEMA N° 222

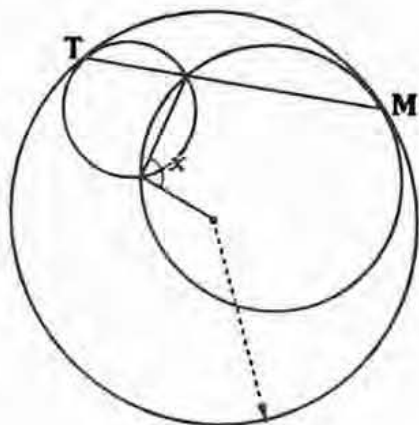
En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubica el punto P, se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$, en $\widehat{PB}$ se ubican los puntos M y N ($N \in \widehat{MB}$); $\overline{AM} \cap \overline{PH} = \{Q\}$, $\overline{AN} \cap \overline{QH} = \{T\}$, la prolongación de $\overline{NQ}$ interseca a $\overline{AP}$ en C; si $m\widehat{CPM} = 50^\circ$. Calcule $m\angle QTM$.

- A) 40° B) 25° C) 20°
- D) 75° E) 35°

PROBLEMA N° 223

Si T y M son puntos de tangencia. Calcule "x".

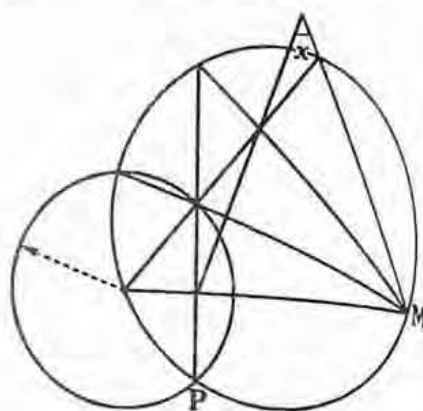
- A) 60°
- B) 120°
- C) 90°
- D) 135°
- E) 106°



PROBLEMA N° 224

Si $m\widehat{PM} = 100^\circ$. Calcule "x".

- A) 50°
- B) 40°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 45°



PROBLEMA N° 225

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en cuya prolongación se ubica P, luego se traza la secante PQS. T es punto en la región interior del cuadrilátero ASQB, tal que los cuadriláteros ASTO y OTQB son inscriptibles, donde $AO = OB$. Demostrar que $m\angle OTP = 90^\circ$.

PROBLEMA N° 226

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y se traza el rombo APQH de centro O, tal que P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$. Calcule $m\angle BOC$.

- A) 60° B) 120° C) 135°
- D) 90° E) 108°

PROBLEMA N° 227

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica Q en $\overline{AB}$, R en $\overline{BC}$ y P en $\overline{AC}$ tal que PQBR es un cuadrado. H es la proyección de Q sobre $\overline{AC}$.

Sea $\overline{AR} \cap \overline{QP} = \{S\}$. Calcule $m\angle SHP$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
- D) 37° E) 53°

PROBLEMA N° 228

Se tiene el triángulo ABC , D es un punto exterior relativo a $\overline{BC}$.

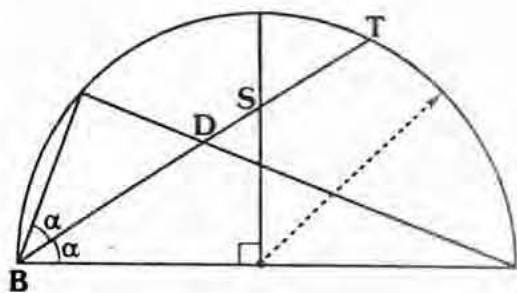
Si $AB=CD$, $m\angle ACB = x$, $m\angle BCD = 2x$, $m\angle ADC = 5x$ y $m\angle ABC = 4x$.

Calcule " x ".

- A) 5° B) 8° C) 10°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA N° 229

En el gráfico, calcule $\frac{BD}{ST}$

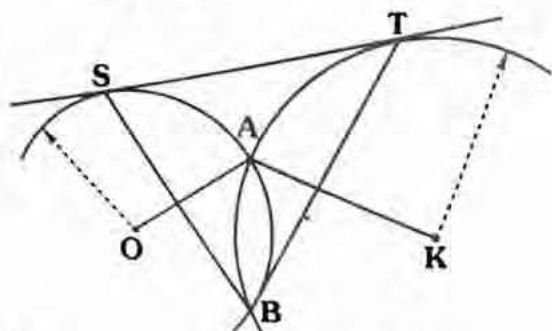


- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 2

PROBLEMA N° 230

S y T son puntos de tangencia.

Calcule $\frac{m\angle SBT}{m\angle OAK}$

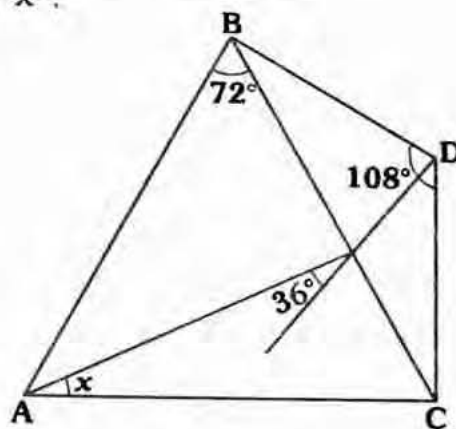


- A) 1 B) 2 C) $2/3$
D) $1/2$ E) $3/2$

PROBLEMA N° 231

En el gráfico, $AB=BC$ y $BD=DC$. Calcule " x ".

- A) 12°
B) 18°
C) 24°
D) 36°
E) 27°



PROBLEMA N° 232

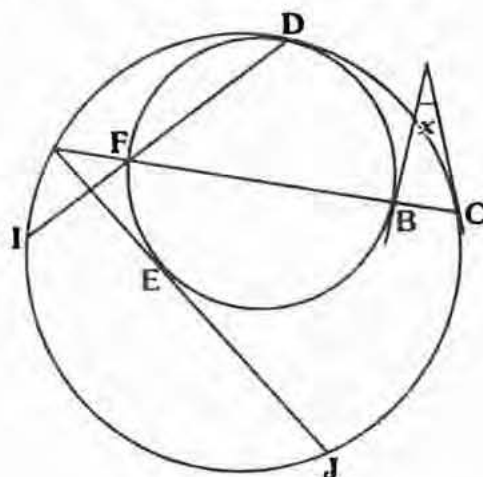
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica R en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AC}$ tal que $\overline{RQ} \perp \overline{AC}$. Si $m\angle RAC = 45^\circ$ y BR es igual al inradio del triángulo RQC . Calcule $m\angle BAR$.

- A) 15° B) 14° C) $\frac{37^\circ}{2}$
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) $\frac{45^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 233

Si B , C , D y E son puntos de tangencia $m\angle IJ = 80^\circ$ y $m\angle EF = 30^\circ$. Calcule " x ".

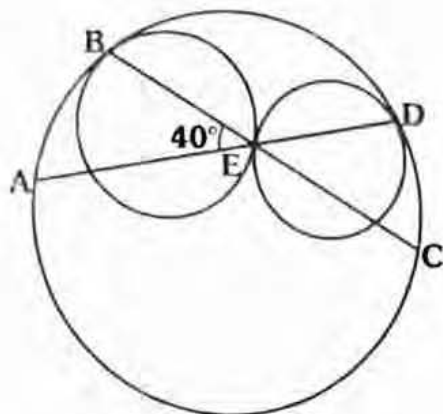
- A) 25°
B) 20°
C) 15°
D) 24°
E) 30°



PROBLEMA N° 234

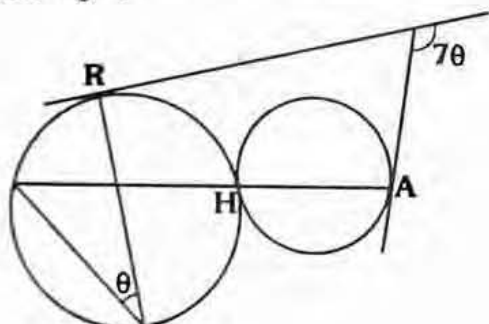
Si B, D y E son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- A) 50°
- B) 80°
- C) 20°
- D) 40°
- E) 25°



PROBLEMA N° 235

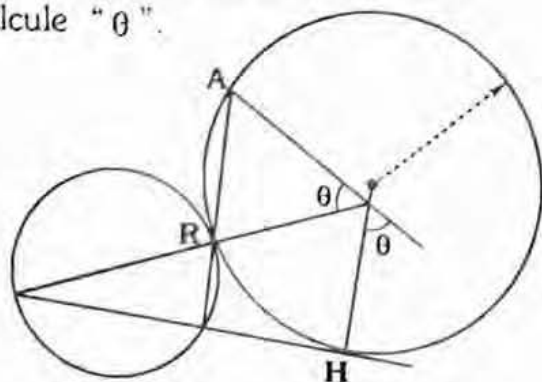
Si R, H y A son puntos de tangencia. Calcule " θ ".



- A) $22^\circ 30'$
- B) 20°
- C) 15°
- D) 18°
- E) 10°

PROBLEMA N° 236

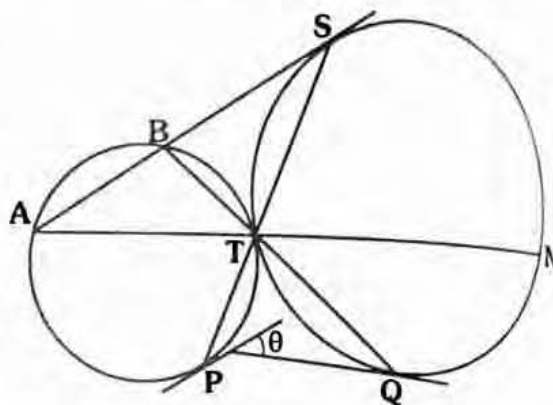
Si R y H son puntos de tangencia. Calcule " θ ".



- ❖ A) 45°
- ❖ B) 75°
- ❖ C) 60°
- ❖ D) 36°
- ❖ E) 80°

PROBLEMA N° 237

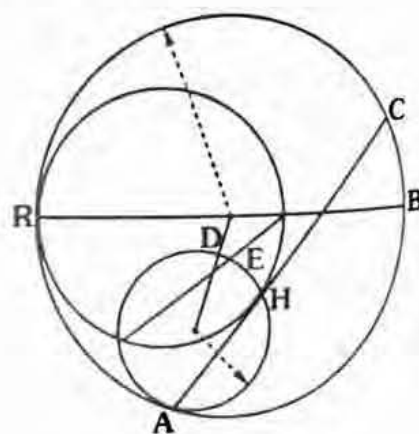
Si P, Q, T y S son puntos de tangencia, $m\angle STN = m\widehat{AB}$. Calcule " θ ".



- ❖ A) 30°
- ❖ B) 40°
- ❖ C) 36°
- ❖ D) 38°
- ❖ E) 60°

PROBLEMA N° 238

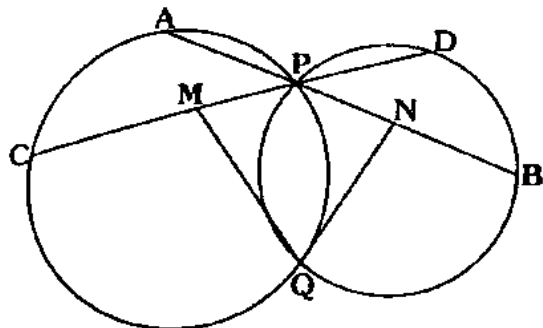
Si R, H y A son puntos de tangencia, $m\widehat{AB} = 100^\circ$ y $m\widehat{BC} = 30^\circ$. Calcule $m\widehat{DE}$.



- ❖ A) 10°
- ❖ B) 15°
- ❖ C) 20°
- ❖ D) $10,5^\circ$
- ❖ E) 25°

PROBLEMA N° 239

En el gráfico, $AN=NB$ y $CM=MD$. Demuestre que el cuadrilátero QNPM es inscriptible.



PROBLEMA N° 240

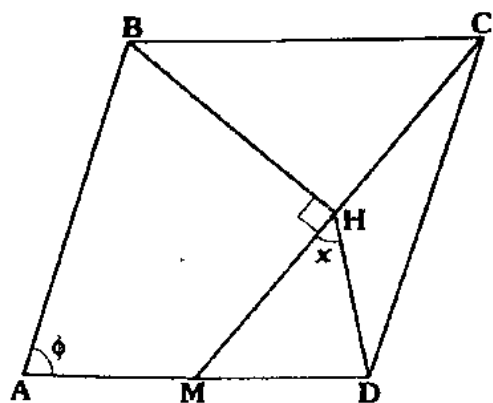
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BL}$ secantes en Q y la mediana $\overline{BM}$ que corta a $\overline{AD}$ en P. Si $m\angle BAD = 10^\circ$, $m\angle DAC = 30^\circ$, $m\angle CBL = 20^\circ$, $MP=a$, $LQ=b$ y $CD=c$. Halle la relación entre a, b y c.

- A) $2b = a + c$ B) $b^2 = a^2 + c^2$
C) $c^2 = a^2 + b^2$ D) $2c = a + b$
E) $2a = b + c$

PROBLEMA N° 241

En el gráfico, ABCD es un rombo y $AM=MD$. Calcule "x".

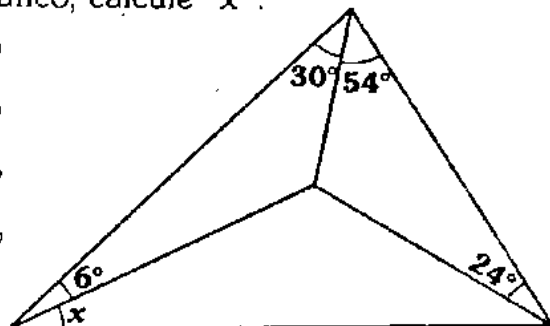
- A) ϕ
B) 2ϕ
C) $\frac{3}{2}\phi$
D) $90^\circ - \phi$
E) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$



PROBLEMA N° 242

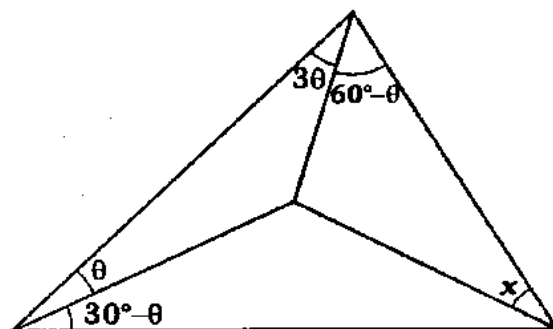
Del gráfico, calcule "x".

- A) 12°
B) 15°
C) 16°
D) 24°
E) 18°



PROBLEMA N° 243

Calcule "x" en:



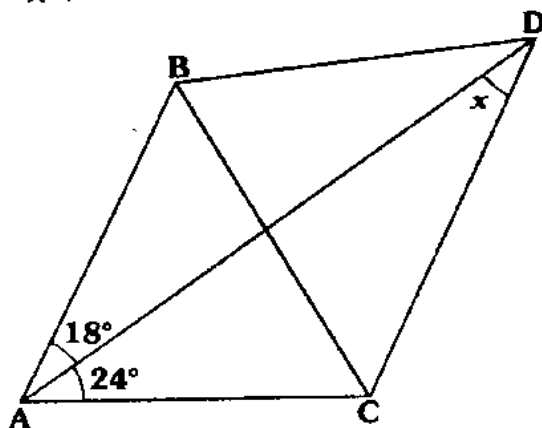
- A) $22,5^\circ$ B) $26,5^\circ$ C) 30°
D) $37,5^\circ$ E) 36°

PROBLEMA N° 244

En el gráfico, $AB=BC$ y $AC=BD$.

Calcule "x".

- A) 30°
B) 45°
C) 55°
D) 60°
E) 75°

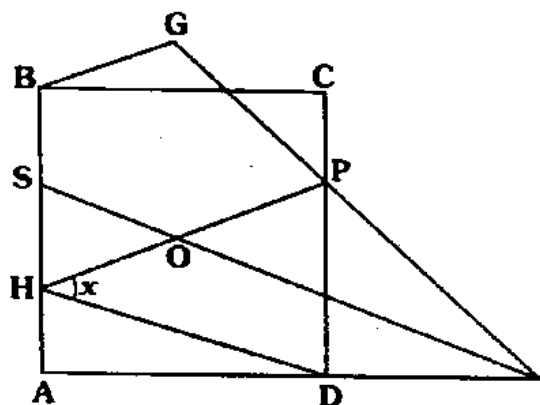


PROBLEMA N° 245

Se tiene el rectángulo ABCD, P es un punto coplanar a dicho rectángulo, desde C y B se trazan las perpendiculares a $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ respectivamente, las cuales se cortan en L. Demostrar que $\overline{LP} \perp \overline{BC}$.

PROBLEMA N° 246

ABCD es un cuadrado de centro O, HBGP es un trapecio isósceles y $3(BS) = 4(AH)$. Calcule "x".

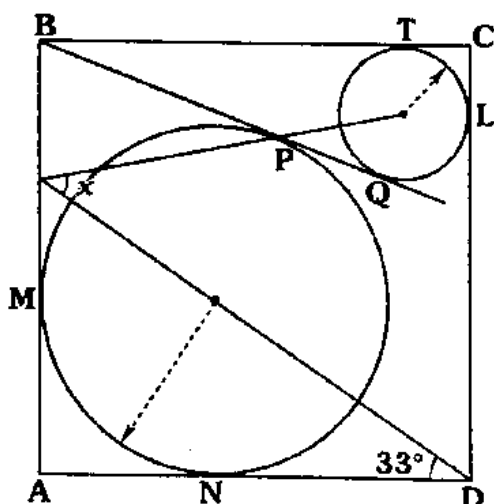


- A) 45° B) 37° C) $81^\circ/2$
D) 53° E) 74°

PROBLEMA N° 247

ABCD es un cuadrado, N, M, P, Q, T y L son puntos de tangencia. Calcule "x".

- A) 53°
B) 63°
C) 37°
D) 45°
E) 23°



PROBLEMA N° 248

Se tiene el triángulo ABC ($AB=BC$), se traza la circunferencia inscrita $\odot$ la cual es tangente a $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en T, E y D respectivamente. Se ubica L en la prolongación de $\overline{AB}$, la prolongación de $\overline{LE}$ corta a $\odot$ en G, $\overline{GA}$ corta a $\odot$ en F y $\overline{EF} \cap \overline{AB} = \{k\}$. Calcule $\frac{Ak}{BL}$.

- A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA N° 249

Se tiene el triángulo ABC, con $BC=2(AB)$, P es un punto interior talque:
 $m\angle BPC=90^\circ$, $m\angle PCB=\theta$, $m\angle PAC=2\theta$ y $m\angle BAP=20^\circ+\theta$.

Calcule $m\angle PCA$

- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 250

Se tiene la circunferencia de radio R circunscrita al triángulo ABC. P es un punto coplanar a dicho triángulo, A' es la proyección de P sobre la altura trazada desde A en el triángulo ABC, análogamente se ubica B' y C'. Si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, calcule la distancia de P al ortocentro del $\triangle ABC$.

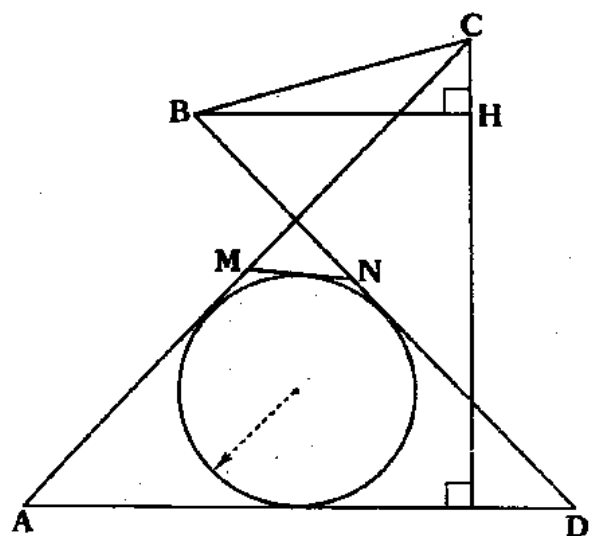
- A) R B) $R\sqrt{2}$
C) $2R$ D) $R\sqrt{3}$
E) $R/2$

PROBLEMA N° 251

En el triángulo ABC ($AB=BC$) M es punto medio de AC y P es un punto interior del triángulo ABC tal que $m\angle BAP = m\angle PCA$. Demuestre que $m\angle APM + m\angle PBC = 180^\circ$.

PROBLEMA N° 252

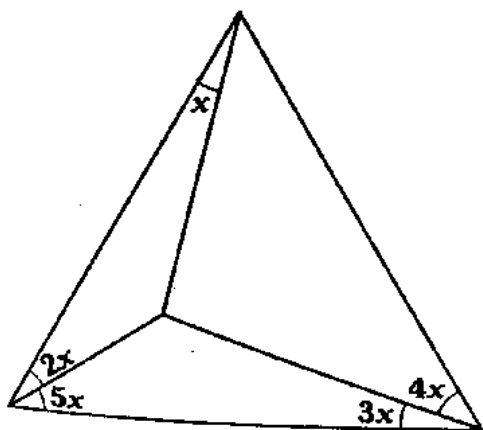
En el gráfico, $BC=6$, $BH=5$, $AD=10$, $AM=MC$ y $BN=ND$. Calcule $AC+BD$.



- A) 20 B) 25 C) 21
D) 26 E) 15

PROBLEMA N° 253

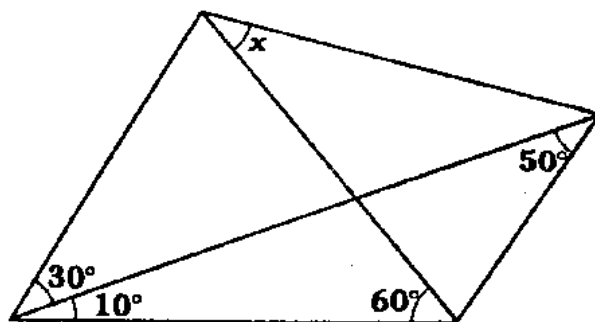
Del gráfico, calcule "x".



- A) 5° B) 10° C) 12°
D) $7,5^\circ$ E) 9°

PROBLEMA N° 254

Calcule "x" en el siguiente gráfico:



- A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 30°

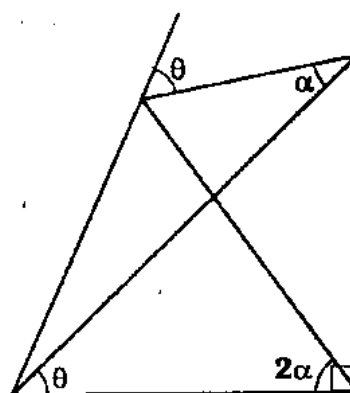
PROBLEMA N° 255

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, si $m\angle BAC = 28^\circ$ y $m\angle BCA = 23^\circ$. Calcule $m\angle ABM$.

- A) 53° B) 60° C) 74°
D) 76° E) $71,5^\circ$

PROBLEMA N° 256

Calcule α , en el gráfico:



- A) 45° B) $45^\circ - \theta$ C) 2θ
D) 3θ E) $90^\circ - \theta$

PROBLEMA N° 257

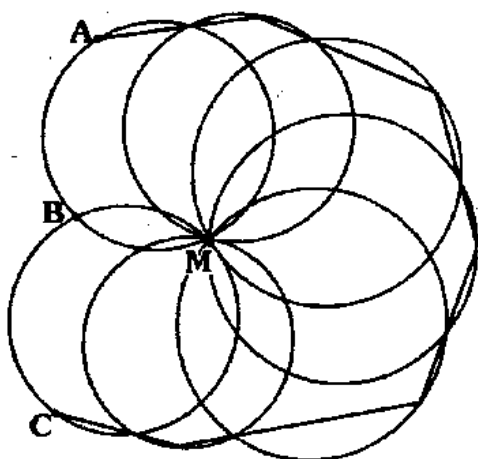
Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{BC}$, R en $\overline{AC}$ y P en la región interior del triángulo ABQ tal que PBQR es un romboide. Si $m\angle ACB = m\angle ABP$, $m\angle APB = 3(m\angle AQB)$.

Calcule $m\angle AQB$.

- A) 30° B) 15° C) 45°
D) 37° E) 53°

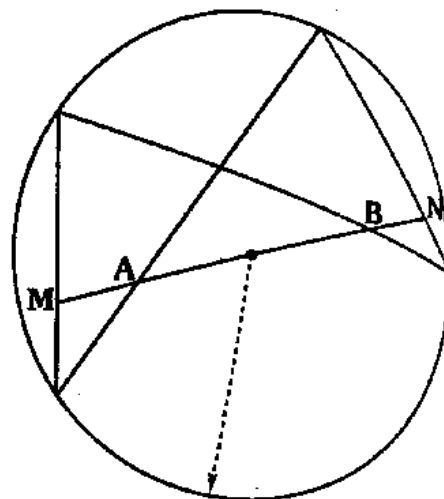
PROBLEMA N° 258

En el gráfico, demostrar que A, B y C son colineales.



PROBLEMA N° 259

En el gráfico, $OA = OB$. Demostrar que $AM = BN$.



PROBLEMA N° 260

- ❖ Sea el triángulo ABC, ($AB = BC$) con $m\angle ABC = 2\phi$, M es punto medio de BC.
- ❖ Se ubica X en el menor arco MA de la circunferencia circunscrita del triángulo ABM
- ❖ y T es un punto interior del $\angle BMA$ talque $m\angle TMX = 90^\circ$ y $AX = XT$.
- ❖ Calcule $m\angle MTA - m\angle CTM$.

- A) ϕ B) 2ϕ C) $90^\circ - \phi$
D) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$ E) $90^\circ - \frac{\phi}{4}$



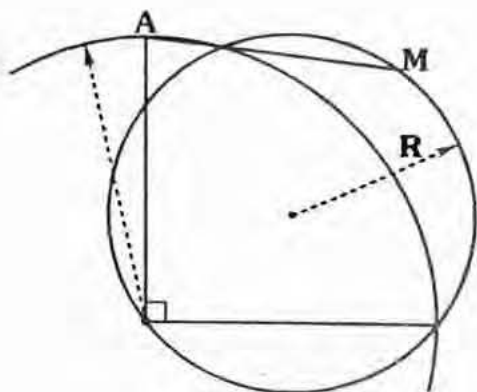


Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

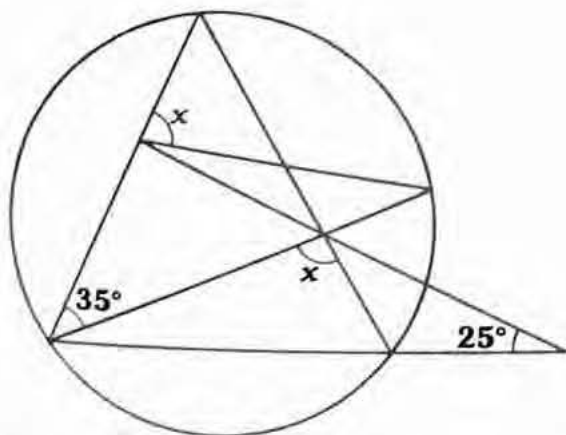
Si $R=5$, calcule AM .



- A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$
D) 10 E) 7,5

PROBLEMA N° 262

En el gráfico, calcule " x ".



- A) 60° B) 90° C) 80°
D) 70° E) 50°

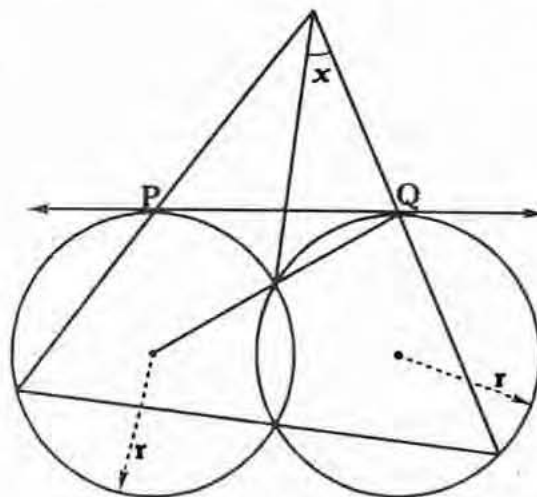
PROBLEMA N° 263

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$. Si $m\angle BQP = 50^\circ$ y $m\angle ACQ = 40^\circ$. Calcule $m\angle PAB$.

- A) 40° B) 50°
C) 60° D) 30°
E) 20°

PROBLEMA N° 264

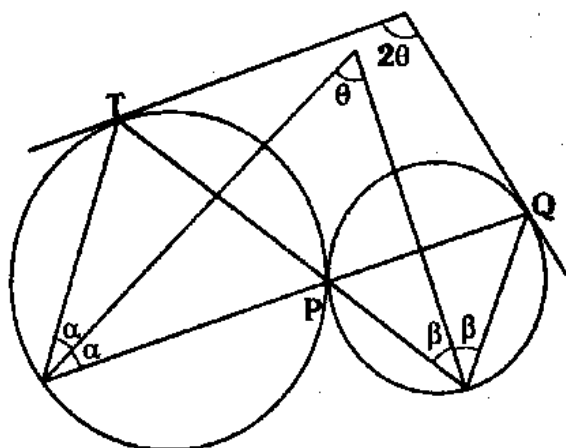
P y Q son puntos de tangencia. Calcule " x ".



- A) 37° B) 36°
C) 45° D) 15°
E) 30°

PROBLEMA N° 265

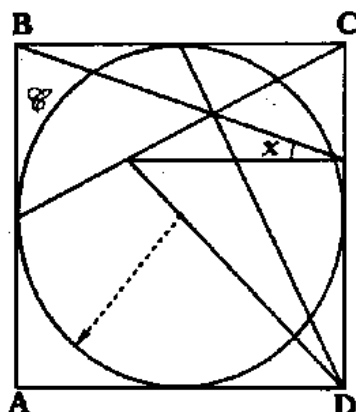
En el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia. Calcule " θ ".



- A) 60° B) 45° C) $\frac{135^\circ}{2}$
D) 40° E) 80°

PROBLEMA N° 266

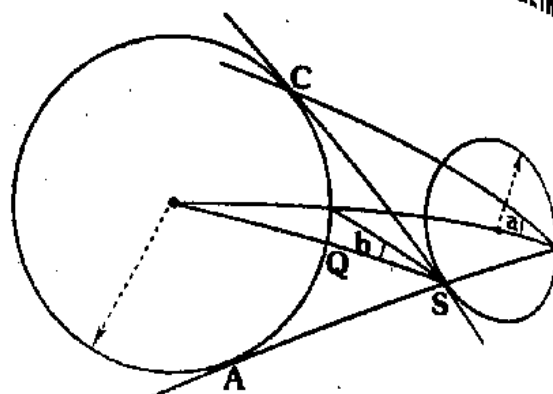
En el gráfico, la circunferencia $\odot$ está inscrita en el cuadrado ABCD. Calcule "x".



- A) 15° B) $18^\circ 30'$
C) $22^\circ 30'$ D) $26^\circ 30'$
E) 30°

PROBLEMA N° 267

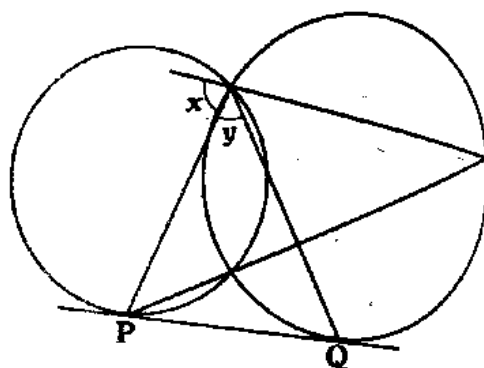
En el gráfico, A, C y S son puntos de tangencia. Si $a+b=32^\circ$, calcule $m\widehat{AQ}$.



- A) 76° B) 64° C) 58°
D) 74° E) 32°

PROBLEMA N° 268

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Indique la relación entre "x" e "y".

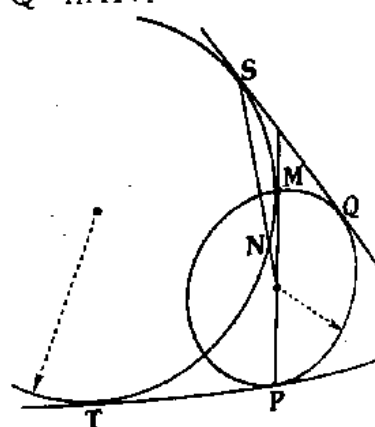


- A) $x=y$ B) $x+y=120^\circ$
C) $x=2y$ D) $x=180^\circ-2y$
E) $x+3y=180^\circ$

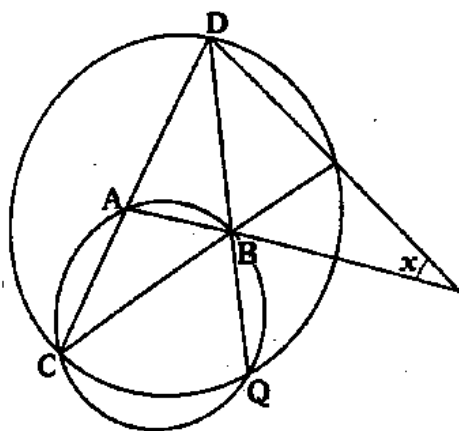
PROBLEMA N° 269

T, P, Q, S y M son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PQ} - m\widehat{TN}$.

- A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

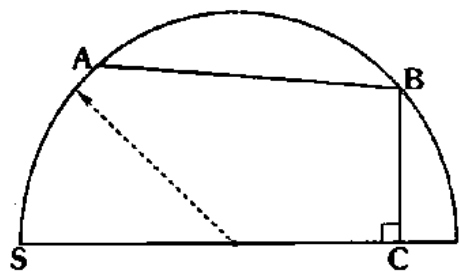


PROBLEMA 12
En el gráfico, $m\widehat{AB} = 40^\circ$. Calcule x .



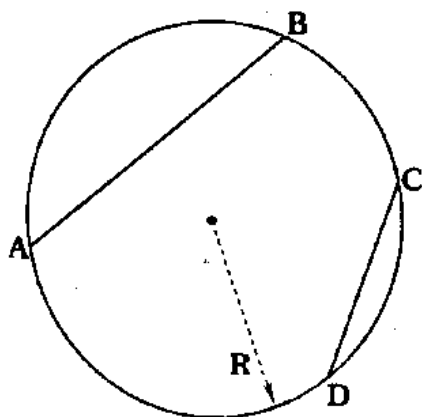
- A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

Si $m\widehat{AB} = 80^\circ$ y $AB = 2(BC)$. Calcule $m\widehat{AS}$.



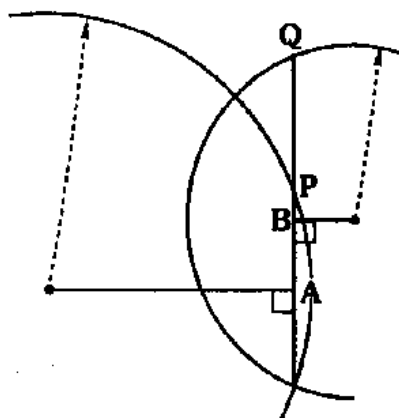
- A) 60° B) 40° C) 50°
D) 20° E) 75°

Si $m\widehat{BC} + m\widehat{AD} = 180^\circ$; $AB = 15$ y $CD = 8$.
Calcule R.



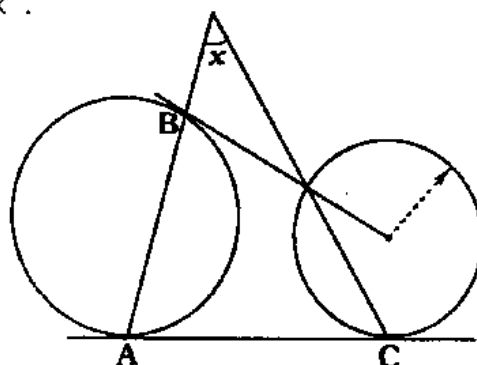
- A) 7,5
B) 8,5
C) 7
D) 9
E) 9,5

Si $AB=3$. Calcule PQ.



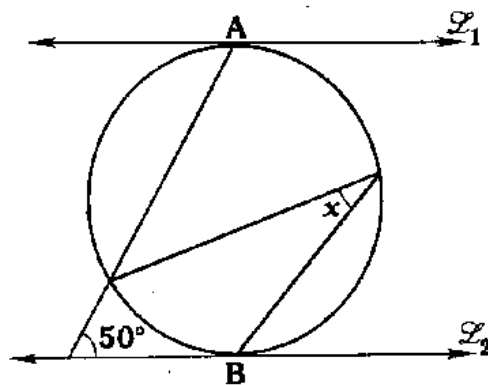
- A) 6 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2,5

Si A, B y C son puntos de tangencia.
Calcule "x".



- A) 30°
B) 45°
C) 36°
D) 75°
E) 60°

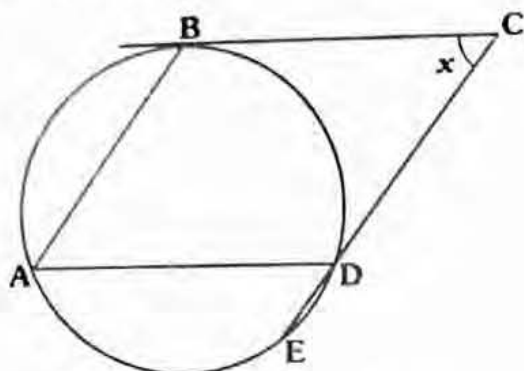
Si $\overrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overrightarrow{\mathcal{L}_2}$; A y B son puntos de tangencia.
Calcule " x ".



- A) 25°
B) 40°
C) 80°
D) 35°
E) 50°

PROBLEMA N° 276

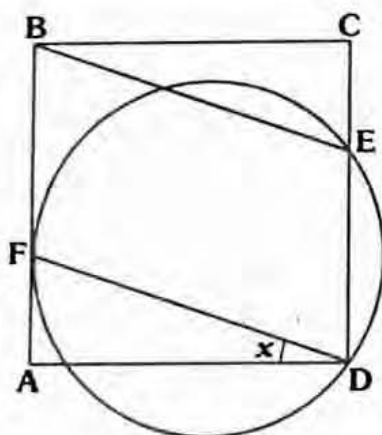
Si ABCD es un paralelogramo. B es punto de tangencia y $m\widehat{DE} = 30^\circ$. Calcule "x".



- A) 60° B) 55° C) 50°
D) 75° E) 70°

PROBLEMA N° 277

Si ABCD es un cuadrado y FBED es un romboide; F es punto de tangencia. Calcule "x".

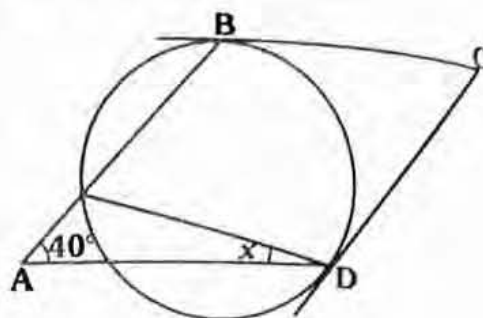


- A) 15° B) 29°
C) $37^\circ/2$ D) $53^\circ/2$
E) 30°

PROBLEMA N° 278

Si B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo.

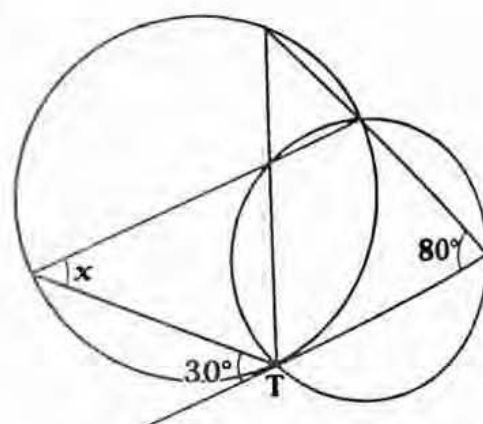
❖ Calcule "x".



- A) 70° B) 35° C) 30°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA N° 279

❖ En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule "x".



- A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

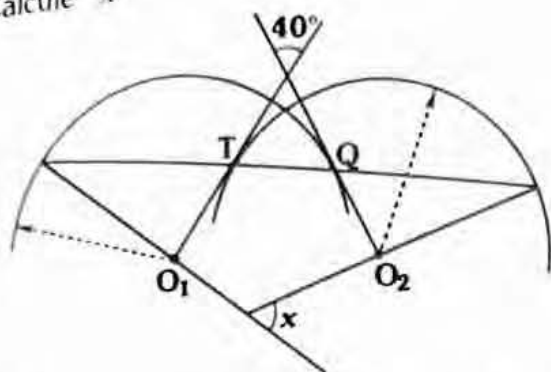
PROBLEMA N° 280

❖ En el cuadrado ABCD, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Se traza $\overline{PH} \perp \overline{AQ}$ (H en $\overline{AQ}$) tal que $BH=7$, $HQ=3$ y $m\angle ABH = m\angle HPC$. Calcule PH.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 281

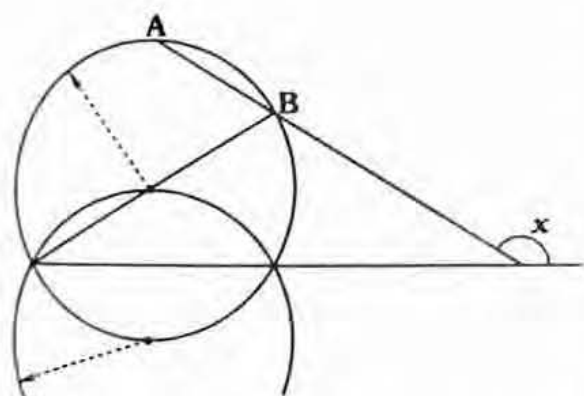
T y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x"



- A) 40° B) 50° C) 100°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA N° 282

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 40^\circ$. Calcule "x".



- A) 100° B) 130° C) 140°
D) 110° E) 155°

PROBLEMA N° 283

Se tiene el cuadrado ABCD en el cual se traza internamente la semicircunferencia de diámetro AD, en dicha semicircunferencia se ubica P tal que $PD = 4$ y $AB = 4\sqrt{3}$.

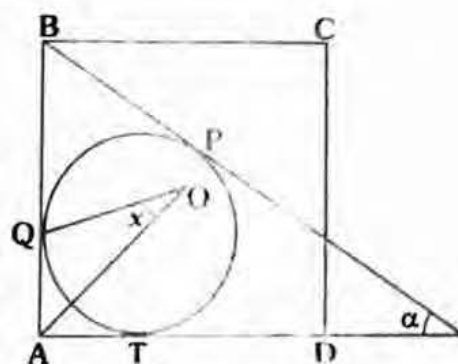
Calcule $m\angle CPD$

- A) 90° B) 100° C) 127°
D) 106° E) $112^\circ 30'$

PROBLEMA N° 284

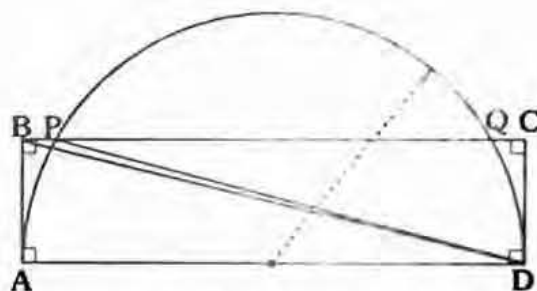
En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, calcule "x", si P, Q y T son punto de tangencia.

- A) α
B) 2α
C) $90^\circ - \alpha$
D) $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$
E) $45^\circ + \alpha$



PROBLEMA N° 285

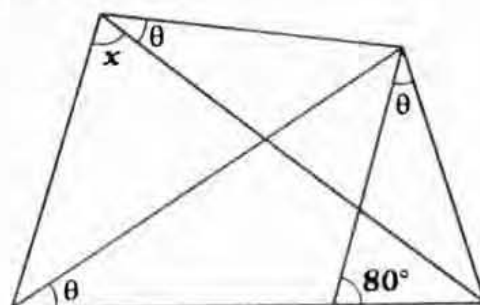
En el gráfico, $m\widehat{PQ} = 120^\circ$. Calcule $m\angle BDP$.



- A) 1° B) 2° C) 5°
D) $7,5^\circ$ E) $3,75^\circ$

PROBLEMA N° 286

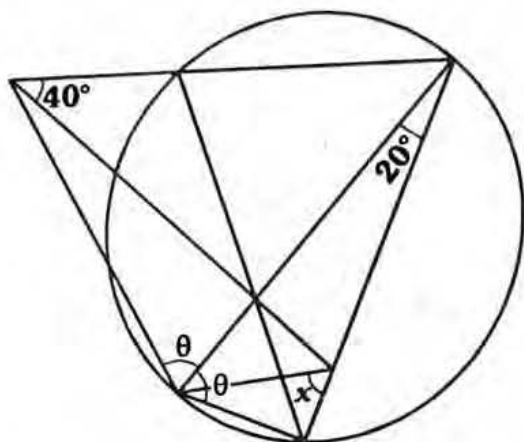
Calcule "x", es:



- A) 70° B) 75° C) 80°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 287

En el gráfico, calcule "x".

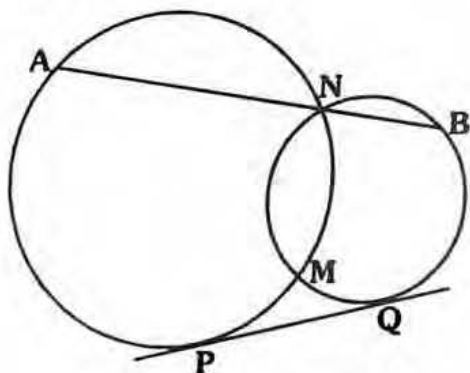


- A) 20° B) 60° C) 30°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA N° 288

En el gráfico, $m\widehat{AN} = 2(m\widehat{PM})$.

Calcule $\frac{PQ}{AB}$.



- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 289

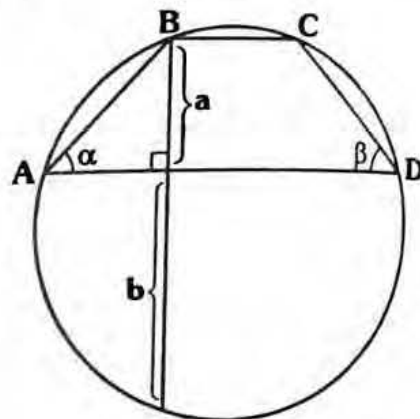
Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) se traza una circunferencia tangente a $\overline{OB}$ en T y al arco AB en P. Si $3(TB) = 2(OT)$.

❖ Calcule $m\angle BAP$.

- ❖ A) 37° B) 53° C) 14°
❖ D) 23° E) 28°

PROBLEMA N° 290

❖ $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces el valor de la longitud del segmento BC es:



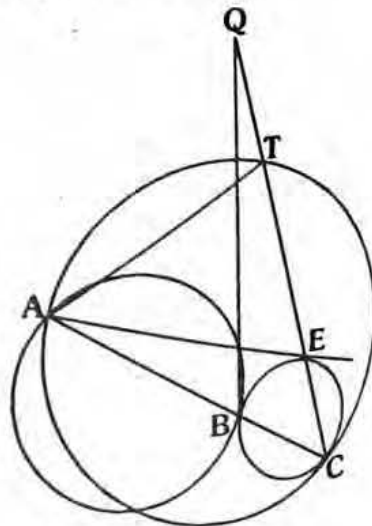
- ❖ A) a B) $\sqrt{b^2 - a^2}$
❖ C) b - a D) $\frac{a+b}{4}$
❖ E) $\frac{b}{3}$

PROBLEMA N° 291

❖ Según la figura, calcule $m\angle TAE = 40^\circ$ y $m\angle EAC = 15^\circ$.

❖ (B, E, C son puntos de tangencia).

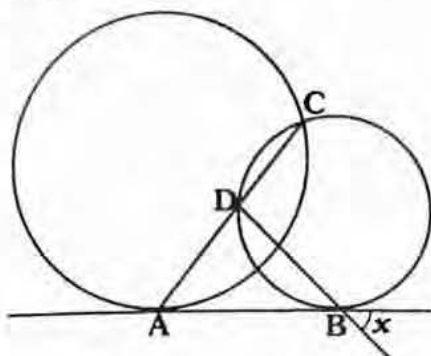
- ❖ A) 40°
❖ B) 20°
❖ C) 15°
❖ D) 30°
❖ E) 60°



PROBLEMA N° 292

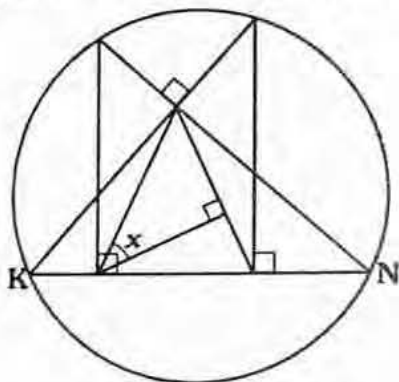
Según la figura las circunferencias son ortogonales A y B son puntos de tangencia. Calcule el valor de "x".

- A) 75°
- B) 60°
- C) 45°
- D) 40°
- E) 30°



PROBLEMA N° 293

En el gráfico, $m\widehat{KN} = \phi$. Calcule "x".

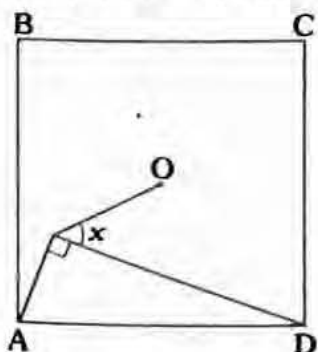


- A) $180^\circ - \phi$
- B) $\phi - 90^\circ$
- C) $\phi - 60^\circ$
- D) $\phi - 75^\circ$
- E) $\phi - 45^\circ$

PROBLEMA N° 294

O es centro del cuadrado ABCD, calcule "x".

- A) 60°
- B) 53°
- C) 45°
- D) 30°
- E) 37°



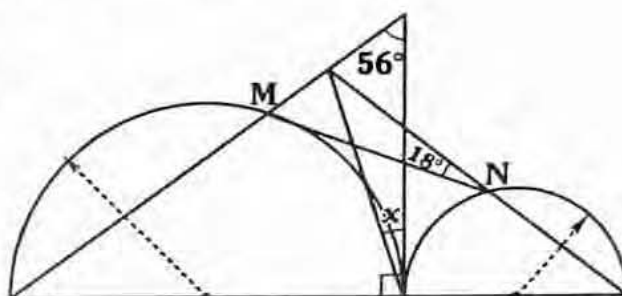
PROBLEMA N° 295

Se tiene dos circunferencia coplanares de radios 7 y 15 y su distancia de centros es 20. Calcule la medida del ángulo entre dichas circunferencias.

- A) 30°
- B) 60°
- C) 37°
- D) 53°
- E) 74°

PROBLEMA N° 296

En el gráfico, calcule "x".

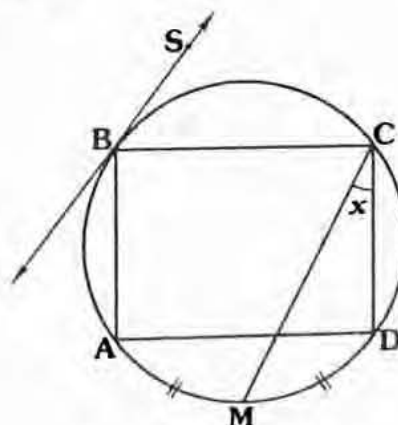


- A) 18°
- B) 16°
- C) 14°
- D) 12°
- E) 20°

PROBLEMA N° 297

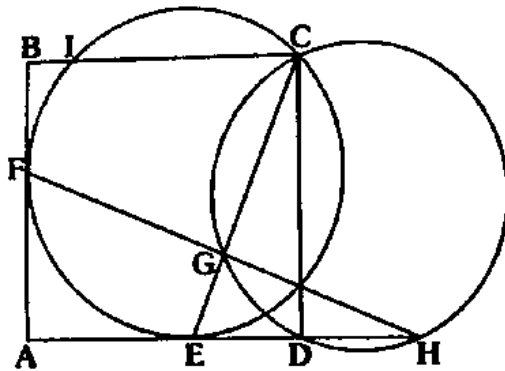
Se tiene un rectángulo ABCD inscrito en una circunferencia de manera que la recta tangente trazada por B es paralela a la recta que pasa por C y M punto medio del arco AD. Calcule x.

- A) 53°
- B) 30°
- C) 37°
- D) 60°
- E) 45°



PROBLEMA N° 298

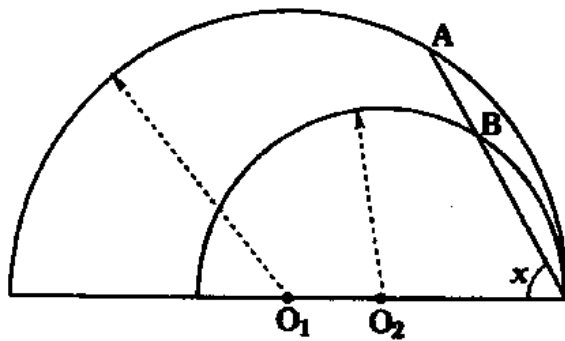
Calcular $m\widehat{C}$, ABCD: rectángulo, E y F son puntos de tangencia.



- A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 75°

PROBLEMA N° 299

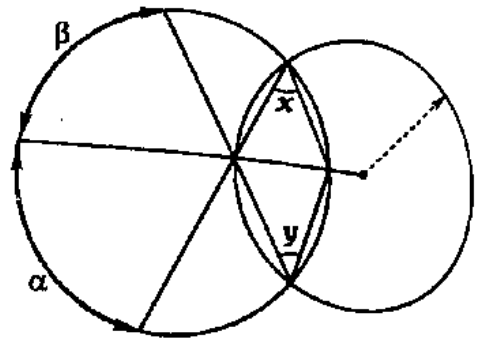
Si: $O_1O_2 = AB$, calcule "x".



- A) 45° B) 60° C) 53°
D) 37° E) 75°

PROBLEMA N° 300

Calcule $x - y$ en función de α y β .



- A) $\alpha - \beta$ B) $\alpha + \beta$
C) $\frac{\alpha - \beta}{2}$ D) $90^\circ - (\alpha + \beta)$
E) $180^\circ - (\alpha + \beta)$



Geometría—

SOLUCIONARIO

Anual

Cepre Uni

Semestral

Semestral Intensivo

Repaso

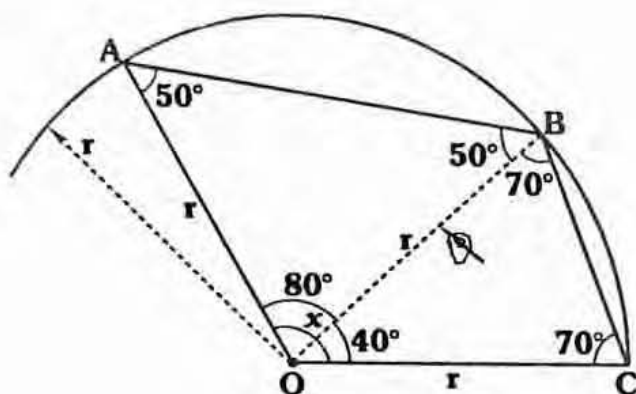
CIRCUNFERENCIA



Solucionario

Ciclo Anual

RESOLUCIÓN N° 1



Nos piden "x".

- Por definición de circunferencia:

$$AO = BO = CO$$

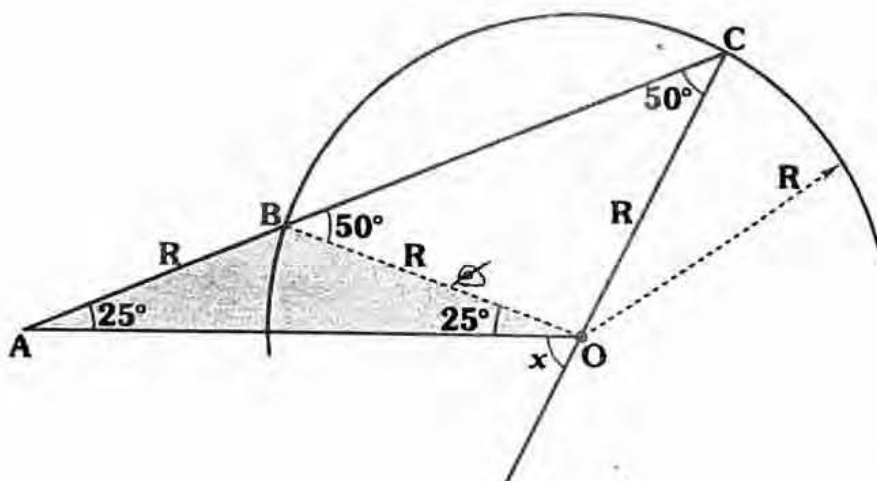
$\Rightarrow \triangle AOB$ y $\triangle BOC$ son isósceles

$$x = 80^\circ + 40^\circ$$

$$\therefore x = 120^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 2



Nos piden "x".

- Por definición: $OB = R \Rightarrow \triangle ABO$ y $\triangle BOC$ son isósceles entonces:

$$m\angle AOB = 25^\circ \text{ y } m\angle OBC = m\angle BCO = 50^\circ$$

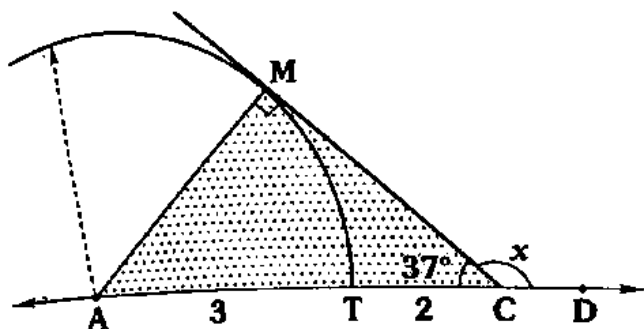
- En $\triangle AOC$: por ángulo exterior:

$$x = 50^\circ + 25^\circ$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 3



Nos piden "x".

- Al unir "A" con "M" tendremos:
 $\overline{AM} \perp \overline{MC}$

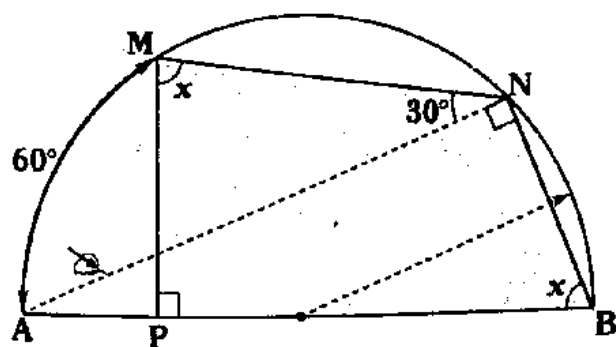
- $\angle AMC$: notable de 37°

$$\Rightarrow x + 37^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 143^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 4



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\angle ANM = 30^\circ$$

- En la semicircunferencia:

$$m\angle ANB = 90^\circ$$

- En el cuadrilátero PBNM:

$$x + 90^\circ + x + 120^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

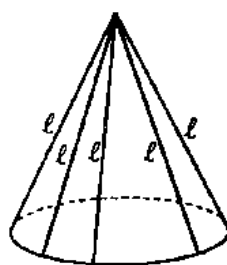
Clave B

RESOLUCIÓN N° 5

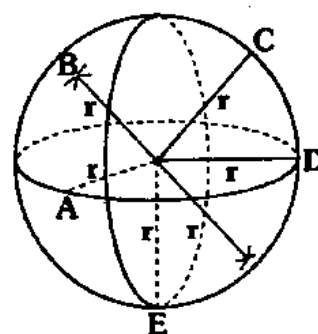
Analizando cada proposición:

- I) FALSO

Los puntos deben estar en el mismo plano, pues también tenemos las siguientes figuras cumplen la definición:

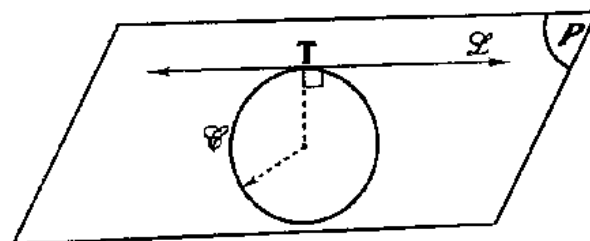


Superficie lateral del cono



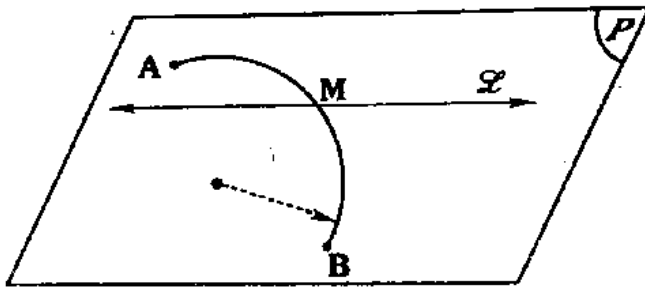
Superficie esférica

- II) VERDADERO



Por definición, una recta es tangente ($\mathcal{L}$) a una circunferencia ($\mathcal{C}$) si está en el mismo plano y la intersección es un solo punto (T).

III) FALSO

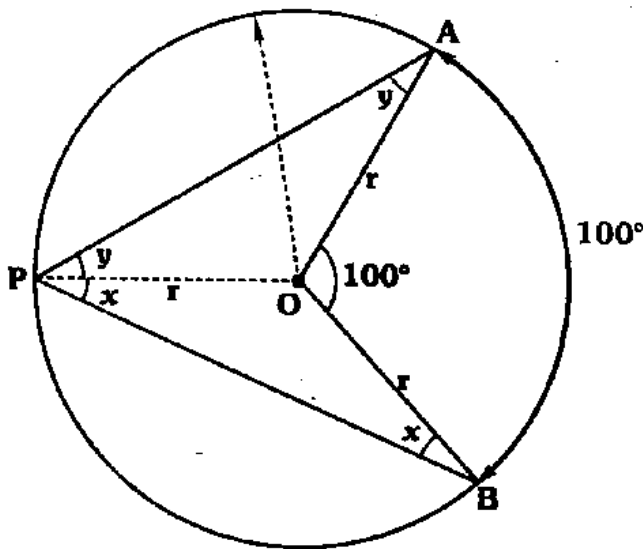


$$\overline{l} \cap \widehat{AB} = \{M\}$$

$\overline{l}$ no es tangente al arco AB.

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 6



Nos piden: $x + y$

- Por ángulo central:

$$m\angle AOB = 100^\circ$$

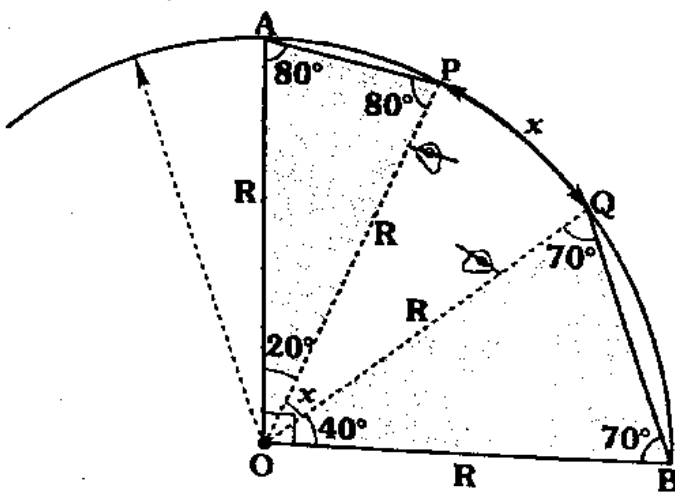
- En el $\triangle AOB$:

$$2x + 2y = 100^\circ$$

$$\therefore x + y = 50^\circ$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 7



Nos piden "x"

- Por ángulo central:

$$m\angle POQ = x$$

- $\triangle AOP$ y $\triangle QOB$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle AOP = 20^\circ \quad y$$

$$m\angle QOB = 40^\circ$$

- Como:

$$x + 20^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **C**

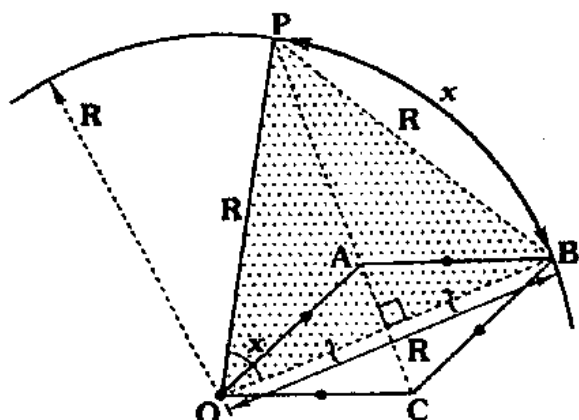
$$\therefore x = 110^\circ$$
$$m_{\angle FGM} = \frac{65^\circ}{2}$$

$\Rightarrow \triangle AOM$ y $\triangle MOG$: isósceles

$$x = 40^\circ + 40^\circ + \frac{65^\circ}{2} + \frac{65^\circ}{2}$$
$$\therefore x = 145^\circ$$

153

RESOLUCIÓN N° 10



Piden "x".

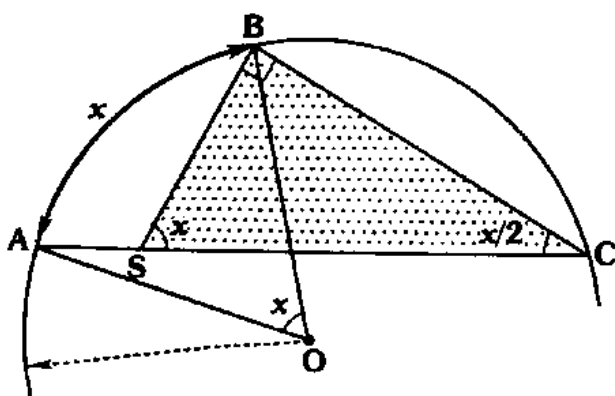
- Por ángulo central $m\angle POB = x$
- Como OABC es un rombo entonces $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ entonces $\overline{PC}$ es mediatriz de $\overline{OB}$ entonces $PB = PO = R$.

- $\triangle OPB$: equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 11



Piden "x".

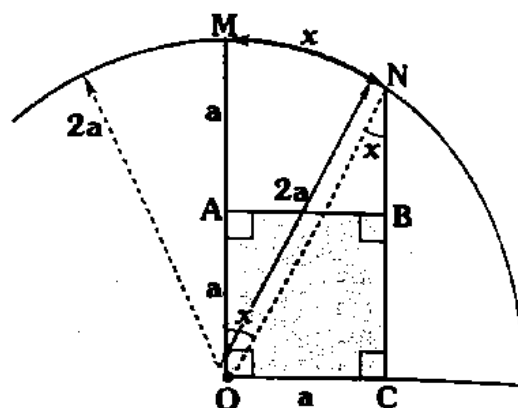
- Por ángulo central: $m\widehat{AB} = x$
- Por ángulo inscrito: $m\angle ACB = \frac{x}{2}$

$$\text{En } \triangle SBC: x + \frac{x}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 12



Piden "x".

- Dato: $OA = AM$
- Sea $OA = OC = a \Rightarrow ON = 2a$
- Por ángulo central:

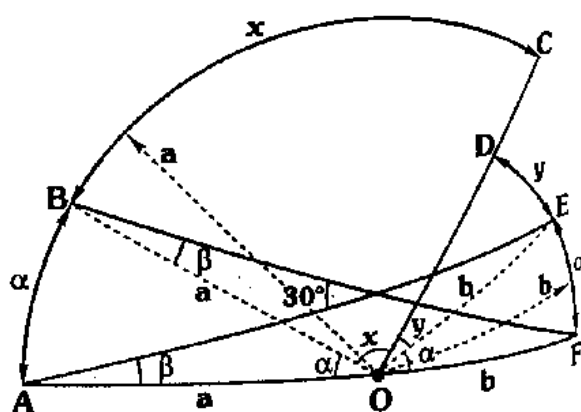
$$m\angle MON = x$$

- En $\triangle OCN$: notable

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 13



Piden $x+y$

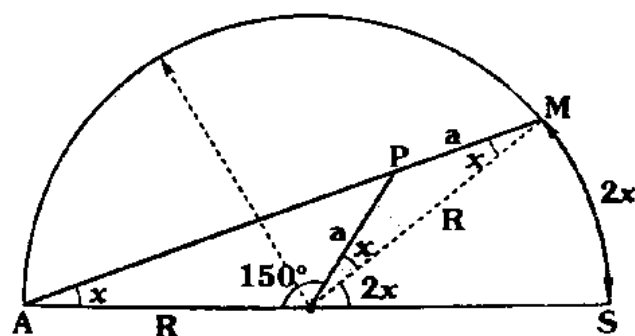
- Dato: $m\widehat{AB} = m\widehat{EF}$
- Por ángulo central:
 $m\angle AOB = m\angle FOE = \alpha$
- $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle DAE = m\angle OBF = \beta$
- En Σ : $\alpha + \beta = 30^\circ + \beta \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
- En "O":

$$x + y + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore x + y = 120^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 14

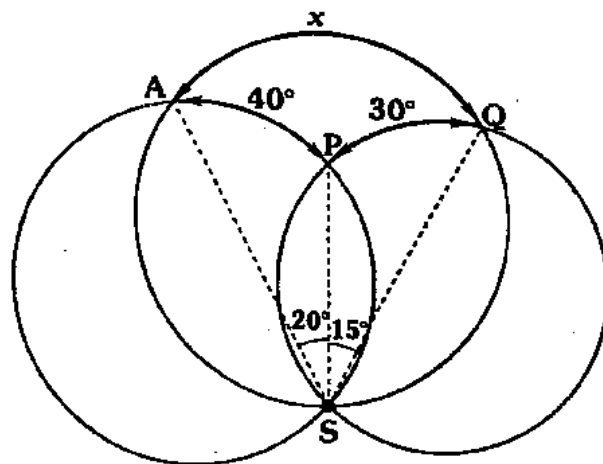


Nos piden: $m\widehat{MS}$

- Sea:
 $m\angle SAM = x \Rightarrow m\angle OMA = x$
- $\triangle OPM$: isósceles $\Rightarrow m\angle MOP = x$
- En O: $150^\circ + 3x = 180^\circ$
 $\Rightarrow x = 10^\circ$
- Como: $m\widehat{MS} = 2x$
 $\therefore m\widehat{MS} = 20^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 15

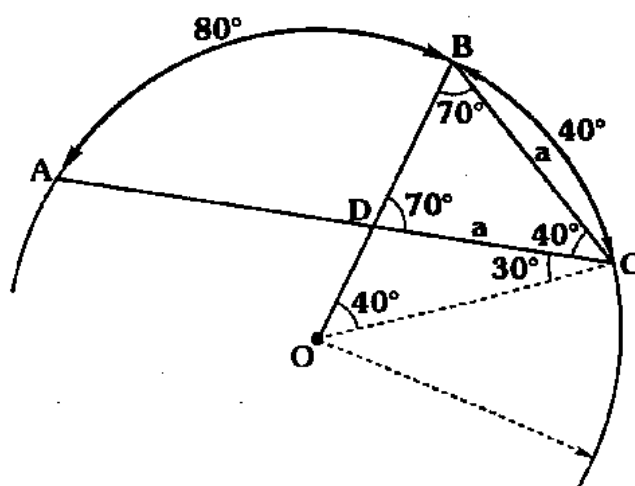


Piden "x".

- Por ángulo inscrito:
 $m\angle ASP = 20^\circ$ y
 $m\angle PSQ = 15^\circ$
 $\Rightarrow m\angle ASQ = 35^\circ$
- Finalmente, por ángulo inscrito en $\odot$:
 $x = 2(35^\circ) = 70^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 16



Piden: $m\widehat{ABC}$

- $\triangle ABC$ y $\triangle OBC$: isósceles

$$\Rightarrow m\angle DBC = m\angle BDC = 70^\circ \Rightarrow m\angle DCO = 30^\circ \text{ y } m\angle BOC = 40^\circ$$

- Por ángulo central: $m\widehat{BC} = 40^\circ$

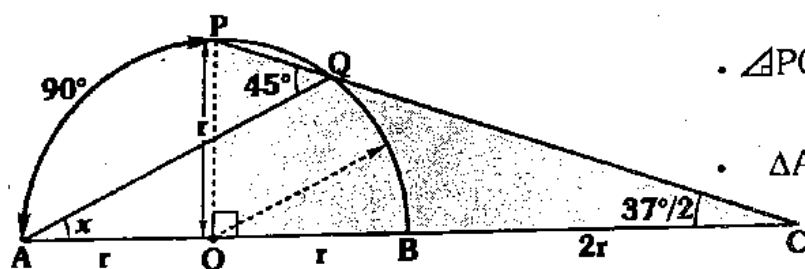
- Por ángulo inscrito: $m\widehat{AB} = 80^\circ$

$$\Rightarrow m\widehat{ABC} = 80^\circ + 40^\circ$$

$$\therefore m\widehat{ABC} = 120^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 17



Piden "x".

- Dato: $m\widehat{AP} = m\widehat{PQB} \Rightarrow \overline{PO} \perp \overline{AB}$

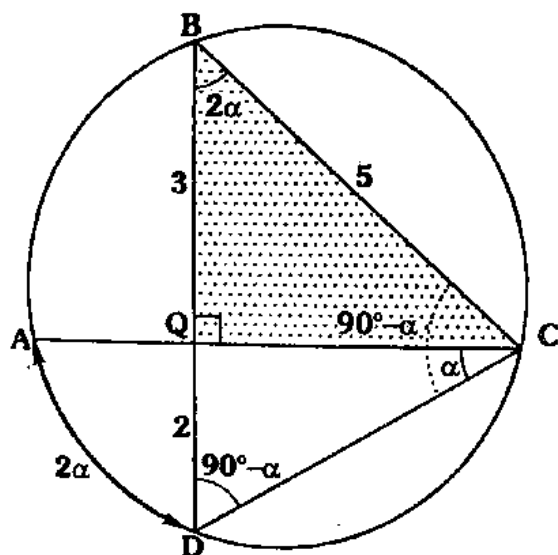
$$\angle POC: \text{notable} \Rightarrow m\angle PCO = \frac{37^\circ}{2}$$

$$\triangle AQC: x + \frac{37^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2} = 26^\circ 30'$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 18



Nos piden $m\widehat{AD}$

- Sea $m\widehat{AD} = 2\alpha$

$$\Rightarrow m\angle ACD = \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle BDC = 90^\circ - \alpha$$

- $\triangle DBC$: isósceles, entonces $DB = BC = 5$

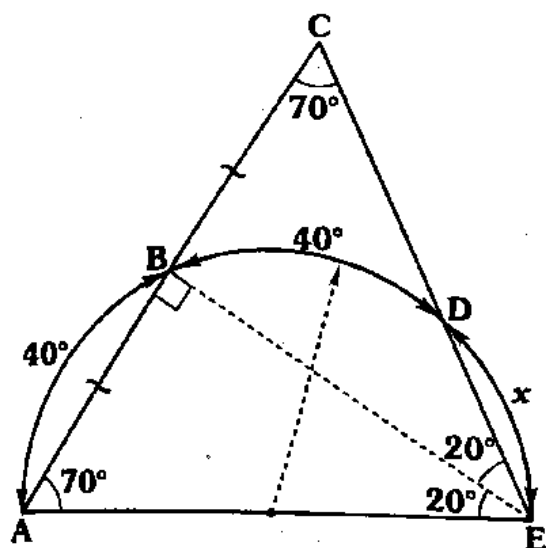
- $\angle BQC$: notable

$$2\alpha = 53^\circ$$

$$\therefore m\widehat{AD} = 53^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 19

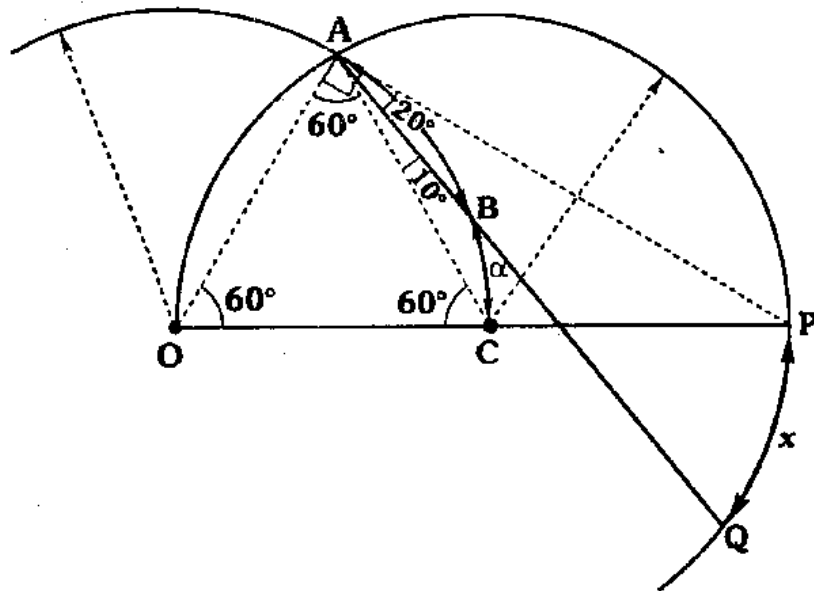


Piden "x".

- Por propiedad:
 $m\angle ABE = 90^\circ$
- Como $AB = BC$ entonces:
 $\triangle AEC$ es isósceles
 $\Rightarrow \overline{EB}$ también es bisectriz
- Por ángulo inscrito:
 $m\widehat{AB} = m\widehat{BD} = 40^\circ$
- Finalmente:
 $x + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 100^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 20

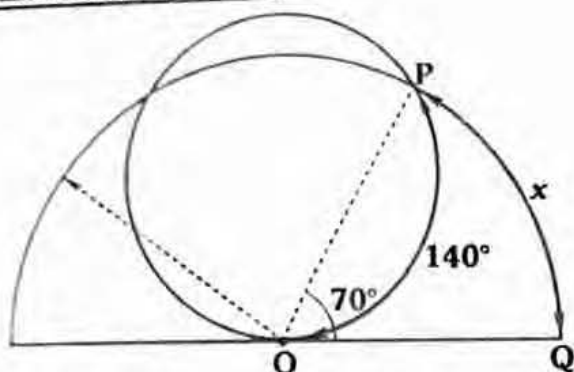


Piden "x".

- Dato: $m\widehat{AB} = 2m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Notemos que el $\triangle OAC$ es equilátero entonces: $\alpha + 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$
- Por ángulo inscrito:
 $m\angle CAB = 10^\circ$
 $m\angle BAP = 20^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 21



Nos piden "x".

- Como $m\widehat{OP} = 140^\circ$ entonces por ángulo semiinscrito:

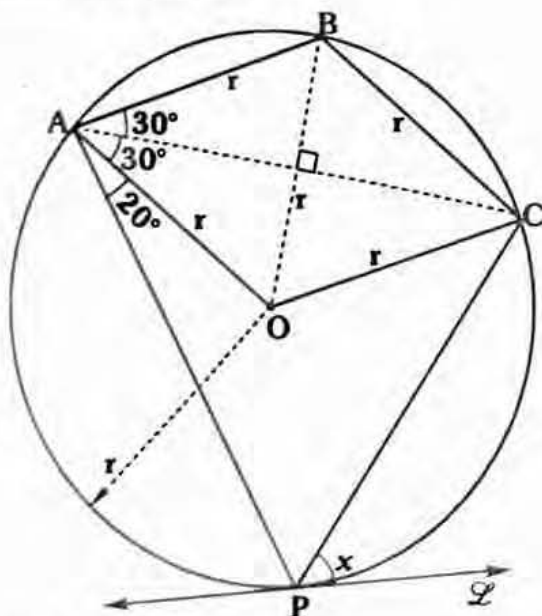
$$m\angle POQ = 70^\circ$$

- Por ángulo central:

$$x = 70^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 22



Piden "x".

- Como ABCO es un paralelogramo entonces $AB=r$ y $BC=r$, es decir los triángulos AOB y OBS son equiláteros (ABCO sería un rombo).

$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle AOC = 30^\circ$$

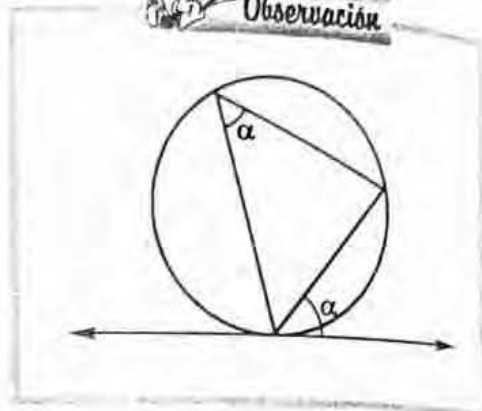
- De la observación:

$$x = 50^\circ$$

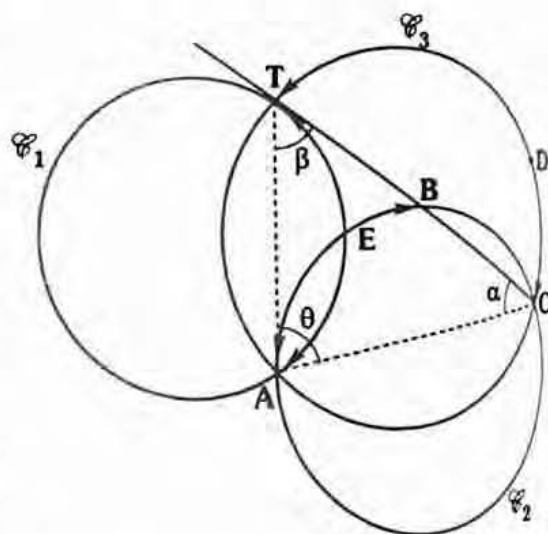
Clave D



Observación



RESOLUCIÓN N° 23



Nos piden: $m\widehat{TDC} + m\widehat{AB} + m\widehat{AET}$

- En C_1 , por ángulo semiinscrito:

$$m\widehat{AET} = 2\beta$$

- En C_2 , por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = 2\alpha$$

- En C_3 , por ángulo inscrito:

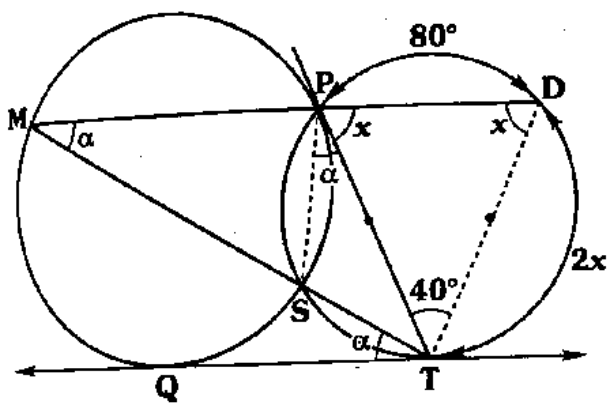
$$m\widehat{TDC} = 2\theta$$

• En el $\triangle ATC$: $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$

$$\Rightarrow m\widehat{TDC} + m\widehat{AB} + m\widehat{AET} = \underbrace{2\theta + 2\alpha + 2\beta}_{2(\alpha + \theta + \beta)}$$

$$\therefore m\widehat{TDC} + m\widehat{AB} + m\widehat{AET} = 360^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 24Piden: $m\widehat{TD}$

• Sea:

$$m_{\text{STQ}} = \alpha$$

$$\Rightarrow m_{\angle SPT} = \alpha \Rightarrow m_{\angle PMS} = \alpha$$

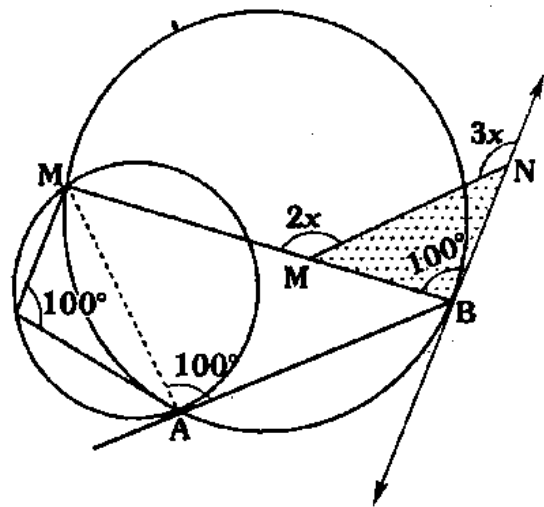
$$\Rightarrow \overline{MP} \parallel \overline{QT} \Rightarrow TP = TD$$

- ΔPTD : isósceles

$$\Rightarrow x = 70^\circ$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{TD} = 2x = 140^\circ$$

Clave **C****RESOLUCIÓN N° 25**

Nos piden “x”.

- Por propiedad:

$$m\angle MAB = 100^\circ$$

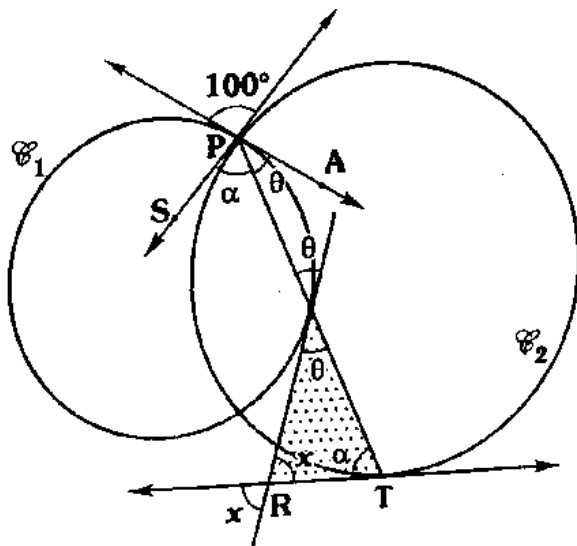
$$m\angle MBN = 100^\circ$$

• En el $\triangle MBN$, por propiedad:

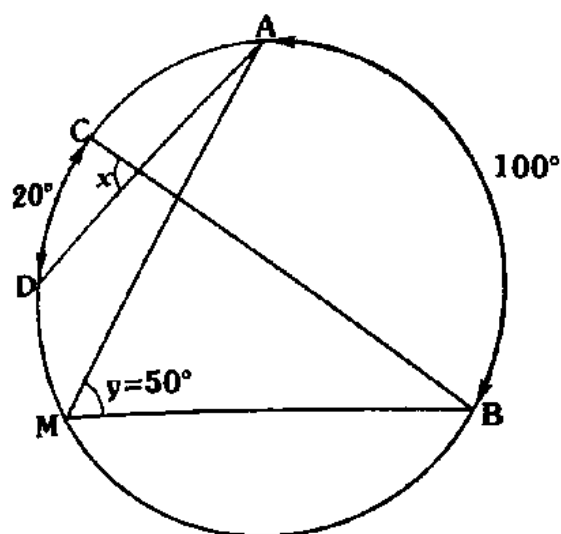
$$2x + 3x = 180^\circ + 100^\circ$$

$$\therefore x = 56^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 26

RESOLUCIÓN N° 28



Nos piden $x + y$

- Por ángulo inscrito:

$$y = 50^\circ$$

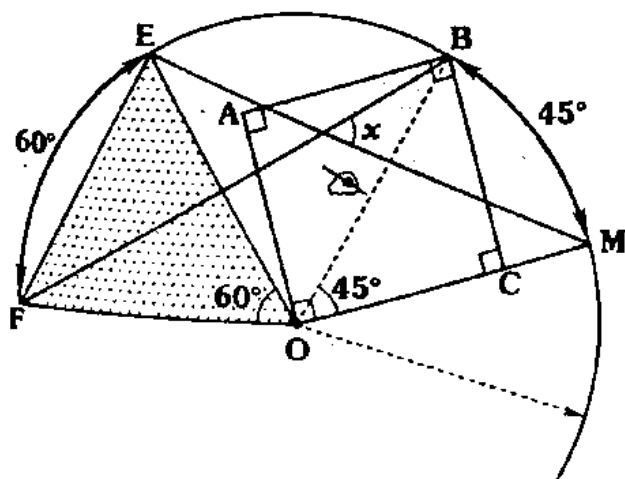
- Por ángulo interior:

$$x = \frac{100^\circ + 20^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\therefore x + y = 110^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 29



❖ Piden "x".

- Como el $\triangle EOF$ es equilátero

$$\Rightarrow m\widehat{EF} = 60^\circ$$

- Como OABC es un cuadrado

$$\Rightarrow m\widehat{BM} = 45^\circ$$

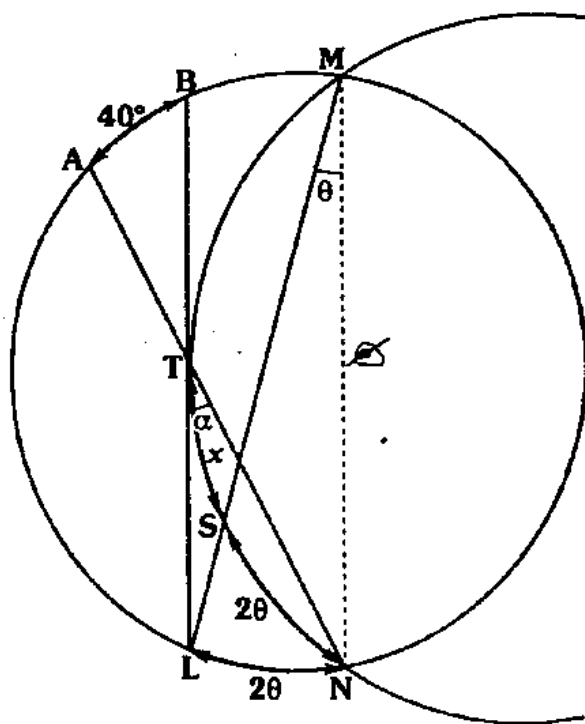
- Por ángulo interior:

$$x = \frac{60^\circ + 45^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 52,5^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 30



❖ Nos piden $m\widehat{TS}$

- Sea $m\widehat{TS} = x$

- Sea: $m\angle LMN = \theta$

$$\Rightarrow m\widehat{SN} = 2\theta \text{ y } m\widehat{LN} = 2\theta$$

• Por ángulo interior: $\alpha = \frac{40^\circ + 20}{2}$

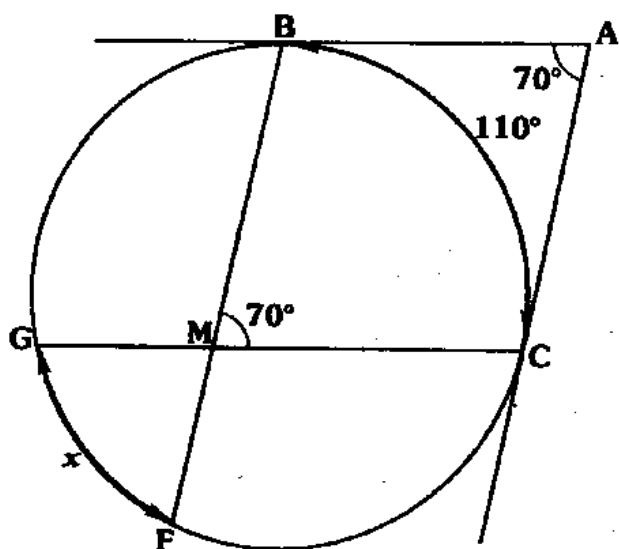
• Por ángulo semiinscrito: $\alpha = \frac{x + 20}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x + 20}{2} = \frac{40^\circ + 20}{2}$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 31



Nos piden "x".

• Como $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes entonces: $m\widehat{BC} = 110^\circ$

• MBAC: paralelogramo entonces:

$$m\angle BMC = 70^\circ$$

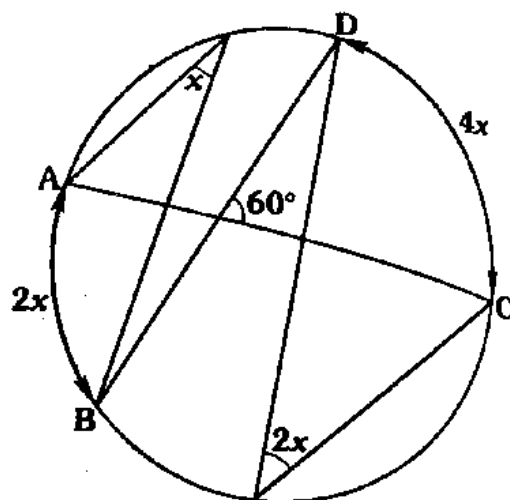
• Por ángulo interior:

$$70^\circ = \frac{x + 110^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 32



Nos piden "x".

• Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = 2x \quad y$$

$$m\widehat{CD} = 4x$$

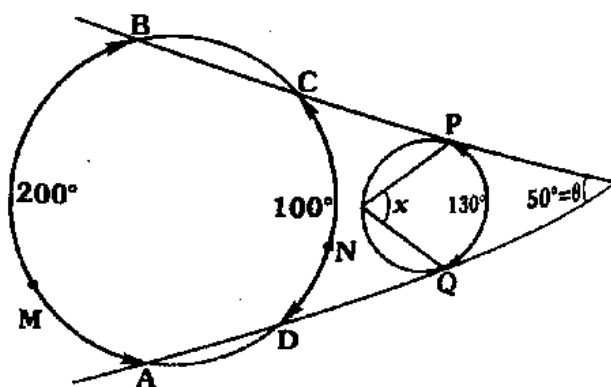
• Por ángulo interior:

$$60^\circ = \frac{2x + 4x}{2}$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 33



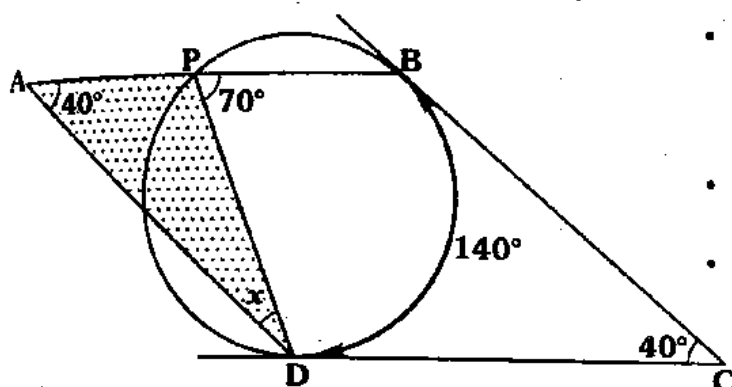
Piden "x".

• Por ángulo exterior: $\theta = \frac{200^\circ - 100^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow m\widehat{PQ} = 130^\circ$

• Por ángulo inscrito: $x = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 34



Nos piden "x".

- Como ABCD es un paralelogramo:

$$m\angle DAB = m\angle BCD = 40^\circ$$

- $m\widehat{BD} = 140^\circ \Rightarrow m\angle DPB = 70^\circ$

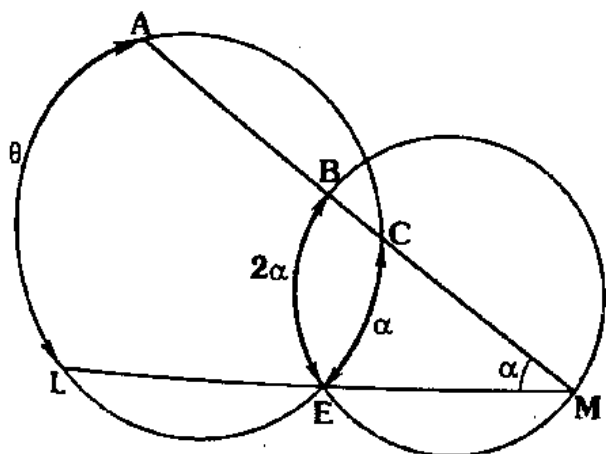
- En $\triangle APD$:

$$x + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 35



Nos piden $m\widehat{BE}$

- Dato: $m\widehat{BE} = 2(m\widehat{EC})$ y

$$m\widehat{AL} + m\widehat{BE} + m\widehat{EC} = 240^\circ$$

- Sea $m\angle EMB = \alpha \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\alpha$

$$\text{del dato: } m\widehat{EC} = \alpha$$

- Por ángulo exterior:

$$\frac{\theta - \alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \theta = 3\alpha$$

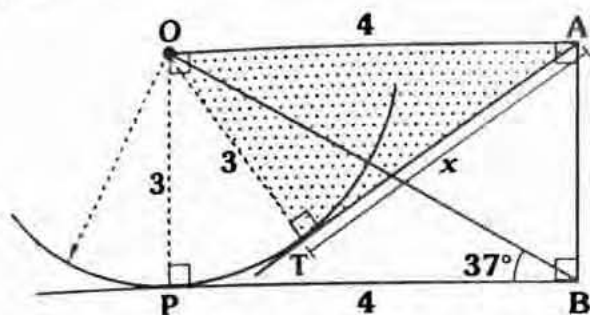
• Del segundo dato: $3\alpha + 2\alpha + \alpha = 240^\circ \rightarrow \alpha = 40^\circ$

$$\therefore m\widehat{BE} = 80^\circ$$

Clave C

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} + a^2 = \cancel{y^2} + 2b^2$$

$$\therefore x = \sqrt{2b^2 - a^2}$$

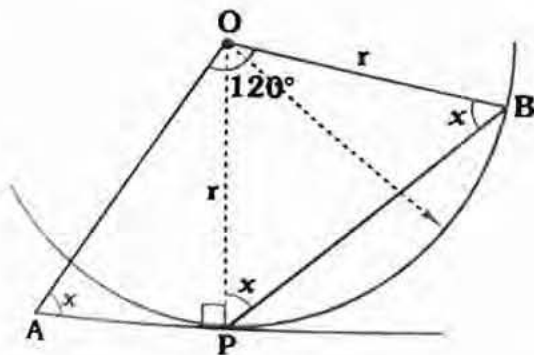
Clave **E****RESOLUCIÓN Nº 39**

Nos piden "x".

- Por propiedad $\overline{OP} \perp \overline{PD}$
- OPBA: rectángulo
- $\triangle OTA$: triángulo rectángulo

$$\Rightarrow x^2 + 3^2 = 4^2$$

$$\therefore x = \sqrt{7}$$

Clave **E****RESOLUCIÓN N° 40**

- Nos piden "x".
- Por propiedad: $m\angle APO = 90^\circ$
- En el $\triangle OPB$: isósceles tendremos:

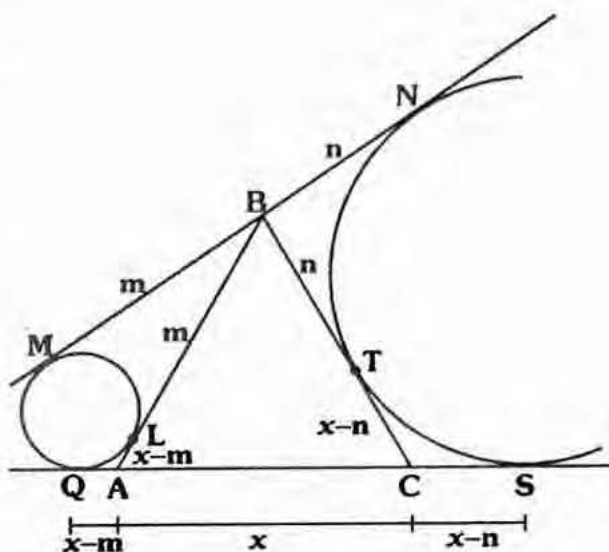
$$m\angle OPB = m\angle PBO = x$$

- En el $\triangle AOBP$:

$$3x + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 41

Nos piden: $\frac{MN}{AB} = \frac{m+n}{x}$

- Sea :

$$MB=m \text{ y } BN=n \Rightarrow MN=m+n$$

- $AB=x$ entonces:

$$AL = x - m = QA \quad y$$

$$CT = x - n = CS$$

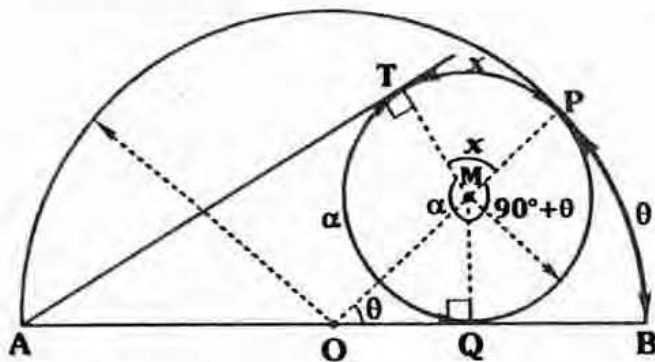
- Como $QS = MN$

$$\Rightarrow 3x - m - n = m + n \Rightarrow 3x = 2(m + n)$$

$$\therefore \frac{m+n}{x} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 42



Nos piden "x".

• Dato: $\alpha + \theta = 200^\circ$

• Por ángulo central:

$$m\angle POB = \theta \quad y$$

$$m\angle TMQ = \alpha$$

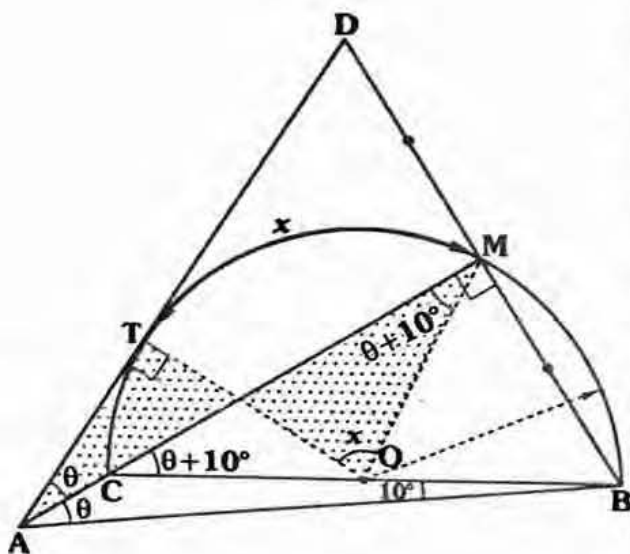
• En M:

$$x + \underbrace{\alpha + \theta}_{200} + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 70^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 43



Piden "x".

- Por ángulo central $m\angle MOT = x$
- Como $BM = MD$ y $m\angle CMB = 90^\circ$
 $\Rightarrow ABD$: isósceles

• $\triangle COM$: isósceles

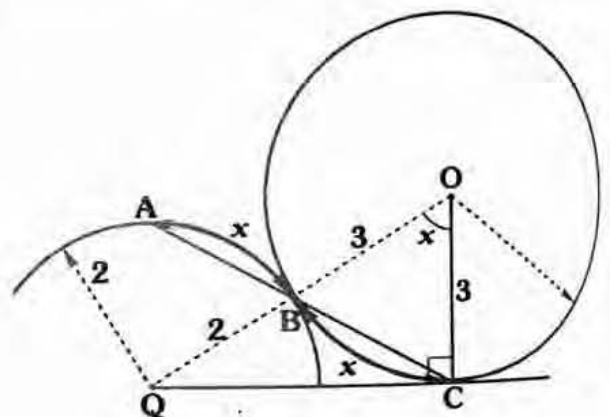
• En la región sombreada:

$$x + \theta + 10^\circ = 90^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 80^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 44



Piden "x".

• Por propiedad:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$$

• Por ángulo central:

$$m\angle BOC = x$$

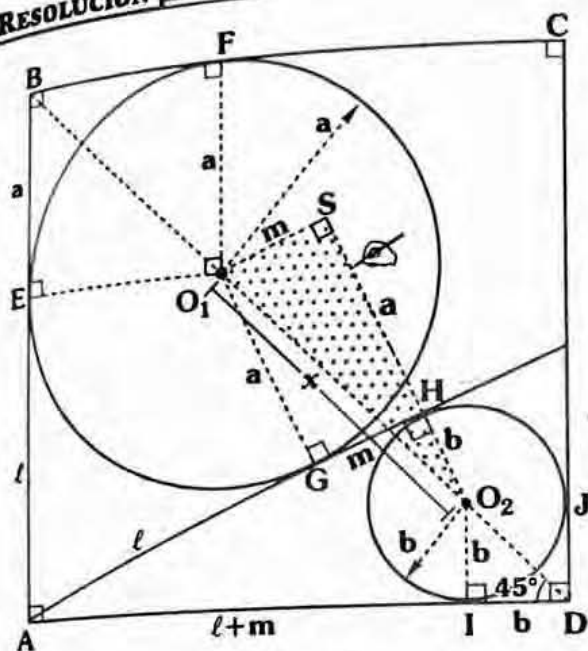
• Q, B y O: colineales

• $\triangle QCO$: notable

$$\therefore x = 53^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 45



Piden "x".

- Dato: $a^2 + b^2 = 100$
- Sea: $AE = \ell \Rightarrow AB = \ell + a$
- Se forma el triángulo rectángulo O_1SO_2 sus catetos miden: "m" y "a+b".
- Por propiedad $AH = AI$ entonces
 $AI = \ell + m$
- Como $AB = AD$

$$\Rightarrow \cancel{l} + a = \cancel{l} + m + b$$

$$\Rightarrow m = a - b$$

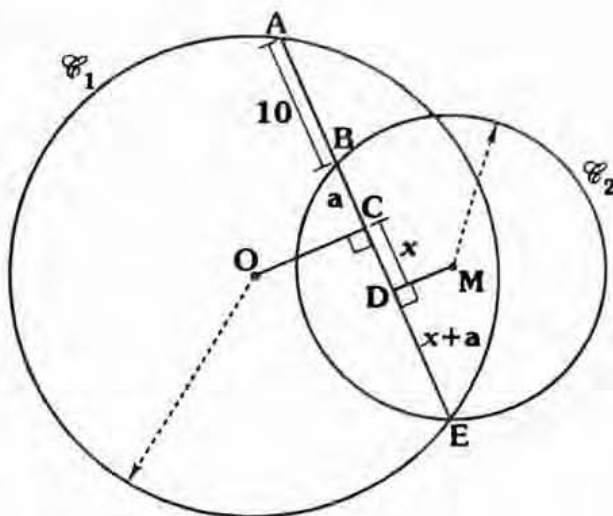
- En $\triangle O_1SO_2$:

$$x^2 = \underbrace{(a+b)^2 + (a-b)^2}$$

$$x^2 = 2(a^2 + b^2) = 200$$

$$\therefore x = 10\sqrt{2}$$

Clave C

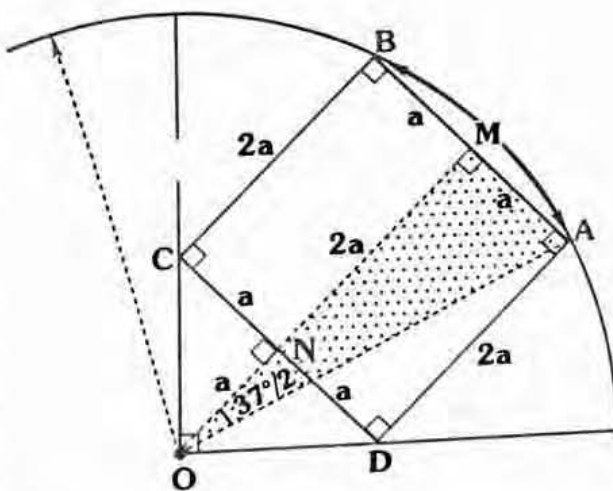
RESOLUCIÓN N° 46

Piden: "x".

- En $\mathcal{C}_2$: $BD=DE$
- Sea $BC=a \Rightarrow DE=a+x$
- En $\mathcal{C}_1$: $AC=CE$

$$\Rightarrow 10 + \cancel{a} = 2x + \cancel{a}$$

$$\therefore x = 5$$

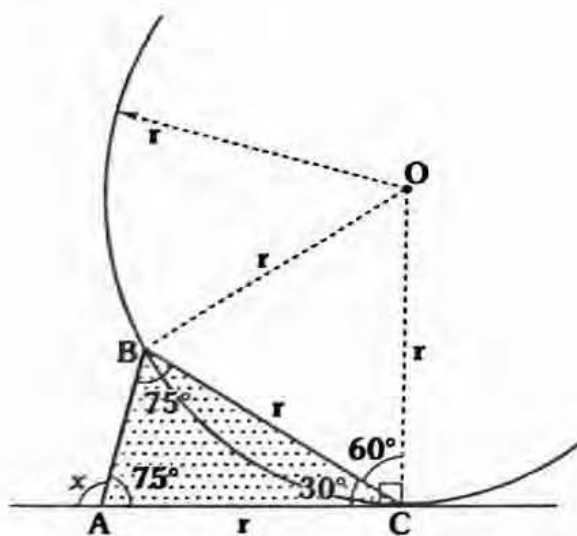
Clave C**RESOLUCIÓN N° 47**

Nos piden: "x".

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ (M en AB)
 $\Rightarrow AM=MB=a \Rightarrow CN=ND=a$
- $\triangle EN \triangle DOC$: como $CN=ND=a$
 $\Rightarrow ON=a$
- $\triangle OMA$: notable:

$$\Rightarrow m\angle MOA = \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore m\widehat{AB} = 37^\circ$$

Clave **C****RESOLUCIÓN N° 48**

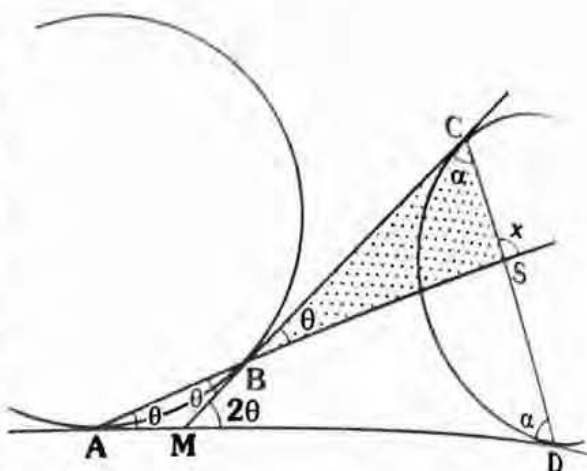
Nos piden "x".

- $\overline{OC} \perp \overline{AC}$
- $\triangle OBC$: equilátero
- $\triangle ABC$: isósceles

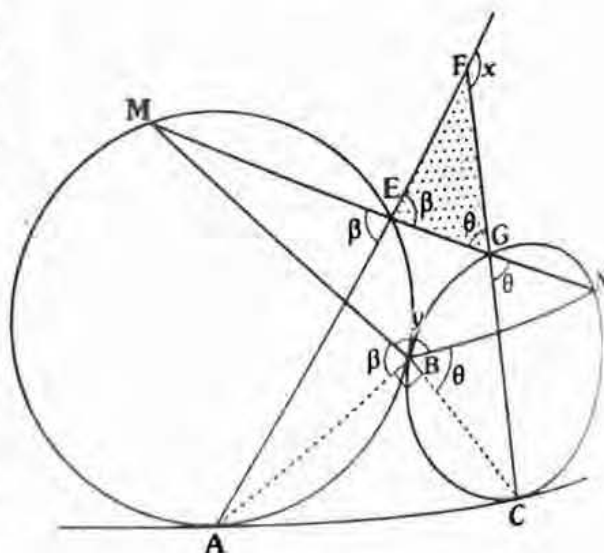
$$\Rightarrow m\angle BAC = 75^\circ$$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 49

- Por demostrar: $x = 90^\circ$
- Sea $m\angle MCD = \alpha$ y $m\angle CBS = \theta$
 $\Rightarrow x = \alpha + \theta$; $m\angle MDC = \alpha$ y
 $m\angle BAM = m\angle ABM = \theta$
- En $\triangle AMB$: $m\angle BMD = 2\theta$
- En $\triangle MCD$: $2\alpha + 2\theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ$

RESOLUCIÓN N° 50

Nos piden la relación entre "x" e "y".

- Por propiedad:

$$m\angle ABC = 90^\circ$$

- Sea $m\angle ABM = \beta$ y $m\angle CBN = \theta$

$$\Rightarrow m\angle AEM = \beta \text{ y } m\angle CBN = \theta$$

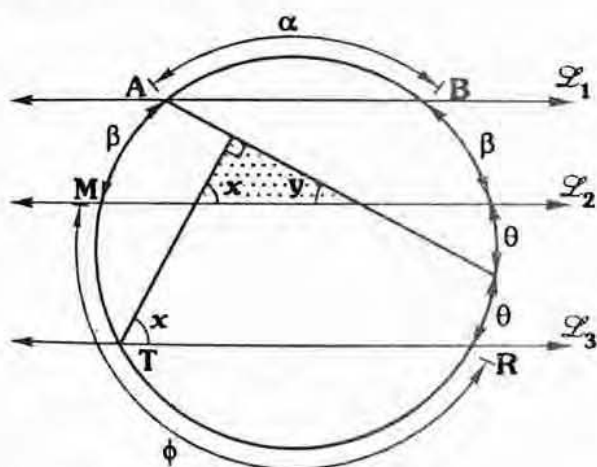
- En $\triangle EFG$: $x + \theta + \beta$

- En B: $y + 90^\circ + \underbrace{\beta + \theta}_x = 360^\circ$

$$\therefore x + y = 270^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 51



Nos piden "x".

Dato: $\alpha + \phi = 160^\circ$

- Observamos que:

$$x + y = 90^\circ$$

- Como:

$$\alpha + \phi = 160^\circ \Rightarrow 2\beta + 2\theta = 200^\circ$$

$$\Rightarrow \beta + \theta = 100^\circ$$

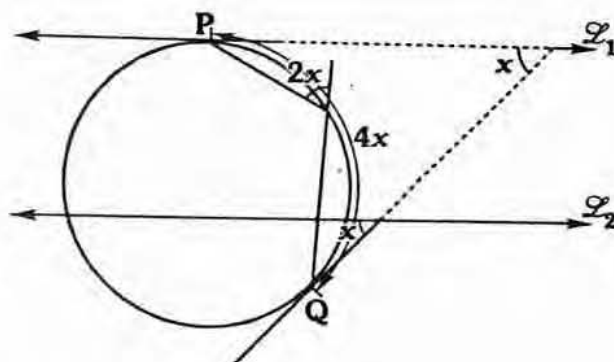
- Por ángulo interior:

$$y = \frac{\beta + \theta}{2} \Rightarrow y = 50^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 52



Nos piden "x".

- De la observación:

$$m\widehat{PQ} = 4x$$

- Por propiedad:

$$x + 4x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave C



Se cumple: $m\widehat{ABC} = 2\theta$

Nos piden "x".

Dato: $\theta - \alpha = 40^\circ$

• Por propiedad: $m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = m\widehat{DP} = \alpha$

$$m\widehat{AE} = m\widehat{EDP} = \theta$$

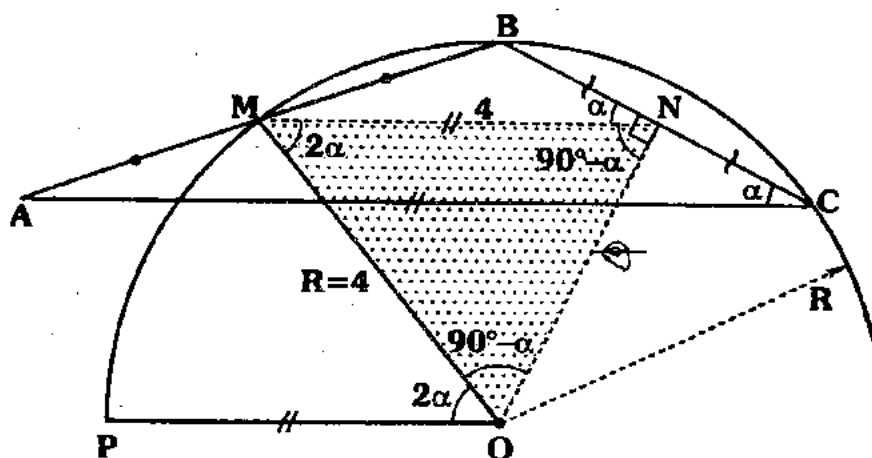
• Por ángulo inscrito: $m\widehat{ED} = 2x$

• Como $m\widehat{AE} = m\widehat{EDP} \Rightarrow \theta = \alpha + 2x \Rightarrow \underbrace{\theta - \alpha}_{40^\circ} = 2x$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 56



Nos piden: AC

• Se traza $\overline{ON} \perp \overline{BC} \Rightarrow BN = NC$

• En el $\triangle ABC$, $\overline{MN}$ es base media entonces $AC = 2(MN)$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, luego:
 $m\angle MNB = \alpha$ y $m\angle MNO = 90 - \alpha$ y $m\angle OMN = 2\alpha$.

• $\triangle OMN$: isósceles entonces:

$$OM = MN = 4$$

$$\therefore AC = 8$$

Clave D

- Como: $m\angle CTM = \theta \rightarrow m\widehat{DC} = 2\theta$
- Por propiedad:

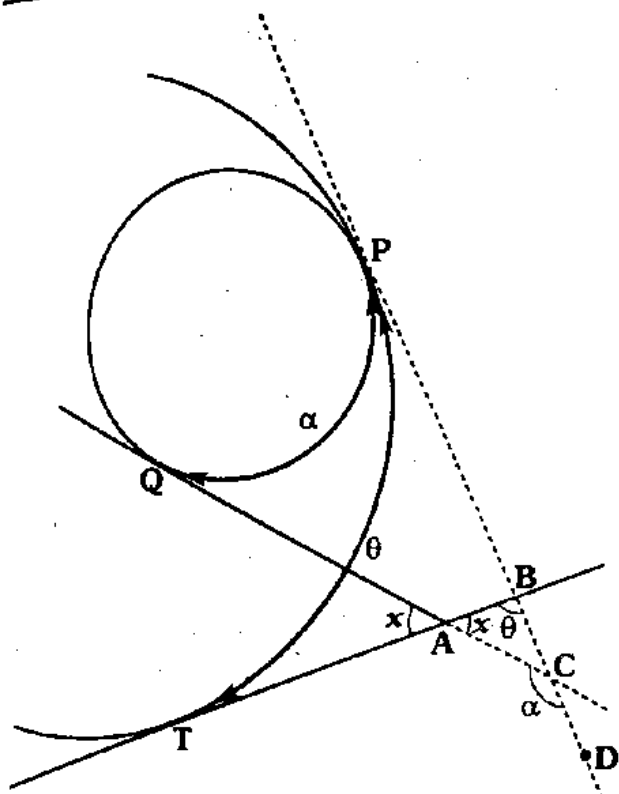
$$2\alpha + 2\theta = 180$$

$$\rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 59



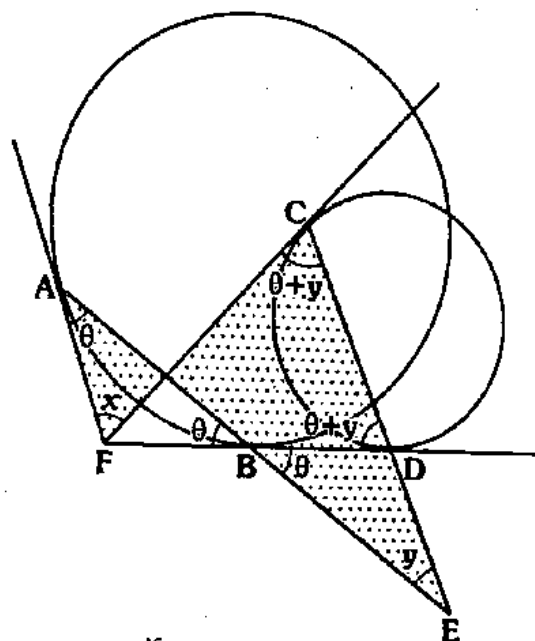
Nos piden "x".

Dato: $\alpha - \theta = 40^\circ$

- Se traza la tangente en P.
- Por propiedad: $m\angle CBT = \theta$ y $m\angle ACD = \alpha$
- En $\triangle ABC$: $x + \theta = \alpha$
 $x = \alpha - \theta$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 60



Nos piden: $\frac{x}{y}$

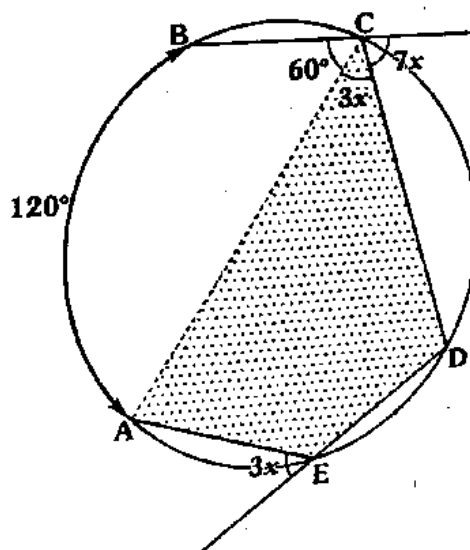
- Sea: $m\angle FAB = \theta \rightarrow m\angle FBA = \theta$
- En $\triangle BDE$: $m\angle BDC = \theta + y$
 $\rightarrow m\angle FCD = \theta + y$
- En la región sombreada:

$$x + \theta = \theta + 2y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 61



Piden "x".

- Se traza $\overline{AC} \Rightarrow \triangle ACDE$ es $\triangle$ inscrito entonces:

$$m\angle ACD = 3x$$

- Como:

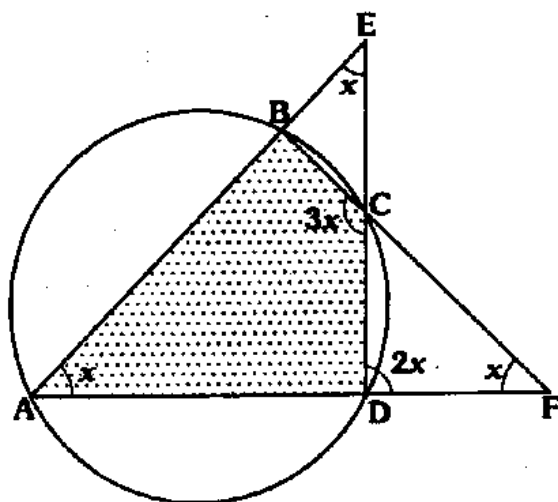
$$m\widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow m\angle BCA = 60^\circ$$

- Luego: $60^\circ + 3x + 7x = 180^\circ$

$$\therefore x = 12^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 62



Nos piden "x".

- En $\triangle ADE$:

$$m\angle CDF = 2x$$

- En $\triangle CDF$:

$$m\angle DCB = 3x$$

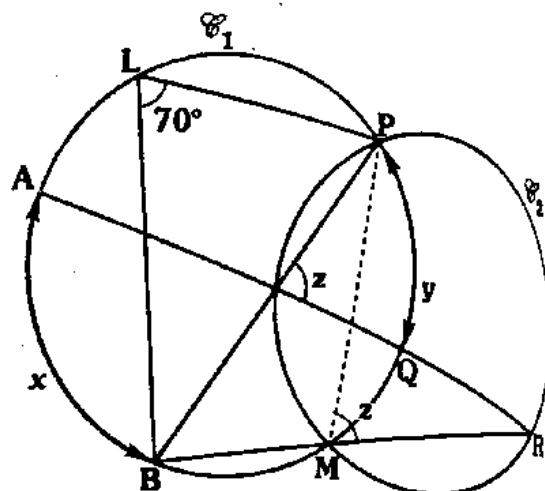
- En $\triangle ABCD$:

$$x + 3x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 63



Nos piden $x + y$

- Por ángulo interior:

$$z = \frac{x + y}{2}$$

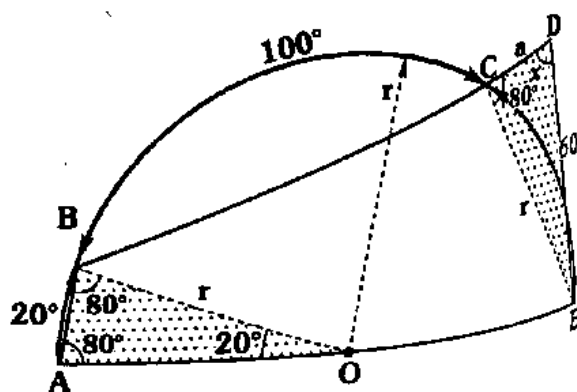
- En C_2 : Por ángulo inscrito $m\angle PMR$

- En $\triangle BLPM$: $z = 70^\circ$

$$\therefore x + y = 140^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 64

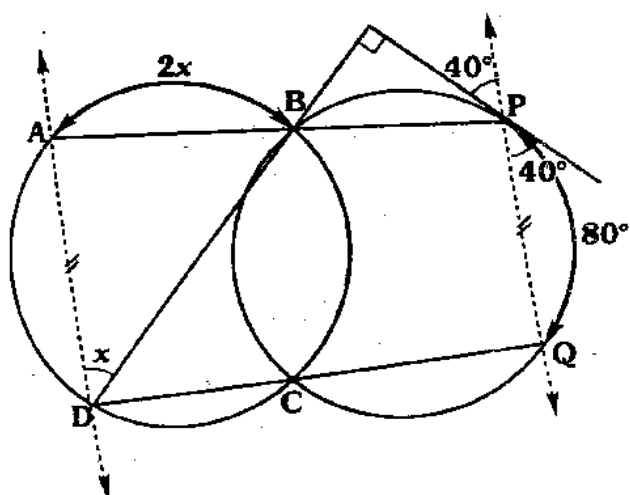


Piden "x".

- Como $m\widehat{CE} = 60^\circ \rightarrow CE = r$
- $\triangle AOB$: isósceles
 $\rightarrow m\angle BAO = m\angle ABO = 80^\circ$
- $\triangle ABCE$: inscrito $\rightarrow m\angle ECD = 80^\circ$
- $\triangle ABO \cong \triangle DCE$ (LAL)
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 65

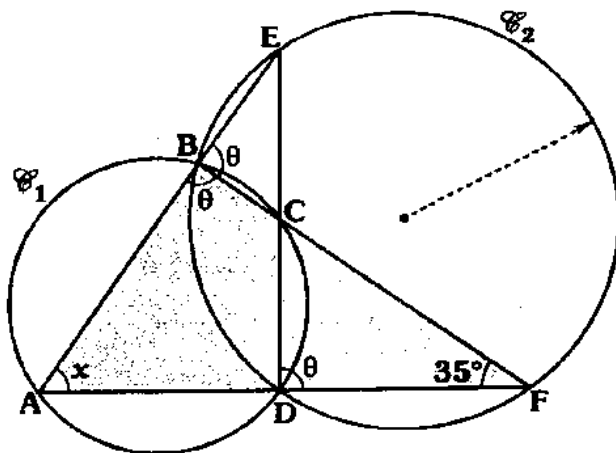


Nos piden $m\widehat{AB}$.

- Sea:
 $m\angle ADB = x \rightarrow m\widehat{AB} = 2x$
- Por propiedad: $\overline{AD} \parallel \overline{PQ}$
 $\Rightarrow x + 40^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow x = 50^\circ$
 $\therefore m\widehat{AB} = 100^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 66

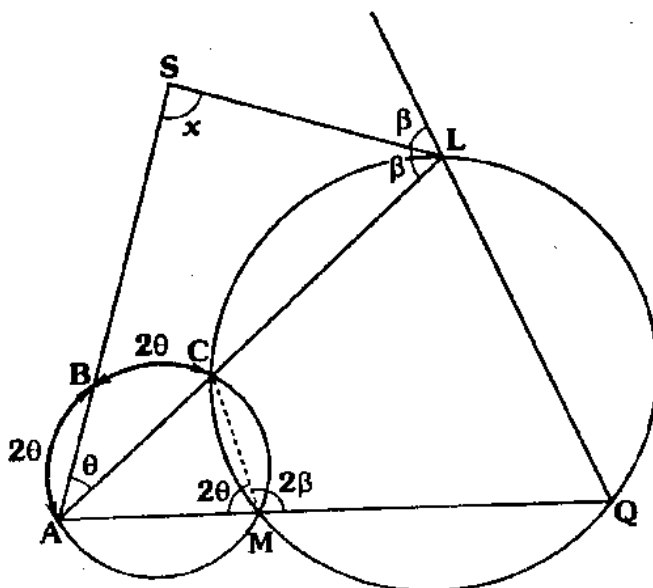


Piden "x".

- Sea $m\angle EDF = \theta$, en C_2 : $m\angle EBF = \theta$
- En $\triangle ABCD$: $m\angle ABC = \theta$
- En B: $\theta + \theta = 180^\circ$
 $\rightarrow \theta = 90^\circ$
- En $\triangle ABF$: $x + 35^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 55^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 67



Nos piden "x".

- En $\triangle ALS$: $x + \theta + \beta = 180^\circ$
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = 2\theta$$

$$m\angle AMC = 2\theta$$

- En $\triangle MCLQ$: $m\angle CMQ = 2\beta$

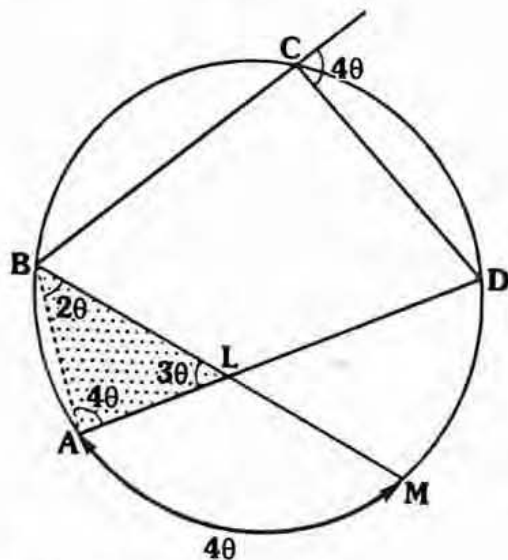
- En M: $2\theta + 2\beta = 180^\circ$

$$\rightarrow \theta + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 68



Nos piden "θ".

- Como $m\widehat{AM} = 4\theta \rightarrow m\angle ABM = 2\theta$

- En $\triangle ABCD$: $m\angle BAD = 4\theta$

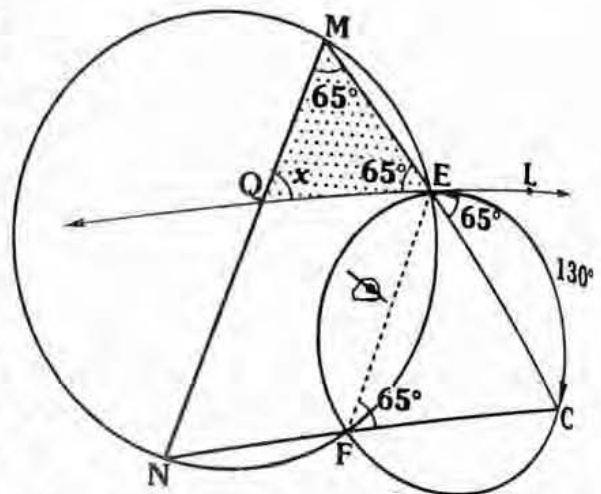
- En $\triangle ABL$:

$$2\theta + 3\theta + 4\theta = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 20^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 69



Piden "x".

Dato: $m\widehat{EFC} = 230^\circ \rightarrow m\widehat{EC} = 130^\circ$

- Por ángulo semiinscrito: $m\angle LEC = 65^\circ$
- Por ángulo inscrito: $m\angle EFC = 65^\circ$
- En el $\triangle NMEF$: inscrito

$$\rightarrow m\angle NME = 65^\circ$$

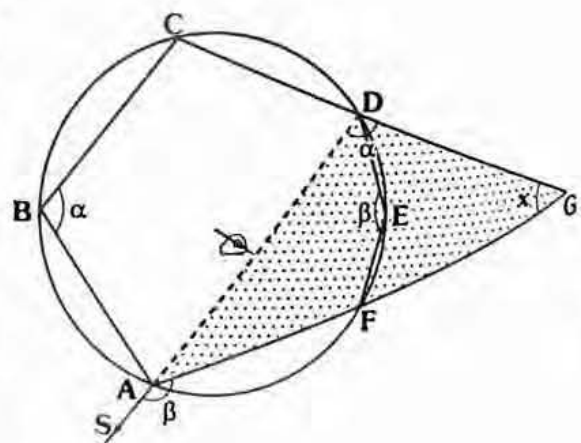
- En $\triangle QME$:

$$x + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 70



Piden "x".

Dato: $\beta - \alpha = 40^\circ$

• $\triangle ABCD$ y $\triangle ADEF$: inscritos

$\rightarrow m\angle ADG = \alpha$ y $m\angle SAF = \beta$

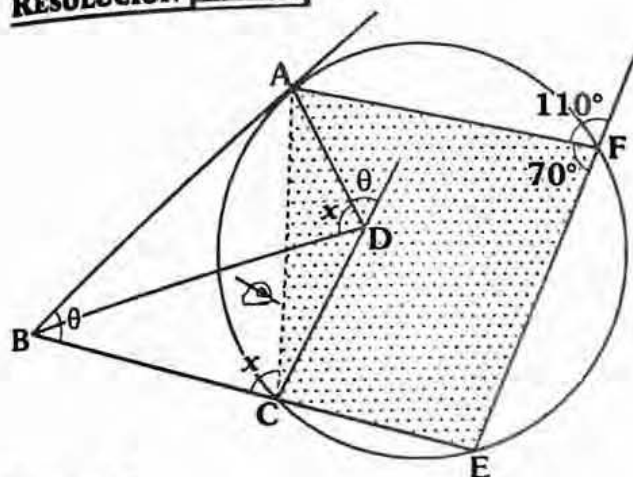
• En $\triangle ADG$: $x + \alpha = \beta$

$$x = \beta - \alpha$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 71



Piden "x".

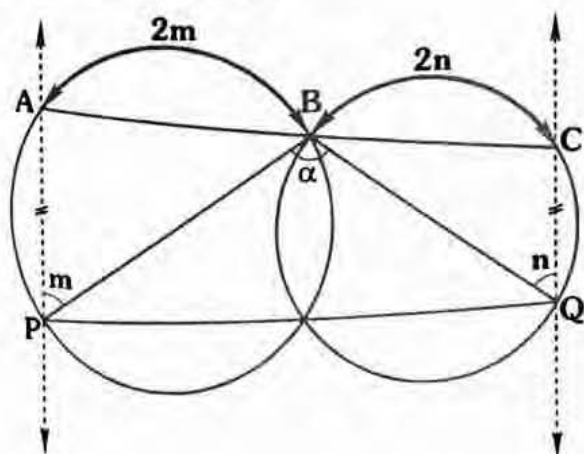
• Notemos que el $\triangle ABCD$ es inscriptible entonces $m\angle ACB = x$

• $\triangle AFEC$: inscrito:

$$\therefore x = 70^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 72



• Piden " α ".

Dato: $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 210^\circ$

• Por propiedad: $\overline{AP} \parallel \overline{CQ}$

$$\Rightarrow \alpha = m + n$$

• Del dato:

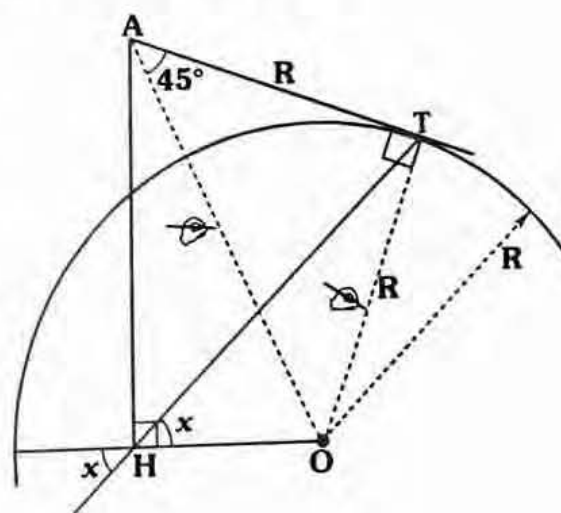
$$2m + 2n = 210^\circ$$

$$\Rightarrow m + n = 105^\circ$$

$$\therefore \alpha = 105^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 73



• Nos piden "x".

• Como:

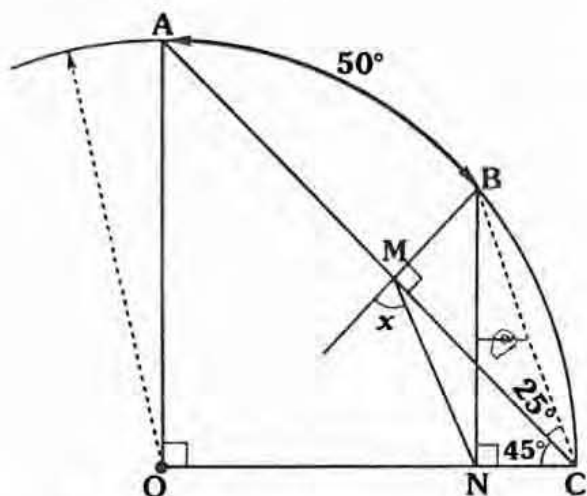
$$OT = TA \rightarrow m\angle OAT = 45^\circ$$

• $\triangle OHAT$: inscriptible

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 74



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

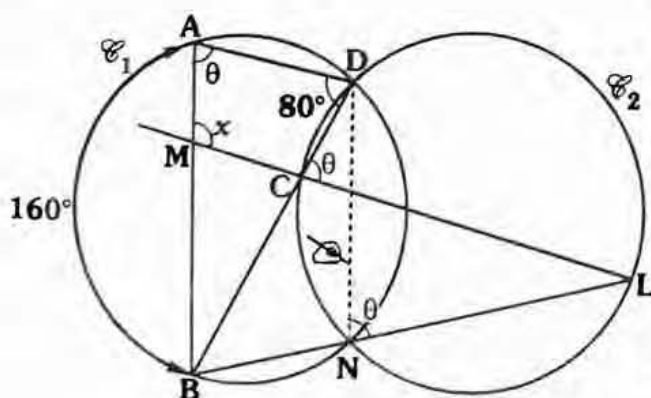
$$m\angle ACB = 25^\circ$$

- $\triangle NMBC$: inscriptible

$$\therefore x = 70^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 75



Nos piden "x".

- Sea $m\angle DAM = \theta$ entonces en el $\triangle ABCD$: inscrito

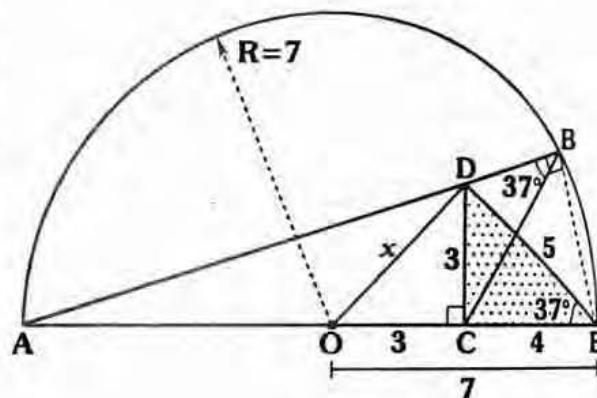
$$\Rightarrow m\angle DCL = \theta$$

- En C_2 : $m\angle DNL = \theta$
- En C_1 : $m\angle ADN = 80^\circ$
- $\triangle MADN$: inscriptible

$$\therefore x = 100^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 76



Nos piden "x".

- Por propiedad: $m\angle ABE = 90^\circ$ entonces $\triangle CDBE$ es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle DEC = 37^\circ$$

- $\triangle CDE$: notable

$$\Rightarrow EC = 4 \text{ y}$$

$$DC = 3$$

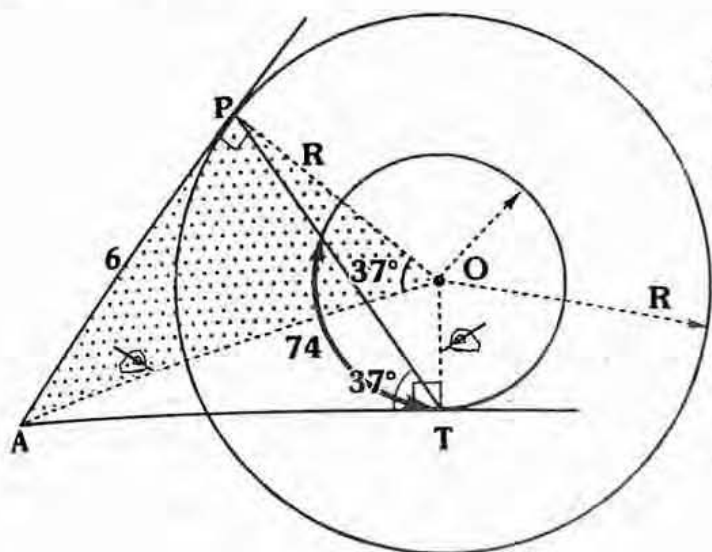
- En $\triangle OCD$:

$$OC = 3 \text{ y } CD = 3$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 77



Piden R.

- Notamos que el cuadrilátero OTAP es inscriptible

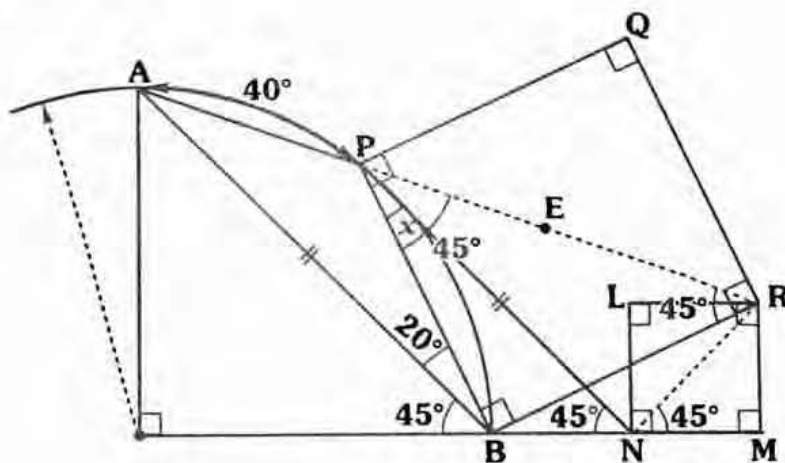
$$\Rightarrow m\angle AOP = 37^\circ$$

- $\triangle APO$: notable

$$R = 8$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 78



Piden "x".

- Como $m\angle BPE = 45^\circ$ entonces al prolongar $\overline{PE}$ llegará a "R", pues BPQR es cuadrado.
- $\triangle BPRN$: inscriptible $\Rightarrow m\angle BNP = 45^\circ$
- Luego: $\overline{AB} \parallel \overline{PN}$

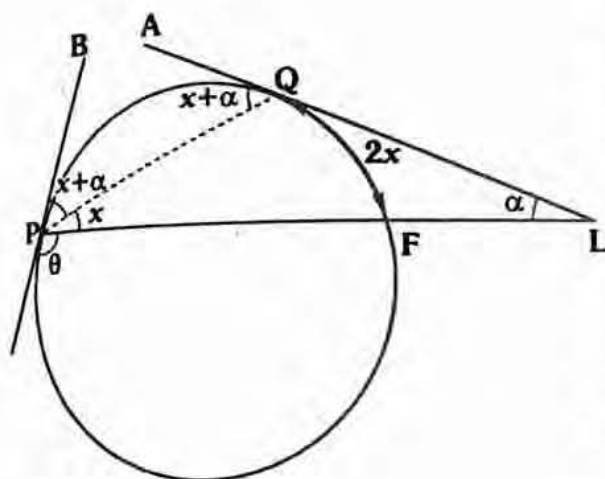
$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

Solucionario

Ciclo **Cepre-Uni**

RESOLUCIÓN N° 81



Nos piden $m\widehat{QF}$

Dato: $\alpha + \theta = 150^\circ$

• Sea $m\widehat{QF} = 2x \Rightarrow m\angle QPF = x$

• En $\triangle PQL$: $m\angle AQP = x + \alpha$

$\Rightarrow m\angle BPQ = x + \alpha$

• En P: $2x + \underbrace{\alpha + \theta}_{150^\circ} = 180^\circ$

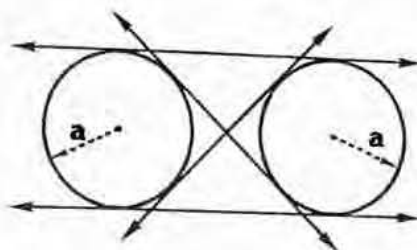
$\Rightarrow 2x = 30^\circ$

$\therefore m\widehat{QF} = 30^\circ$

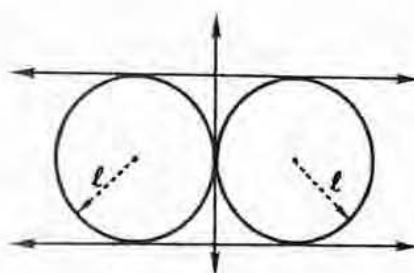
Clave C

RESOLUCIÓN N° 82

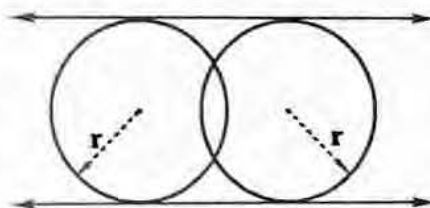
Veamos todas las posibilidades que tienen dos circunferencias congruentes en un plano, así como las tangentes comunes que se pueden trazar:



Hay cuatro rectas tangentes comunes



Hay tres rectas tangentes comunes

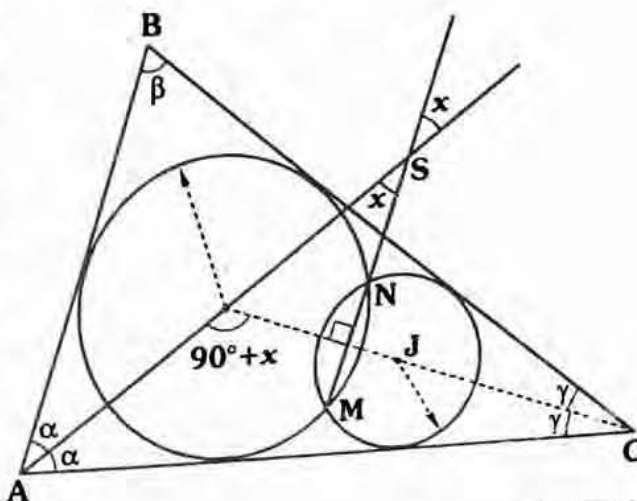


Hay dos rectas tangentes comunes

Se puede afirmar: no se puede trazar una tangente común.

Clave A

RESOLUCIÓN N° 83



Nos piden "x".

- Por propiedad: $\overline{MN} \perp \overline{IJ}$ y

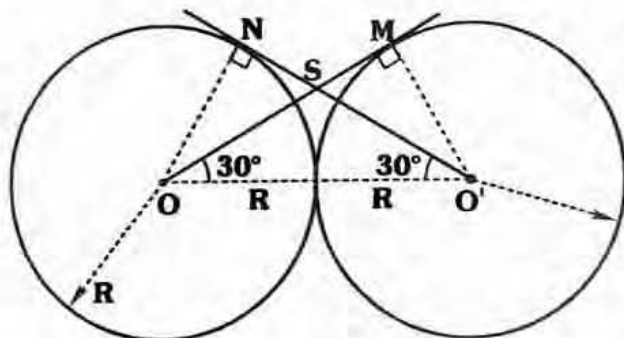
$$m\angle AIC = 90^\circ + \frac{m\angle ABC}{2}$$

$$90^\circ + x = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\beta}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 84



- $\triangle OMO'$ y $\triangle ONO'$: notables de 30°
- Por dato, el mayor ángulo entre las rectas tangentes es $5x$.

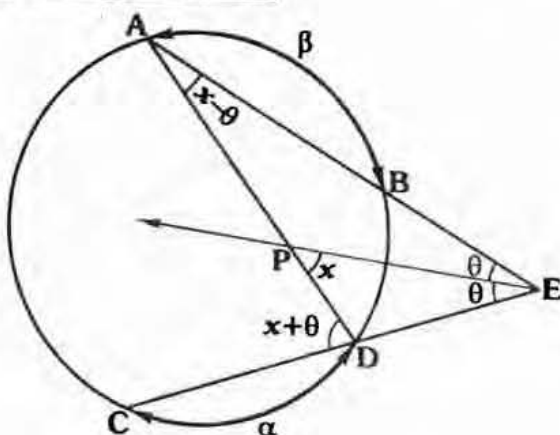
$$\Rightarrow m\angle OSO' = 5x$$

$$120^\circ = 5x$$

$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 85



Nos piden "x".

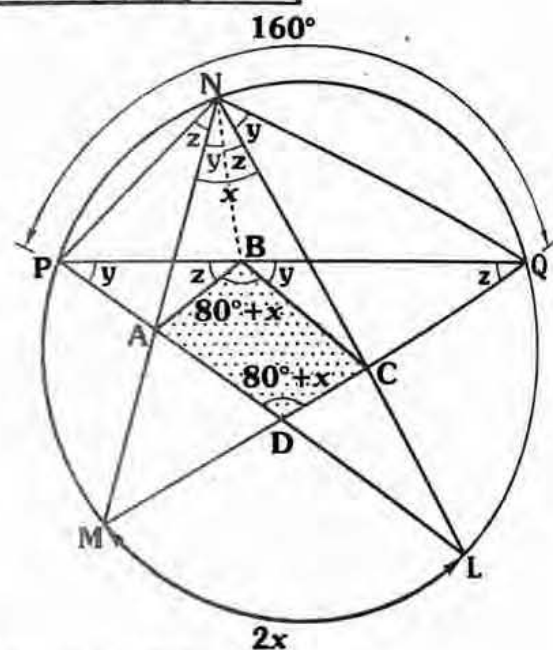
- Por dato: $\alpha + \beta = 120^\circ$
- En los triángulos AEP y PED:
 $m\angle EAP = x - \theta$ y $m\angle ADC = x + \theta$
 $\Rightarrow m\widehat{BD} = 2x - 2\theta$ y $m\widehat{AC} = 2x + 2\theta$
- En la circunferencia:

$$2x + 2\theta + 2x - 2\theta + \underbrace{\alpha + \beta}_{120^\circ} = 360^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 86



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{ML} = 2x$
- Por ángulo interior: $m\angle PDQ = 80^\circ + x$
- Notemos que los cuadriláteros NPAB y NBCQ son inscribibles entonces:

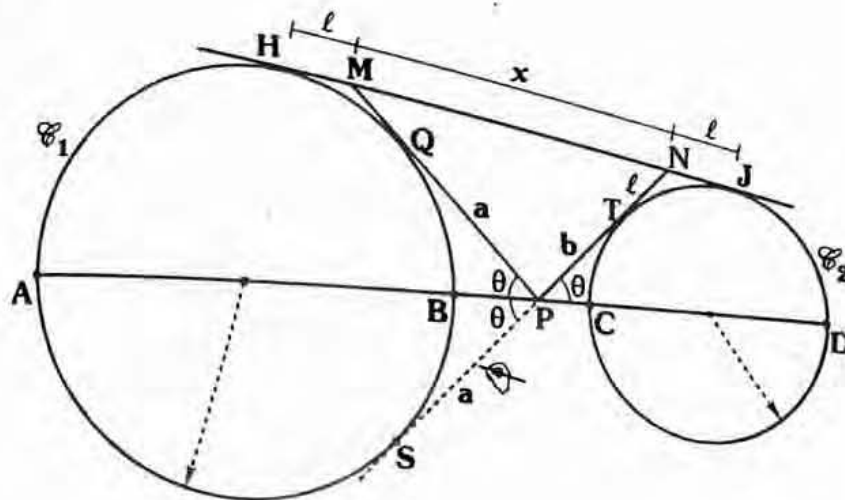
$$y + z = x$$

- En B: $80^\circ + x + \underbrace{y + z}_x = 180^\circ$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 87



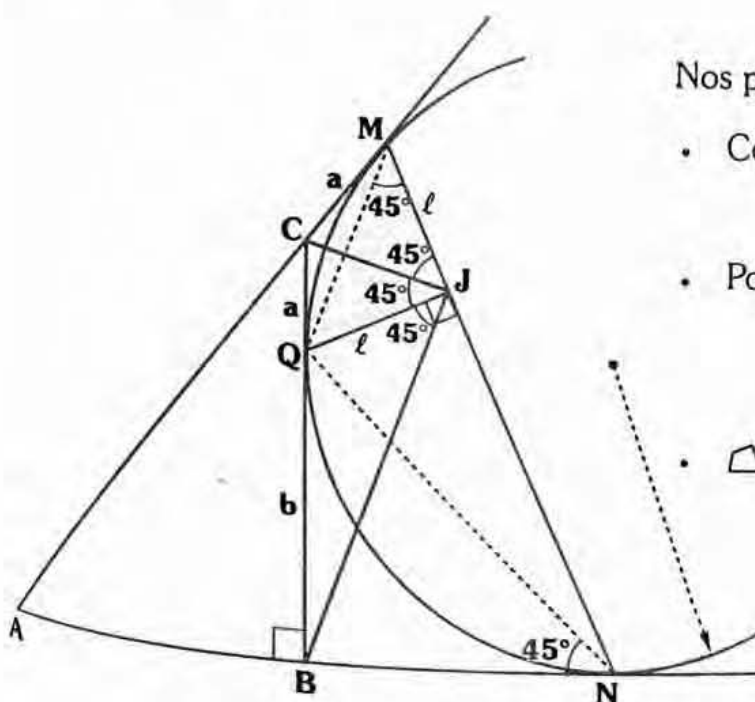
Piden "x" en función de "a" y "b".

- La prolongación de $\overline{TP}$ es tangente a $\mathcal{C}_2$ en S entonces $PQ = PS = a$.
- Como $NT = NJ = l$ y $NH = NS \Rightarrow x + l = l + b + a$

$$\therefore x = a + b$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 88



Nos piden $m\angle CJB$

- Como $\triangle BQJN$ es inscriptible entonces:

$$m\angle QJB = 45^\circ$$

- Por $\angle$ inscrito:

$$m\angle QMN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow QJ = JM$$

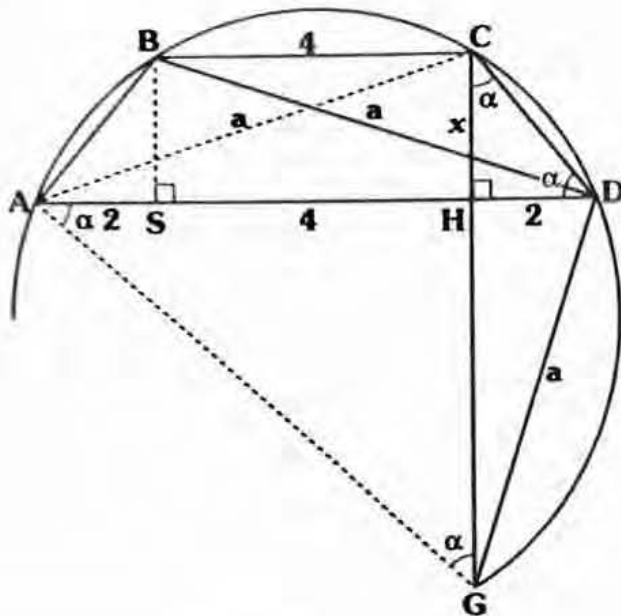
- $\triangle QCMJ$: Trapezoide simétrico

$$\Rightarrow m\angle QJC = m\angle CJM = 45^\circ$$

$$\therefore m\angle CJB = 90^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 89



Nos piden "x".

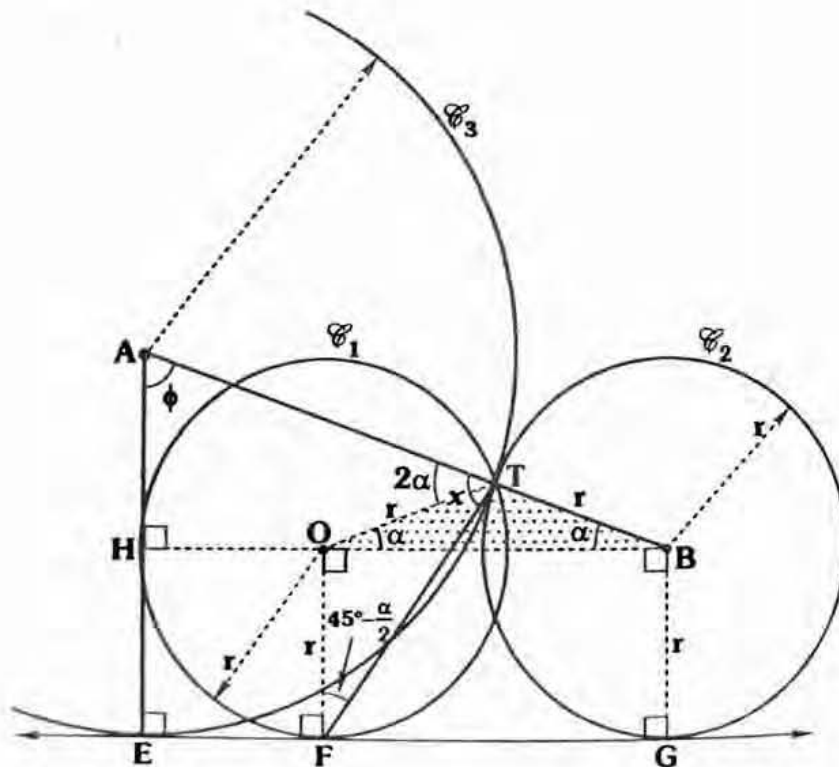
- Como el trapecio ABCD está inscrito entonces ABCD es un trapecio isósceles entonces $AC=BD$.
- Luego $AC=DG \Rightarrow \overline{AG} \parallel \overline{CD}$ entonces ACDG es también trapecio isósceles

$$\Rightarrow m\angle HCD = m\angle HDC$$

$$\therefore x = 2$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 90



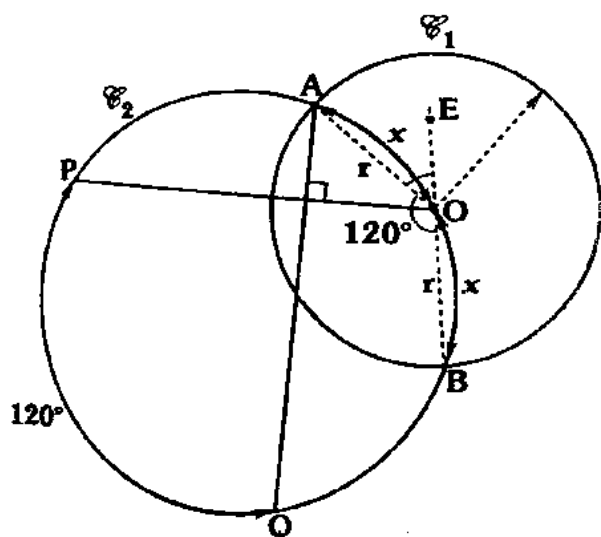
Nos piden "x" en función de ϕ .

- Como dos circunferencias son congruentes y $\phi \neq 90^\circ$ entonces $C_1 \cong C_2$.

- $\triangle OTB$ y $\triangle OTF$: isósceles
- $FOBG$: rectángulo entonces:
 $\Rightarrow m\angle FOB = 90^\circ$
- En $\triangle FOT$: $m\angle OTF = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$
- $x = 2\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + \frac{3}{2}\alpha$
- Como $\alpha + \phi = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \phi$
 $\therefore x = 180^\circ - \frac{3}{2}\phi$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 91



Nos piden $m\widehat{AB}$

- Como $OB = OA \Rightarrow m\widehat{OB} = m\widehat{OA} = x$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x + 120}{2} = 90^\circ$$

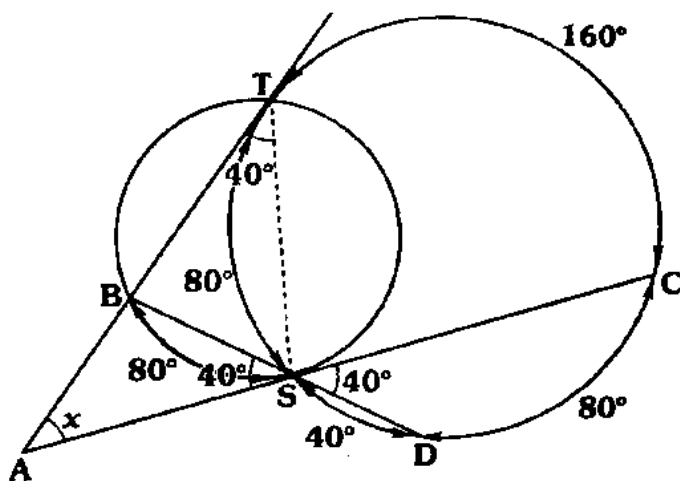
$$\Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle AOE = 60^\circ$$

$$\therefore m\widehat{AB} = 120^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 92



Nos piden "x".

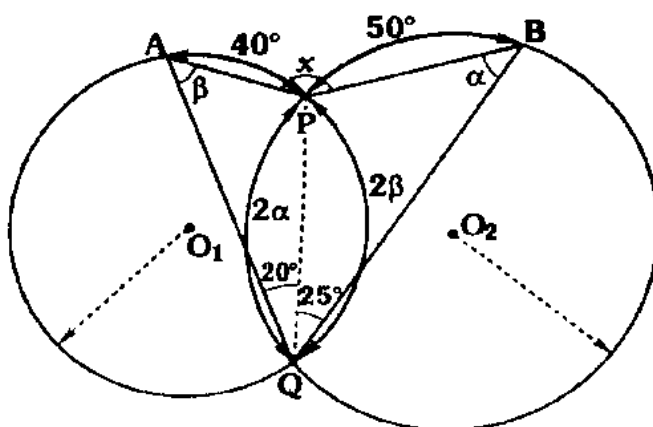
- Por ángulo inscrito:
 $m\angle CSD = 40^\circ \Rightarrow m\angle BSA = 40^\circ$
 $m\widehat{BS} = 80^\circ \Rightarrow m\widehat{TS} = 80^\circ \Rightarrow m\widehat{TC} = 160^\circ$
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{160^\circ - 80^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 93



Nos piden "x"

Dato: $2\alpha + 2\beta = 110^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 55^\circ$

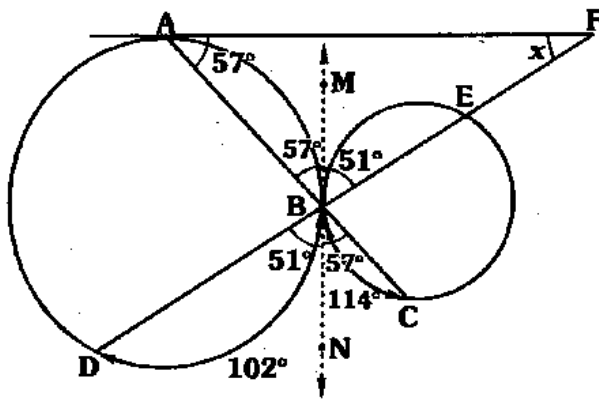
• En $\triangle AQB$:

$$x = \underbrace{\alpha + \beta}_{55^\circ} + 20^\circ + 25^\circ$$

$\therefore x = 100^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 94



Nos piden "x".

• Se traza la tangente en B

$\Rightarrow m\angle MBA = m\angle FAB = 57^\circ$ y

$m\angle DBN = m\angle MBE = 51^\circ$

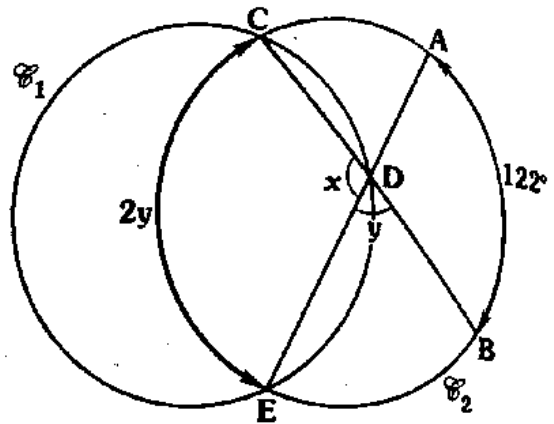
• En $\triangle ABF$:

$x + 57^\circ + 57^\circ + 51^\circ = 180^\circ$

$\therefore x = 15^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 95



• Nos piden "x".

• Dato: $C_1 \cong C_2$

• Sea $m\angle EDB = y \Rightarrow m\widehat{CDE} = 2y$

• Como $C_1 \cong C_2 \Rightarrow m\widehat{CDE} = m\widehat{CE} = 2y$

• Por ángulo interior:

$$x = \frac{2y + 122^\circ}{2} \Rightarrow x - y = 61^\circ$$

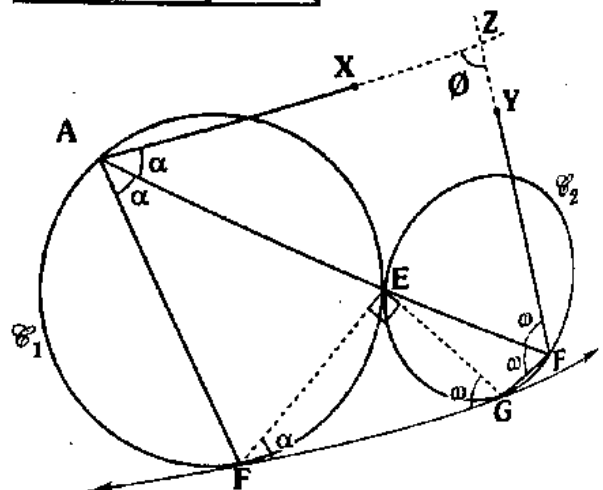
• Como:

$x + y = 180^\circ$

$\therefore x = 120,5^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 96



Nos piden " ϕ ":

• Por propiedad:

$$m\angle FEG = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \omega = 90^\circ$$

• En $\triangle AZB$:

$$\alpha + \omega + \phi = 80^\circ$$

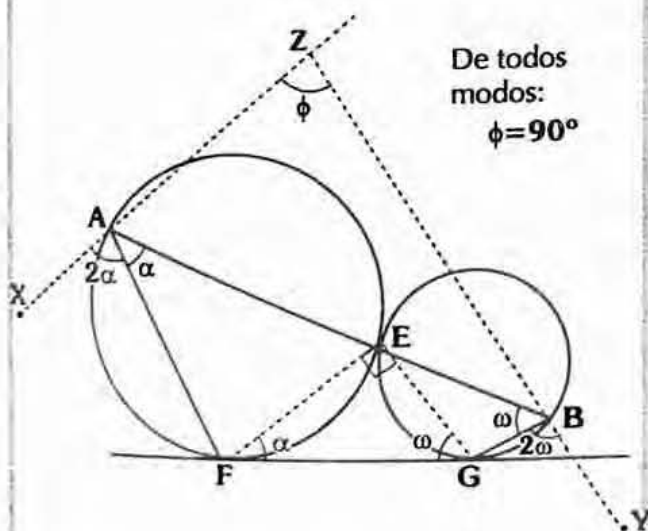
$$\therefore \phi = 90^\circ$$

Clave D



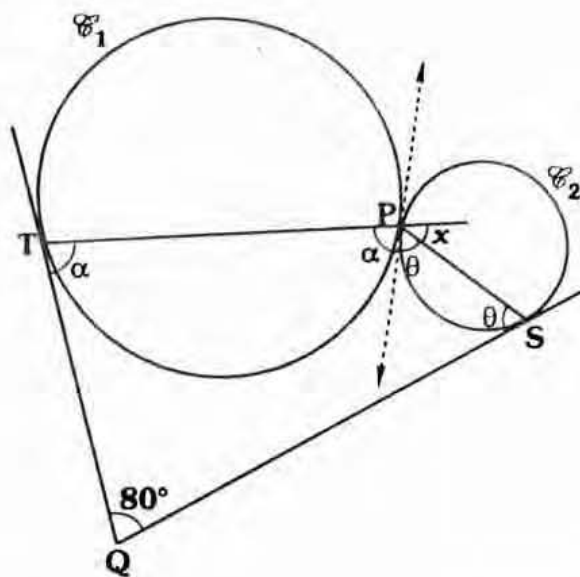
• El gráfico, también puede ser así:

De todos modos:
 $\phi = 90^\circ$



• Cuando $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$ están a uno y otro lado respecto de $\overline{AB}$ entonces " ϕ " no está definido.

RESOLUCIÓN N° 97



Nos piden " x ".

• Se traza la tangente común en P

$$\Rightarrow x + \theta + \alpha = 180^\circ$$

• En el $\triangle QTPS$:

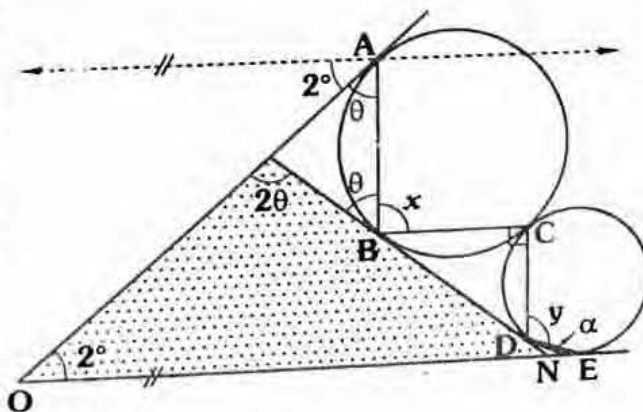
$$2\alpha + 2\theta + 80^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 140^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 98



Nos piden $x+y$

- Por A se traza la paralela a $\overline{OE}$

$$\Rightarrow x+y = 2^\circ + 0 + 90^\circ + \alpha$$

$$x+y = 92^\circ + 0 + \alpha \quad \dots (I)$$

- En $\triangle OMN$: $2\theta + 2\alpha + 2^\circ = 180^\circ$

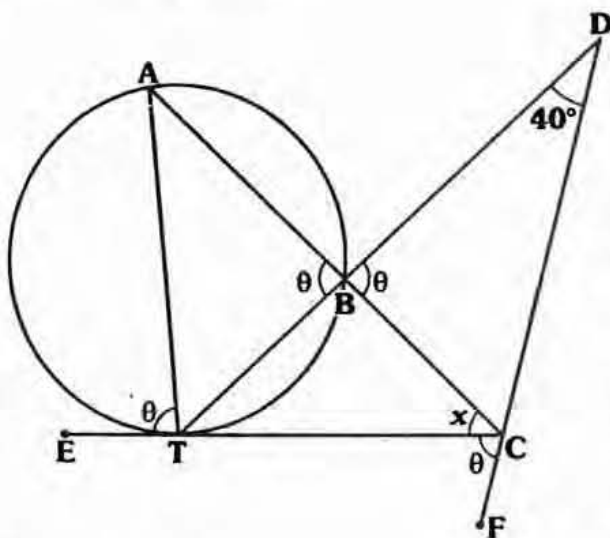
$$\theta + \alpha = 89^\circ \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$x+y = 181^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 99



Nos piden " x ".

- Como:

$$m\angle ATE = \theta \Rightarrow m\angle TBA = \theta$$

$$\Rightarrow m\angle CBD = \theta$$

- En $\triangle CBD$:

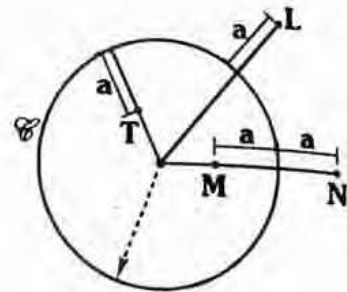
$$x + \theta = 40^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave B

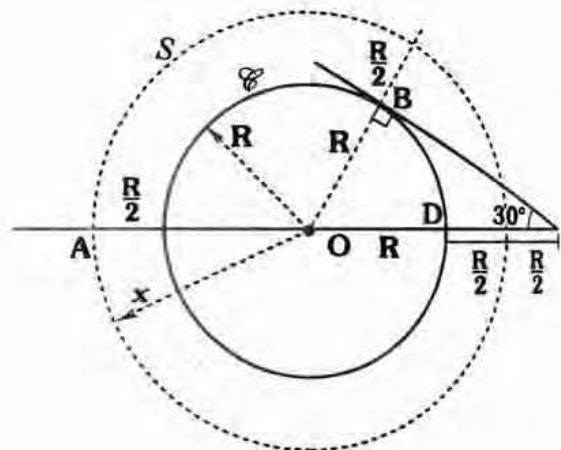
RESOLUCIÓN N° 100

Considerando:



Los puntos: T, L, M y N equidistan de φ .

- En el problema:

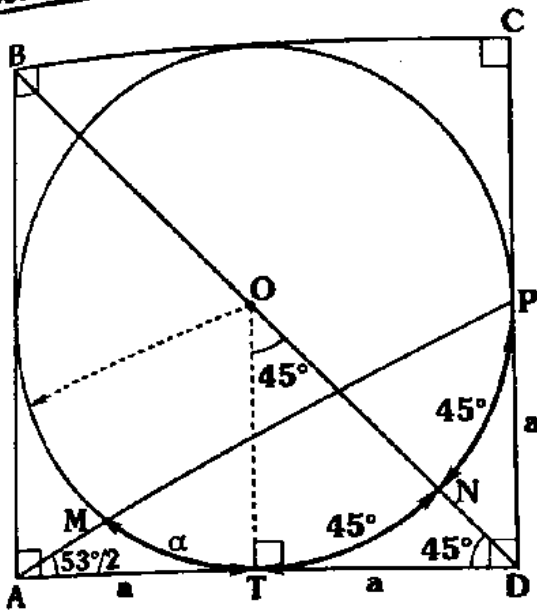


- La circunferencia S es la circunferencia pedida, pues equidista de A, B, C y D y su centro es O y radio:

$$x = R + \frac{R}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}R$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 101

Nos piden: $m\overline{MN}$

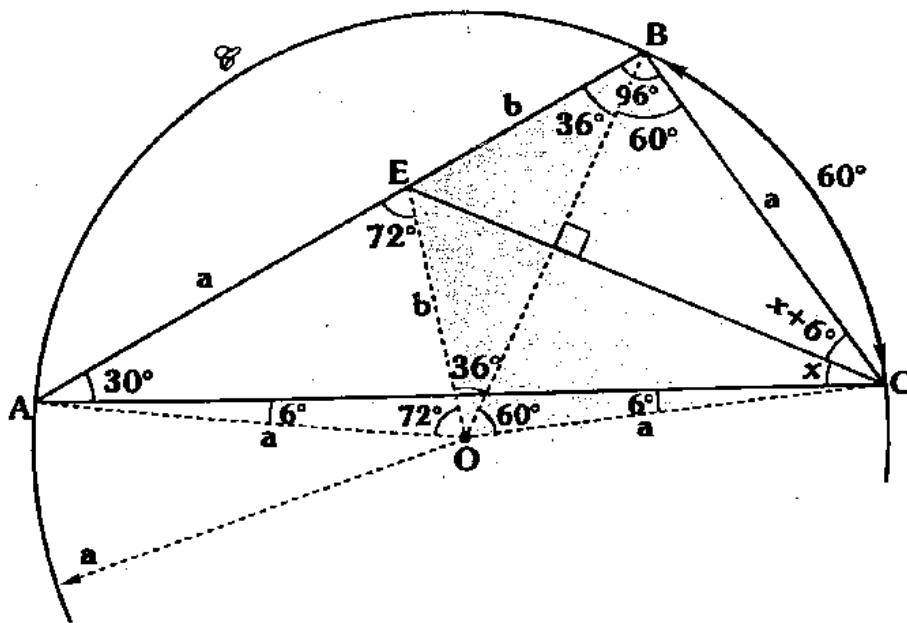
- $\angle ADP$: notable de $53^\circ/2$
- Como $m\widehat{NT} = m\widehat{NP} = 45^\circ$ entonces por ángulo exterior:

$$\frac{53^\circ}{2} = \frac{90^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 37^\circ$$

$$\bullet \quad m\widehat{MN} = \alpha + 45^\circ$$

$$\therefore \widehat{m\text{MN}} = 82^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 102

Nos piden “x”.

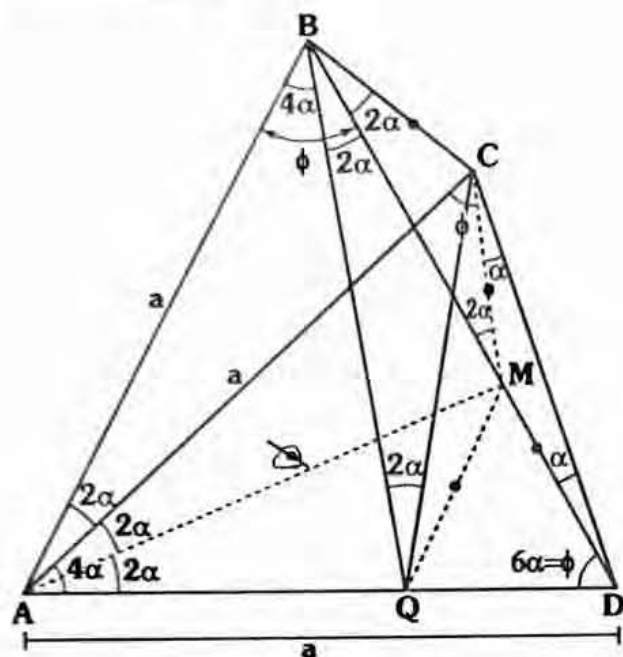
- Se traza la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, cuyo centro es O, como $m\angle BAC = 30^\circ$ entonces: $m\widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ es equilátero
- $\triangle AEO$: isósceles entonces: $m\angle AEO = m\angle AOE = 72^\circ \Rightarrow \triangle OEB$: isósceles ($OE = EB$)
- $\triangle OEC$: trapezoide simétrico, entonces: $m\angle OCE = m\angle ECB = x + 6^\circ$

$$2x + 12^\circ = 60$$

$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 103



- Luego: $\phi = 6\alpha$, en el $\triangle ABD$: equilátero $\Rightarrow 6\alpha = 60^\circ$

Nos piden " α ":

- Se traza $\overline{AM}$, bisectriz del $\angle CAD$ (M en $\overline{BD}$) entonces $\triangle ABCM$: inscriptible

$$\Rightarrow m\angle ACM = m\angle ABM = \phi$$

- $\triangle ACM \cong \triangle ADM$ entonces $AC = AD$ y $CM = MD$ entonces $\triangle BCMQ$: inscriptible.

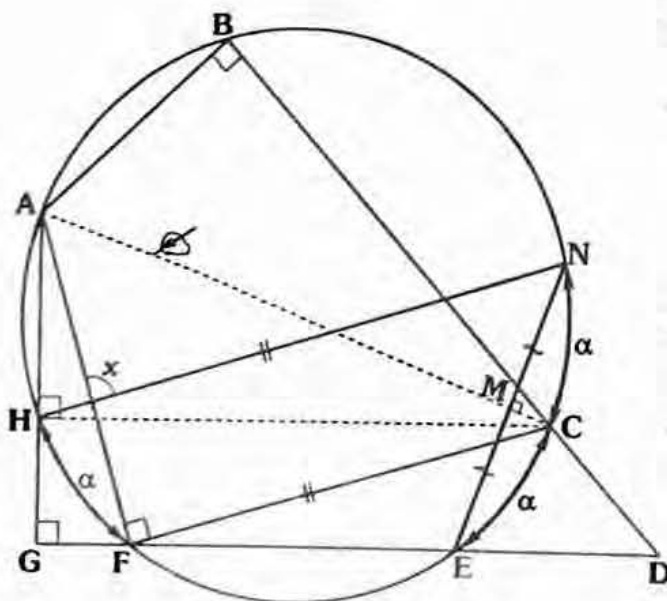
- Luego los puntos A, B, C, M y Q son concíclicos

$$\Rightarrow m\angle QBM = 2\alpha$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 104



Nos piden " x ":

- Como $m\angle ABC = 90^\circ$ entonces $\overline{AC}$ es diámetro

$$\Rightarrow m\angle AFC = 90^\circ$$

- También $m\widehat{NC} = m\widehat{CE}$ y $NM = ME$ entonces C, M y A son colineales.

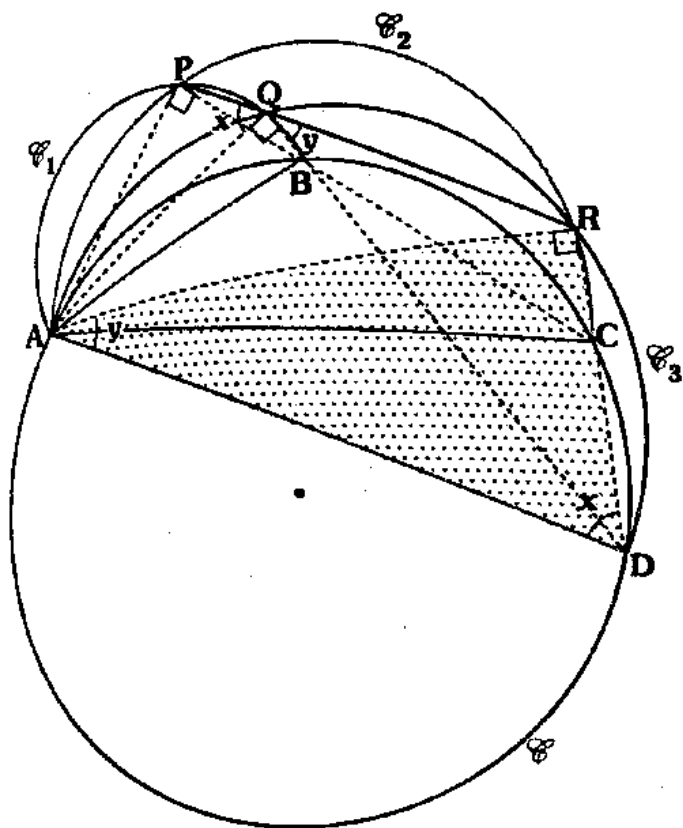
- Como:

$$m\widehat{HF} = m\widehat{NC} \Rightarrow \overline{HN} \parallel \overline{FC}$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 105



En $\mathcal{C}_1$: $m\angle APB = 90^\circ$
 En $\mathcal{C}_2$: $m\angle APC = 90^\circ$ } P, B y C: colineales

En $\mathcal{C}_1$: $m\angle AQB = 90^\circ$
 En $\mathcal{C}_3$: $m\angle AQD = 90^\circ$ } Q, B y D: colineales

En $\mathcal{C}_2$: $m\angle ARC = 90^\circ$
 En $\mathcal{C}_3$: $m\angle ARD = 90^\circ$ } R, C y D: colineales

• Sea $m\angle AQP = x$ y $m\angle DQR = y$

• En $\triangle AQRD$:

$$m\angle ADR = x$$

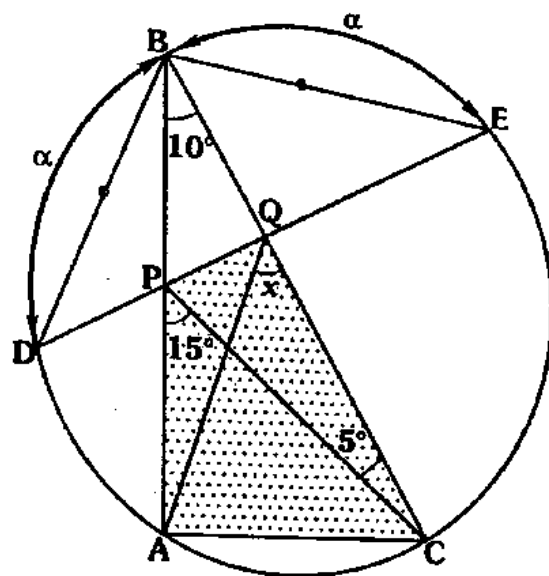
$$m\angle RAD = y$$

• En $\triangle ARD$: $x + y = 90^\circ$

$\therefore$ P, Q y R: colineales

Clave C

RESOLUCIÓN N° 106



Nos piden "x".

• Como $BD = BE \Rightarrow m\widehat{BD} = m\widehat{BE}$

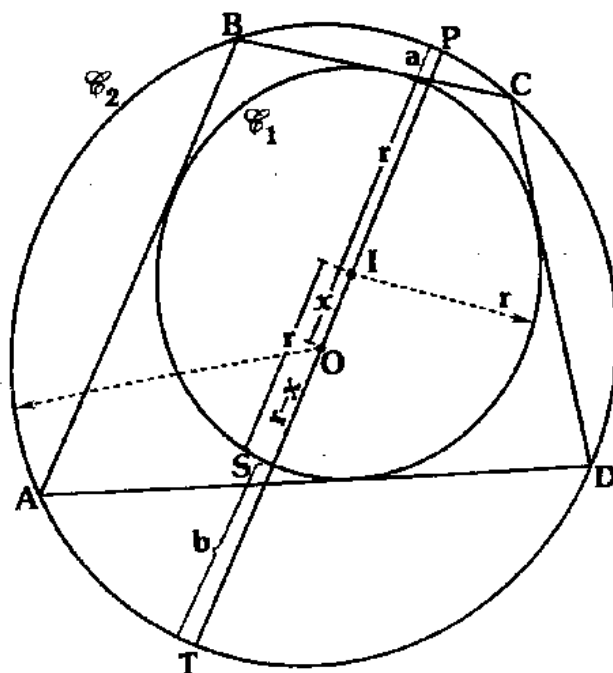
$\Rightarrow$ el $\triangle APQC$ es inscriptible

• Luego: $m\angle APC = m\angle AQC$

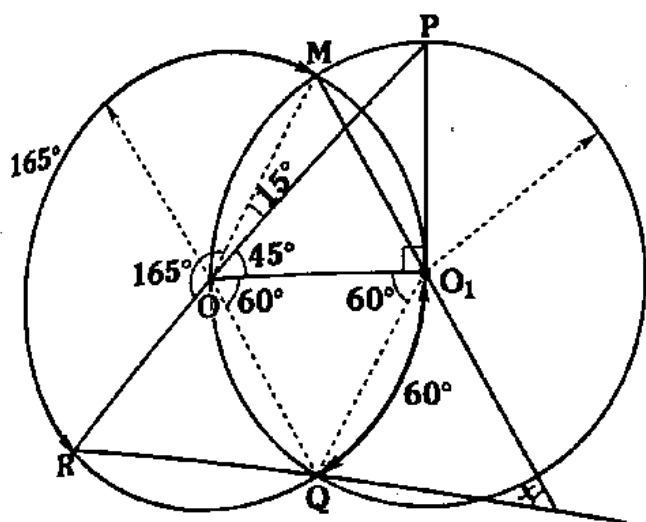
$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 107



RESOLUCIÓN N° 109



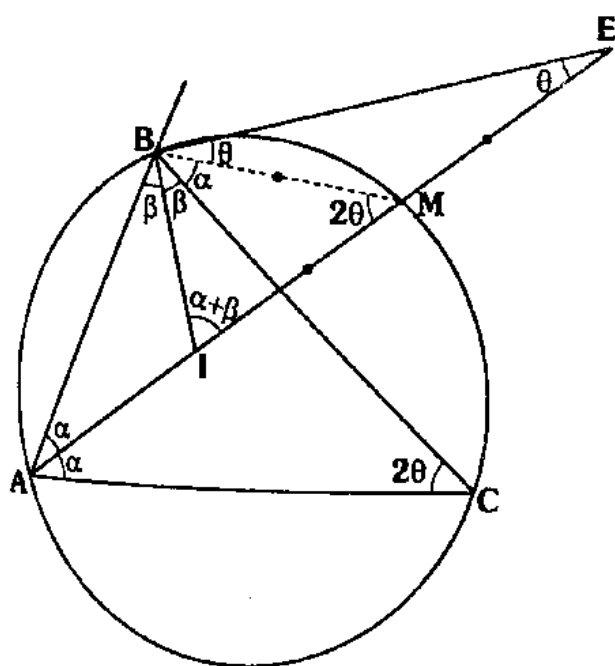
Nos piden "x".

- Notemos que los triángulos OMO_1 y OQO_1 son equiláteros.
- $\angle OO_1P$: notable de 45°
- $m\angle MOP = 60^\circ - 45^\circ \rightarrow m\angle MOP = 165^\circ$
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{165^\circ - 60^\circ}{2} = 52,5^\circ$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 110



Por demostrar: $IM = ME$

- Donde I es incentro del $\triangle ABC$ y E es excentro relativo a $\overline{BC}$.
- Sea $m\angle ACB = 2\theta$ entonces por teorema:

$$m\angle AEB = \theta$$

- Como:

$$m\angle AMB = m\angle ACB = 2\theta$$

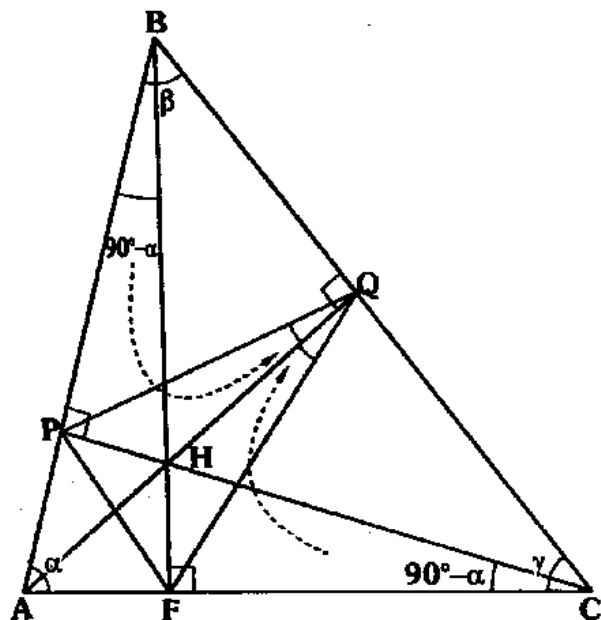
$$m\angle MBE = \theta \Rightarrow MB = ME \quad \dots (I)$$

- $\triangle IMB$: isósceles $\Rightarrow MB = MI \quad \dots (II)$

De (I) y (II):

$$ME = MI$$

RESOLUCIÓN N° 111



Por demostrar:

A) $m\angle PQF = 180^\circ - 2\alpha$

B) $m\angle PFQ = 180^\circ - 2\beta$

C) $m\angle QPF = 180^\circ - 2\gamma$

- Los tres casos son similares, notemos que los cuadrilateros PBQH y FHQC son inscriptibles:

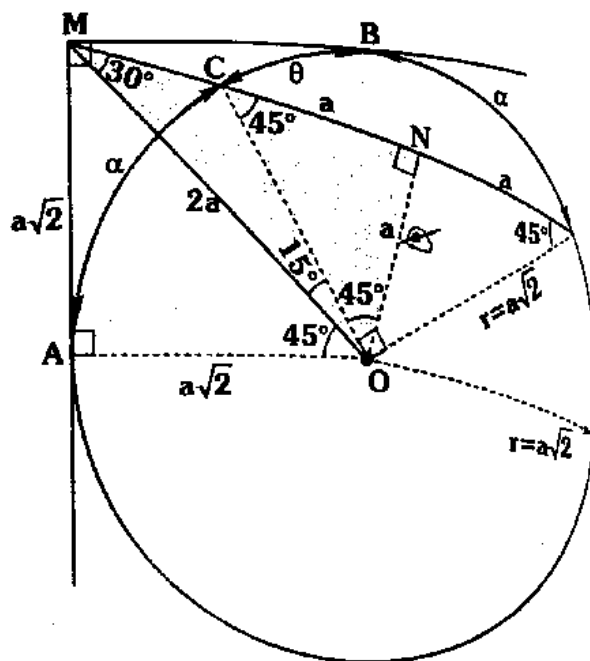
$$\Rightarrow m\angle PQH = m\angle PBH = 90^\circ - \alpha$$

$$m\angle HQF = m\angle FCH = 90^\circ - \alpha$$

$$\therefore m\angle PQF = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

- Los demás casos se prueban análogamente.

RESOLUCIÓN N° 112



Nos piden: " α "

- Como $m\widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$

$$\Rightarrow m\angle COD = 90^\circ$$

- En $\triangle COD$: notable de 45° , se traza la altura ON entonces $CN = NO = ND$.

$$\Rightarrow r = a\sqrt{2}$$

- En $\triangle OAM$: $OM = 2a$

- Se verifica que el $\triangle MNO$ es notable de 30°

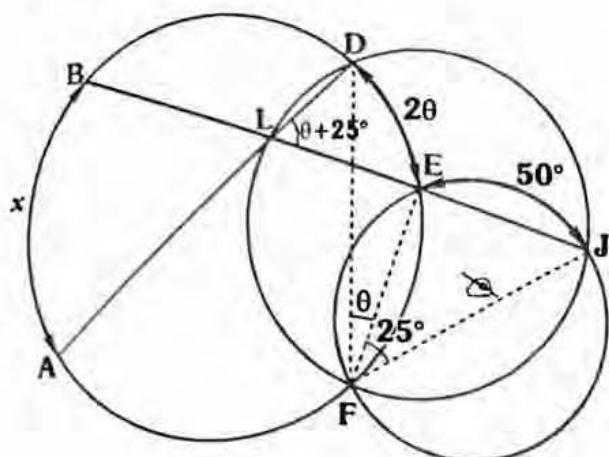
- Notamos que:

$$m\angle MOC = 15^\circ$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

Clave D

Nos piden "x".



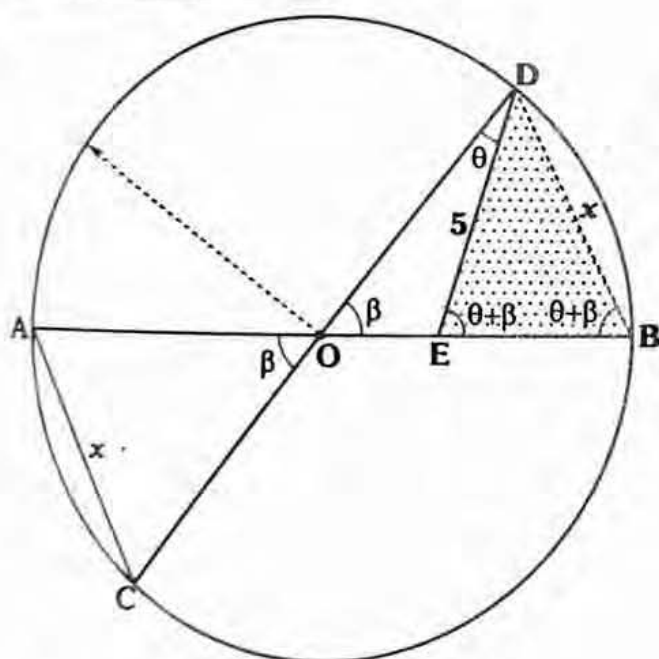
- Por ángulo inscrito: $m\angle EFJ = 25^\circ$
- Sea $m\angle DFE = \theta \Rightarrow m\angle DFJ = \theta + 25$
- Como $m\angle DLJ = m\angle DFJ = \theta + 25^\circ$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x+2\theta}{2} = \theta + 25^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave **A**

Nos piden “ x ”.



Dato: $2\theta + 3\beta = 180^\circ$

- $\triangle AOC \cong \triangle BOD \Rightarrow BD = x$
- En $\triangle DOB$, como $m\angle DOB = \beta$
 $\Rightarrow m\angle OBD = m\angle ODB = \theta + \beta$
- Luego notamos que el $\triangle EDB$ es isósceles:

$$\therefore x = 5$$

Clave D

Nos piden "x".

- Se ubica M en $\overline{CD}$ talque:

$$m\angle CAM = 30^\circ \Rightarrow \triangle MAC \cong \triangle BAC \\ \Rightarrow AB = AM$$

- Luego el $\triangle MAB$ es equilátero
 $\Rightarrow m\angle ABM = 60^\circ$

- $\triangle DABM$ es inscriptible pues:
 $m\angle ADL = m\angle ABM$

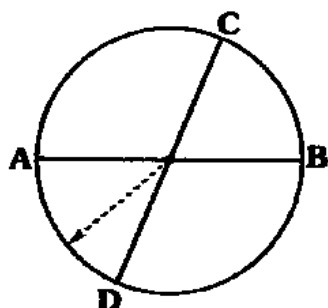
$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave D

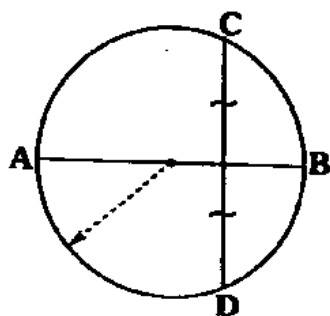
RESOLUCIÓN N° 116

I) FALSO

Es que un diámetro también es cuerda

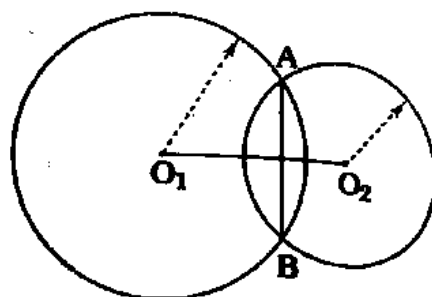


- $\overline{AB}$: biseca a $\overline{CD}$ diámetro y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son perpendiculares

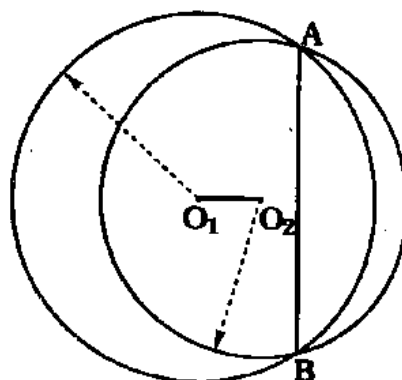


- Si $\overline{CD}$ no es diámetro y $\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CD}$

II) FALSO



$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ son secantes.



$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ no son secantes.

III) VERDADERO

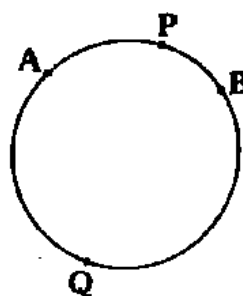
Como el centro equidista de los extremos del segmento entonces pertenece a la mediatriz de la cuerda.

Clave D

RESOLUCIÓN N° 117

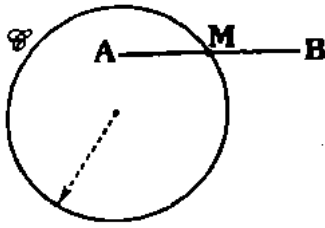
I) FALSO

Dos puntos determinan dos arcos



Los arcos determinados son:
 $\widehat{APB}$ y $\widehat{AQB}$

II) FALSO

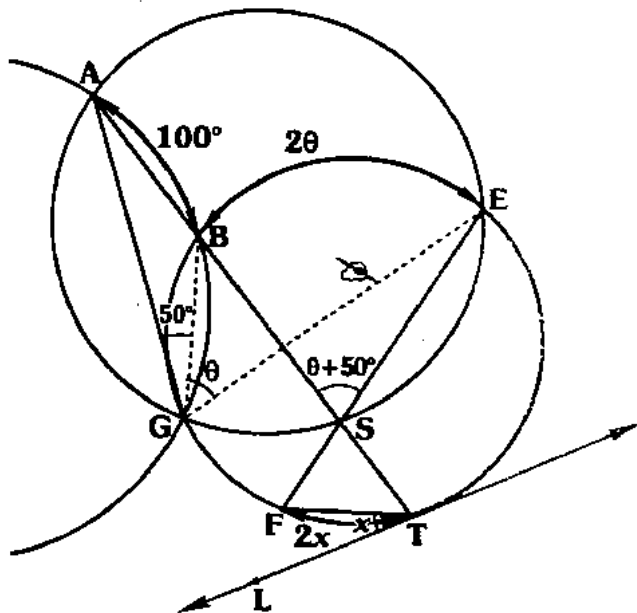


$$C \cap \overline{AB} = \{M\}$$

Notamos que la intersección es un solo punto.

III) FALSO

Las circunferencias pueden ser también interiores.

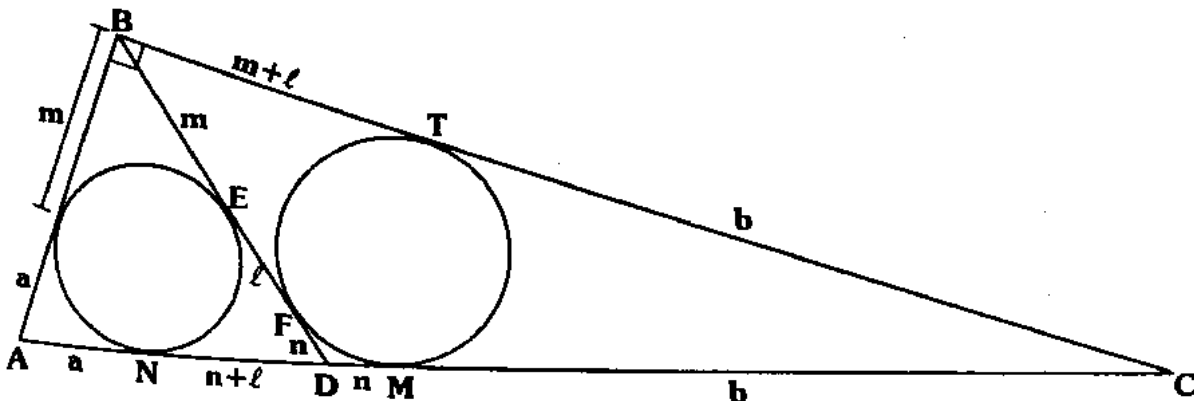
Clave D**RESOLUCIÓN N° 118**

Piden: "x"

- Como $m\angle LTF = x \Rightarrow m\widehat{FT} = 2x$
- Sea $m\angle BGE = \theta \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\theta$
- Como $m\angle AGE = m\angle ASE = \theta + 50^\circ$
- Por ángulo interior:

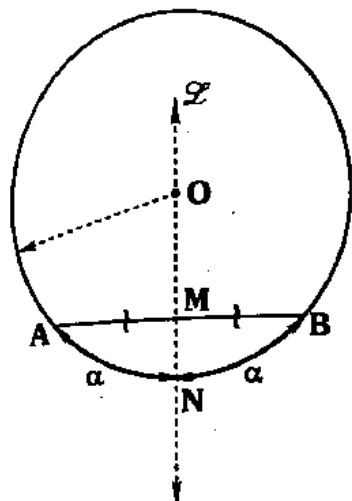
$$\theta + 50^\circ = \frac{2x + 2\theta}{2}$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 119**

RESOLUCIÓN N° 121

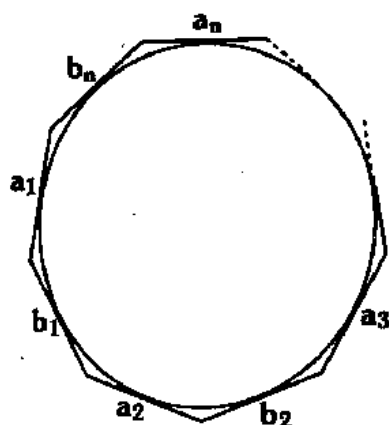
I) VERDADERO



Se cumple: O, M y N son colineales

II) VERDADERO

En todo polígono circunscrito de número par de lados, se cumple:



Se cumple:

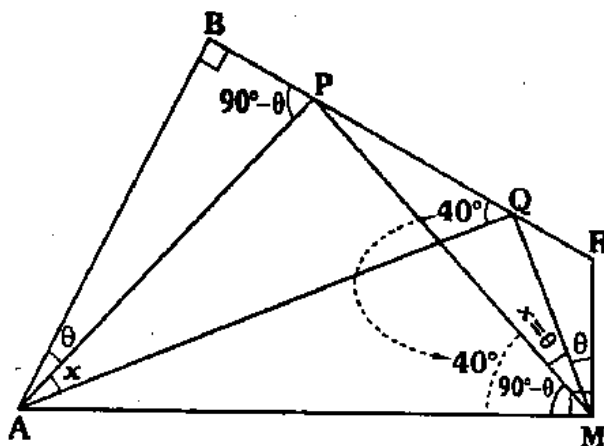
$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

III) FALSO

Solamente son inscriptibles, el rectángulo y el cuadrado.

Clave C

RESOLUCIÓN N° 122



Piden "x".

• Como: $m\angle APB = m\angle AMQ = 90^\circ - \theta$

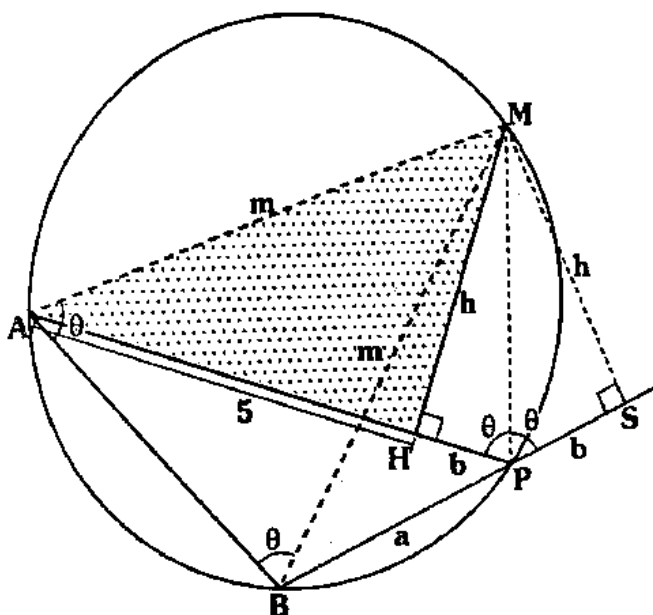
$\Rightarrow \triangle APQM$ es inscriptible $\Rightarrow x = 0$

• En M: $2x + 40^\circ = 90^\circ$

$\therefore x = 25^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 123



Piden: $a + b$

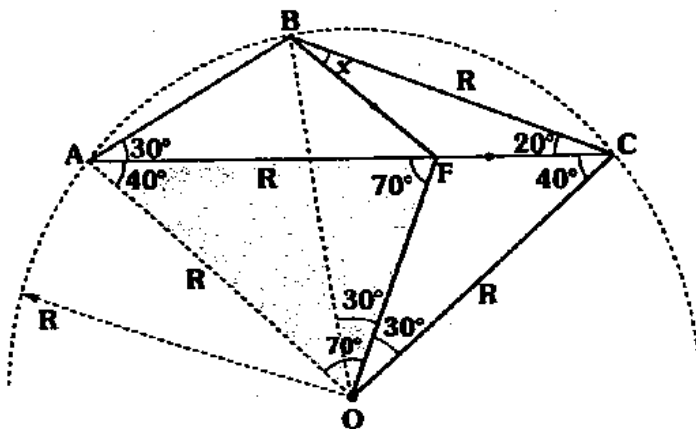
• Como $m\widehat{AM} = m\widehat{BM} \Rightarrow AM = MB$

- También notemos que $\overline{PM}$ es bisectriz del $\angle APS$ entonces $PH=PS$.
- $\angle AHM \equiv \angle BSM$

$$\Rightarrow a+b=5$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 124



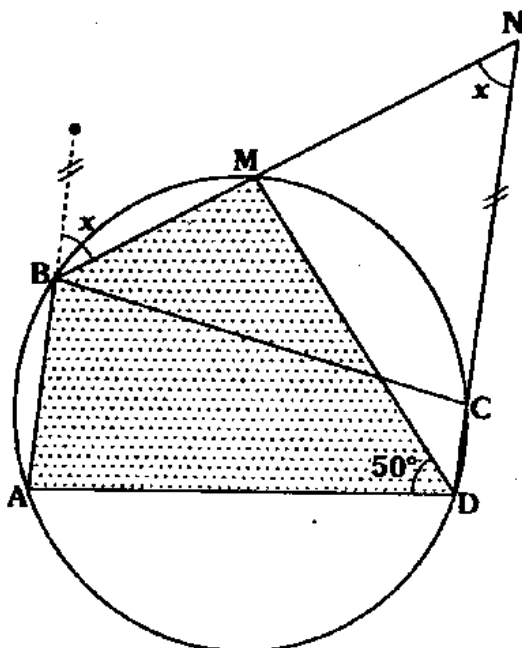
Nos piden "x".

- Se traza parte de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ de centro O.
- $\triangle BOC$: equilátero y $\triangle AOF$: isósceles
- $\Rightarrow m\angle OFA = 70^\circ \Rightarrow m\angle FOC = 30^\circ$
- En el $\triangle BOC$:
como $m\angle BOF = m\angle FOC = 30^\circ$, entonces: $FB=FC$

$$\therefore x=20^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 125



Nos piden x.

- Como $\overline{AB} \parallel \overline{DN} \Rightarrow m\angle SBM = x$
- En el $\triangle ABMD$:

$$x=50^\circ$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 126

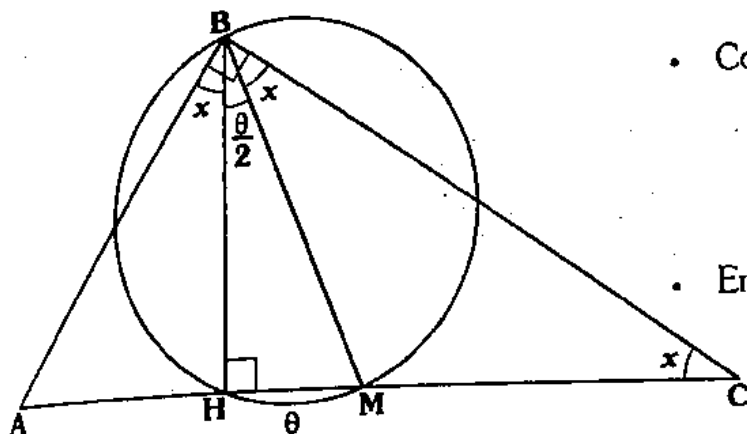
Nos piden x .

- Como M es punto medio de

$$\overline{AC} \Rightarrow AM = MC = BM$$

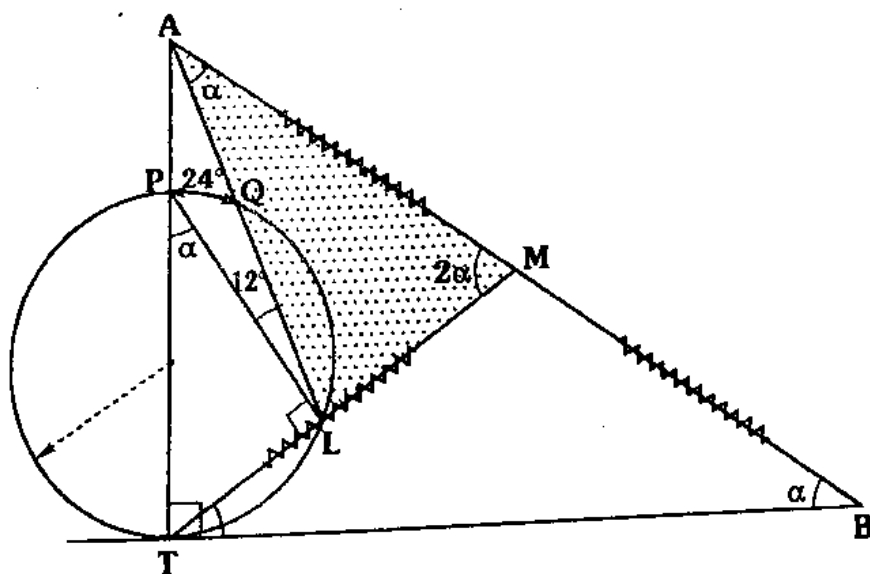
- En B: $2x + \frac{\theta}{2} = 90^\circ$

$$\therefore x = 45^\circ - \frac{\theta}{4}$$



Clave E

RESOLUCIÓN N° 127



Nos piden α .

- Como M es punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow AM = MC = TM$

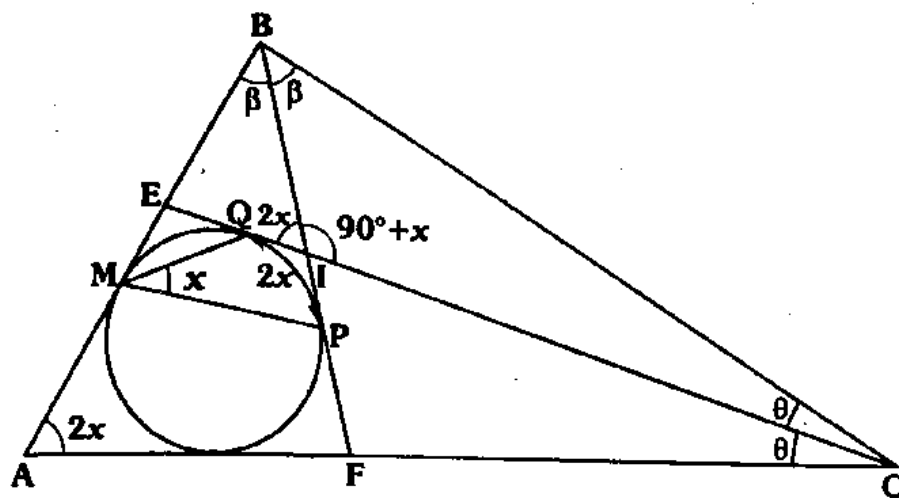
- $\triangle TMB$: isósceles.

- En $\triangle ALM$: $\alpha + 2\alpha = 90^\circ + 12$

$$\therefore \alpha = 34^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 130



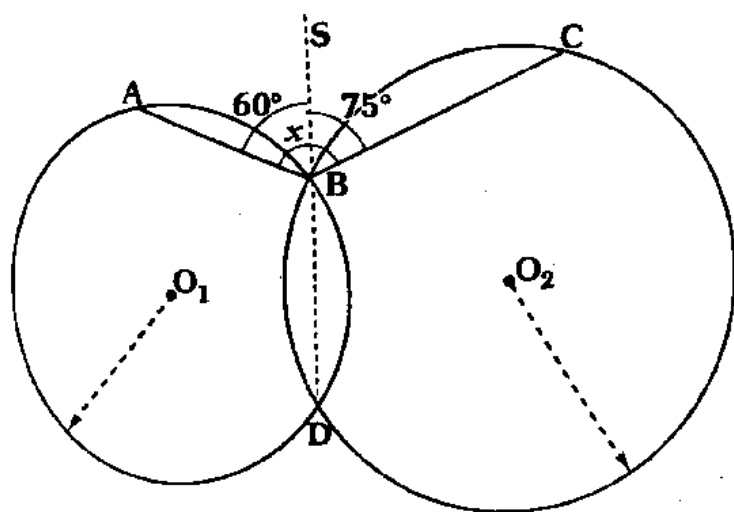
Nos piden $m\angle BIC$

- Por propiedad en el $\triangle ABC$: $m\angle BIC = 90^\circ + x$
- Como $m\angle QMP = x \rightarrow m\widehat{QP} = 2x \rightarrow m\angle QIB = 2x$
- En I: $2x + 90^\circ + x = 180^\circ \rightarrow x = 30^\circ$

$$\therefore m\angle BIC = 120^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 131



Nos piden x .

- Datos: $m\widehat{ABD} = 120^\circ$ y

$$m\widehat{CBD} = 150^\circ$$

- Por ángulo exinscrito:

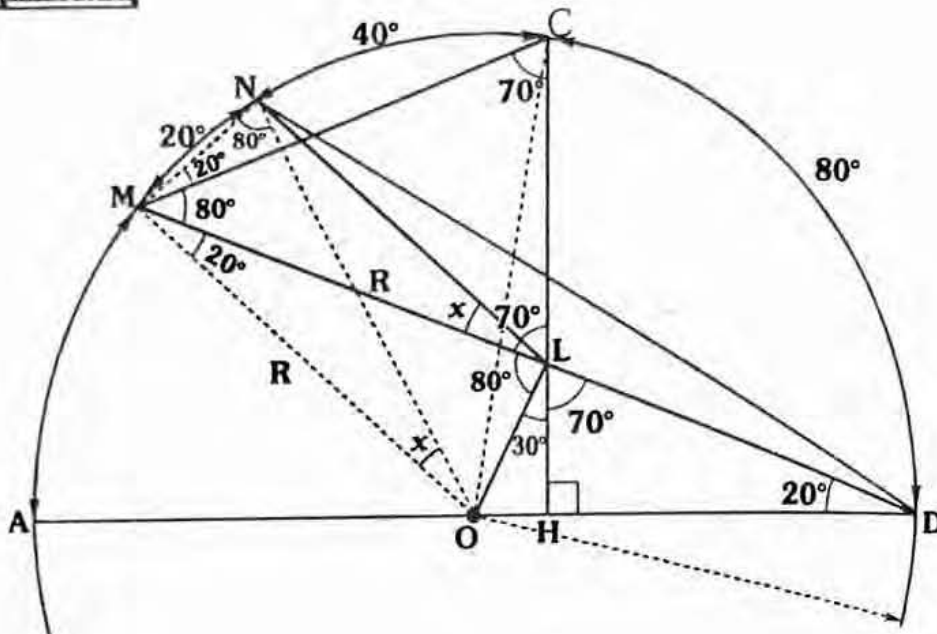
$$m\angle ABS = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \quad y$$

$$m\angle SBC = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 132

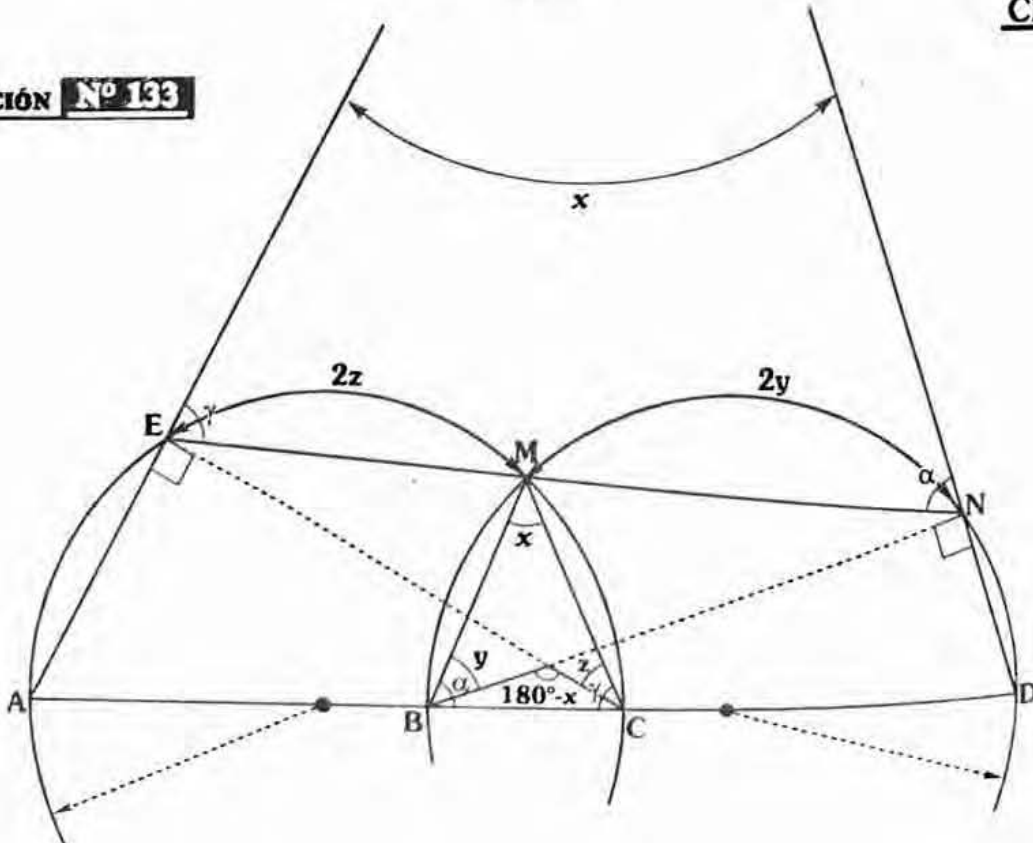


Nos piden x .

- $\triangle AOM$: equilátero
 - $\triangle LMC$: isósceles $\Rightarrow CM = ML = R$
 - $\triangle OML$: isósceles $\Rightarrow m\angle NLM = m\angle NOM = x$
- $\therefore x = 20^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 133



Nos pide x .

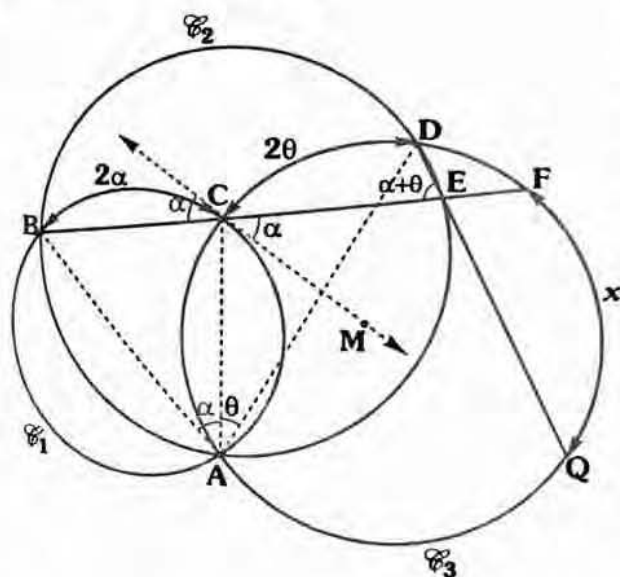
- Dato $2z + 2y = \theta \rightarrow z + y = \frac{\theta}{2}$
- Sea "S" la intersección de las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{DN}$
- Como los $\triangle$ s AEMC y BMND son inscritos
 $\rightarrow m\angle ACM = m\angle NES = \gamma$ y
 $m\angle MBD = m\angle MNS = \alpha$
- En $\triangle ESN$: $m\angle ESN = x$
- En la región sombreada:

$$180^\circ - x = \underbrace{y + z + x}_{\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore x = 90^\circ - \frac{\theta}{4}$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 134



- Demostraremos también que $\overleftrightarrow{CQ}$ es tangente a C_3 .

- Para $\overleftrightarrow{CQ}$ sea tangente a C_3 , vamos a proceder así: se traza la tangente a C_1 en C, se ubica en dicha recta.
- Sea $m\widehat{BC} = 2\alpha \rightarrow m\angle MCF = \alpha$
- Para que la recta pase por Q será suficiente probar que $m\widehat{FQ} = 2\alpha$.
- Por ángulo interior en C_3 :

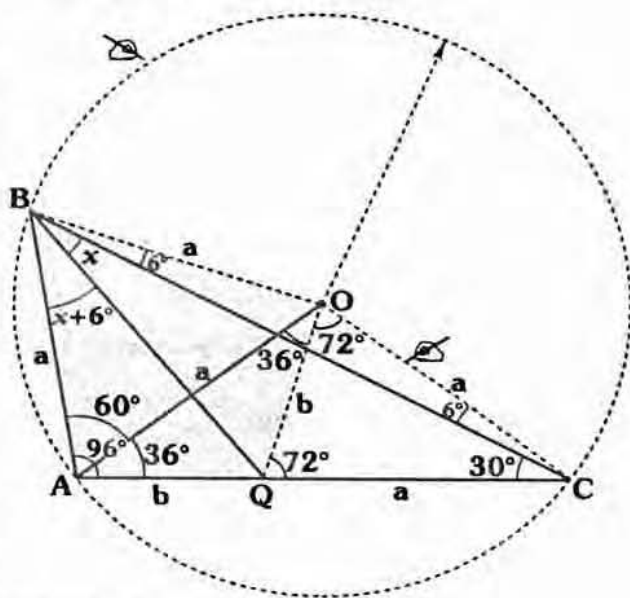
$$\alpha + \theta = \frac{x + 2\theta}{2}$$

$$\rightarrow \alpha = x$$

$$\therefore m\widehat{FQ} = 2\alpha$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 135



- Nos piden x .
- Se traza la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ de centro O y radio a .
- $\triangle ABO$ es equilátero
- Notemos que ABOQ es un trapecioide

simétrico

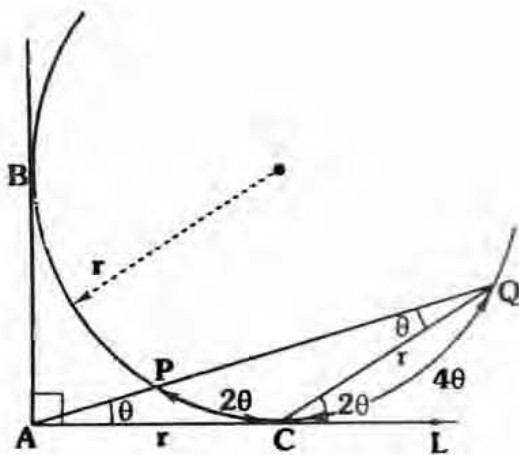
$$\rightarrow m\angle ABQ = m\angle QBO = x + 6$$

$$\rightarrow 2x + 12^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 136



Nos piden $m\angle PAC$

Dato: $m\widehat{CQ} = 2(m\widehat{CP})$

$$\rightarrow m\widehat{CQ} = 4\theta$$

Por ángulo inscrito: $m\angle PQC = \theta$

Por ángulo seminscrito: $m\angle LCQ = 2\theta$

En $\triangle ACQ$: $m\angle QAC = \theta$

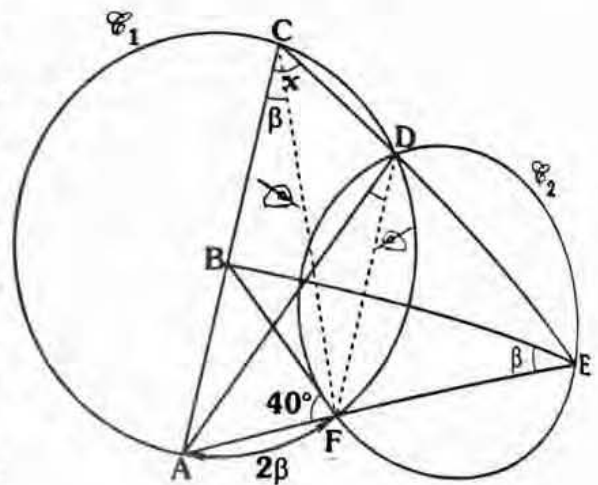
$\triangle ACQ$: isósceles $\rightarrow AC = CQ = r$

Como $CQ = r \rightarrow m\widehat{CQ} = 60^\circ$

$$\therefore \theta = 15^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 137



Nos piden x .

Sea $m\widehat{AF} = 2\beta$

$$\rightarrow m\angle ACF = \beta = m\angle ADF$$

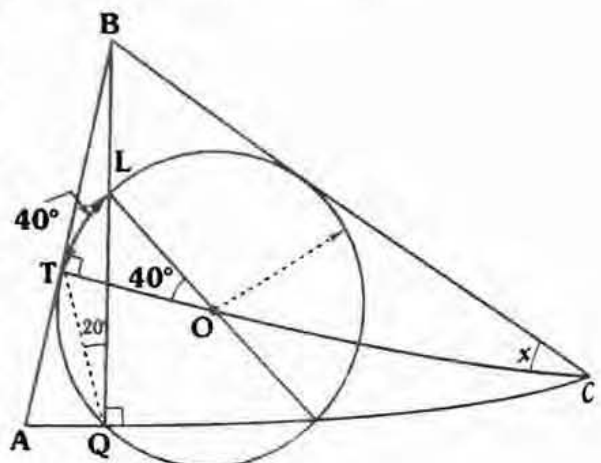
En C_2 : $m\angle FEB = \beta$

Como $m\angle BCF = m\angle BEF \rightarrow \triangle BCF$ es inscriptible

$$x = 40^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 138



Nos piden x .

- Por ángulo central:

$$m\widehat{TL} = 40^\circ$$

- Por ángulo inscrito:

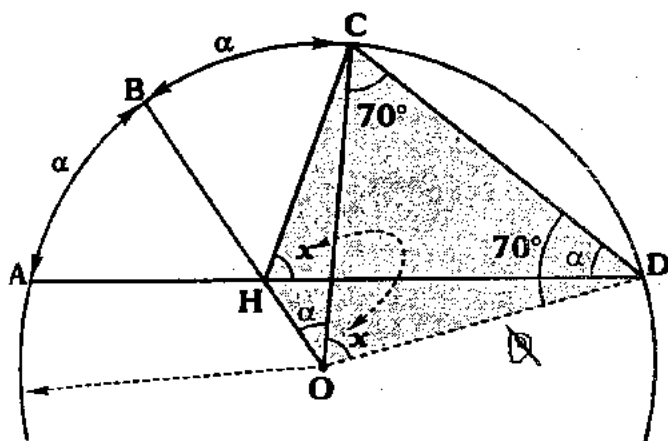
$$m\angle TQB = 20^\circ$$

- $\triangle QTBC$: inscriptible

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 139



Piden x .

- Notemos por ángulo central:

$$m\angle BOC = \alpha$$

y por ángulo inscrito: $m\angle ADC = \alpha$

- $\triangle OHCD$: inscriptible

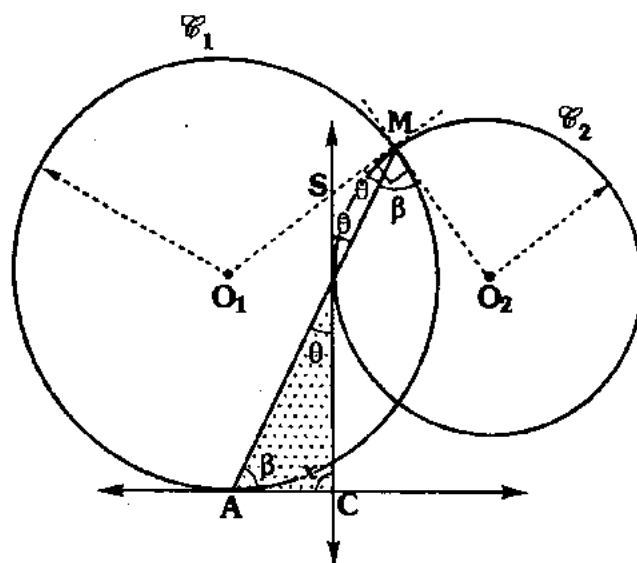
$$\rightarrow m\angle CHD = m\angle COD = x$$

- $\triangle OCD$: isósceles

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 140



Nos piden x .

- Como C_1 y C_2 son ortogonales

$$\rightarrow m\angle O_1MO_2 = 90^\circ$$

- $\overline{O_1M}$ es tangente a C_2 y $\overline{O_2M}$ es tangente a C_1 .

- $m\angle SBM = m\angle SMB = \theta$ y

$$m\angle O_2MA = m\angle CAM = \beta$$

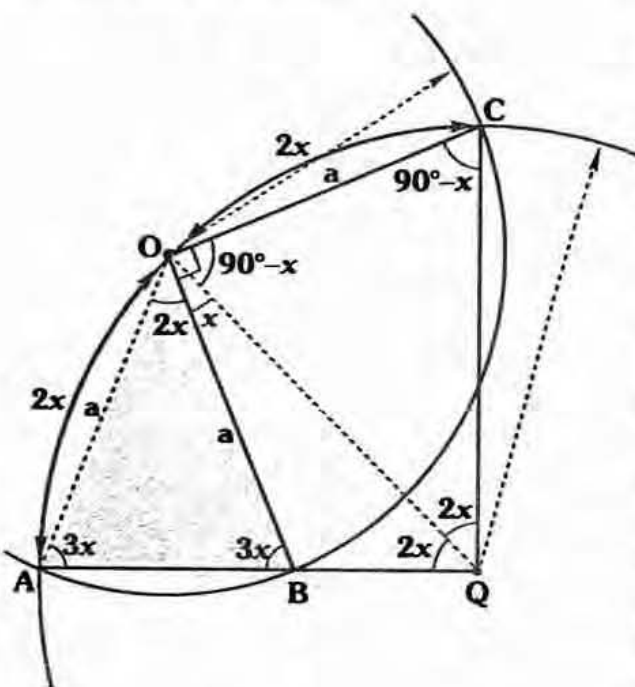
- Como :

$$\theta + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave E

Ciclo **Semestral**

RESOLUCIÓN N° 141

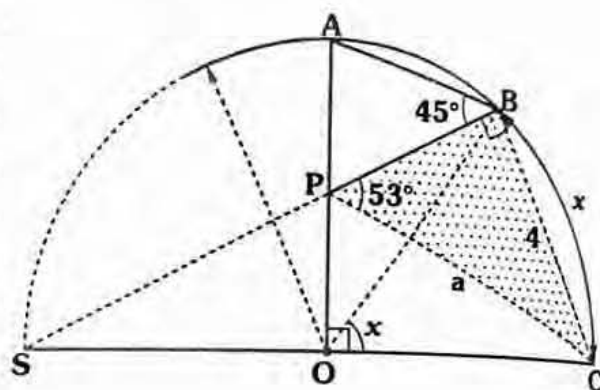
Nos piden $m\widehat{AO}$

- Sea $\widehat{m\text{AO}} = 2x \rightarrow m\angle\text{AQO} = 2x$
- $\triangle\text{AOCQ}$: trapezoide simétrico
 $\rightarrow m\angle\text{OQC} = 2x$
- $\triangle\text{QOC}$: isósceles
 $\rightarrow m\angle\text{QOC} = 90^\circ - x$
- $\triangle\text{AOB}$: isósceles

$$3x + 3x + 2x = 180^\circ$$

$$\therefore 2x = 45^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 142

Piden x .

- Dato: $a \rightarrow$ menor valor entero
- Como $m\angle ABP = 45^\circ \rightarrow$ al prolongar $\overline{PB}$ y completar el arco, tendremos:

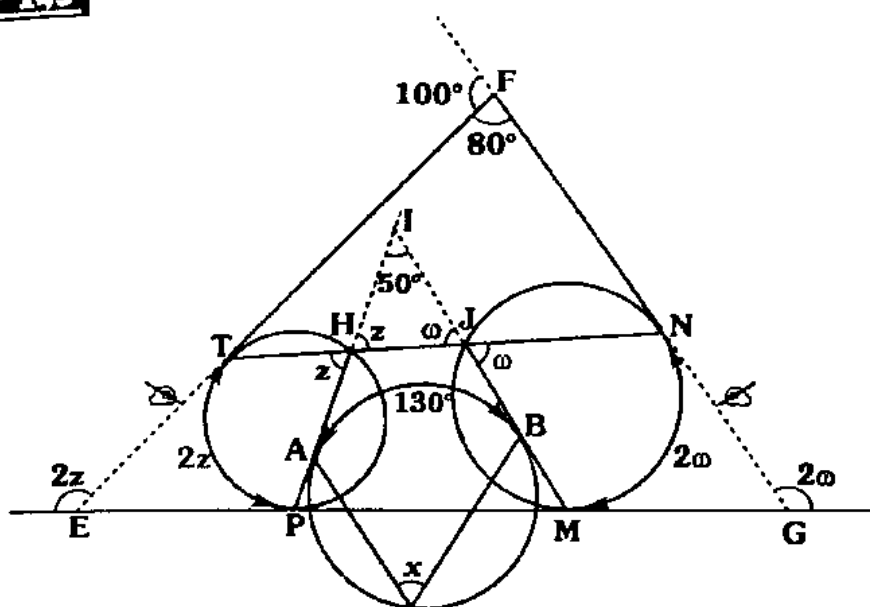
$$m\widehat{AS} = 90^\circ$$

- Luego $m\angle SBC = 90^\circ$
 - En $\triangle PBC$:

$$a > 4 \rightarrow a = 5$$
 - $\triangle PBC$: notable de 53°
 - $\square OPBC$: inscriptible
- $\therefore x = 53^\circ$

Clave A

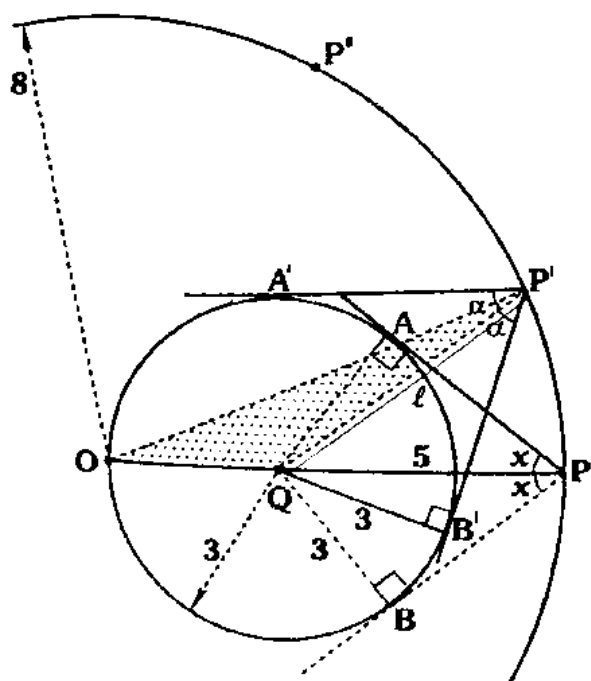
RESOLUCIÓN N° 143



Nos piden x.

- Sea $m\angle THP = z$ y $m\angle MJN = \omega \rightarrow m\widehat{TP} = 2z$ y $m\widehat{MN} = 2\omega$
- En $\triangle EFG$: $2z + 2\omega + 100^\circ = 360^\circ \rightarrow z + \omega = 130^\circ$
- En $\triangle HIJ$: $m\angle HIJ = 50^\circ \rightarrow m\widehat{AB} = 130^\circ$
- $\therefore x = 65^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 144

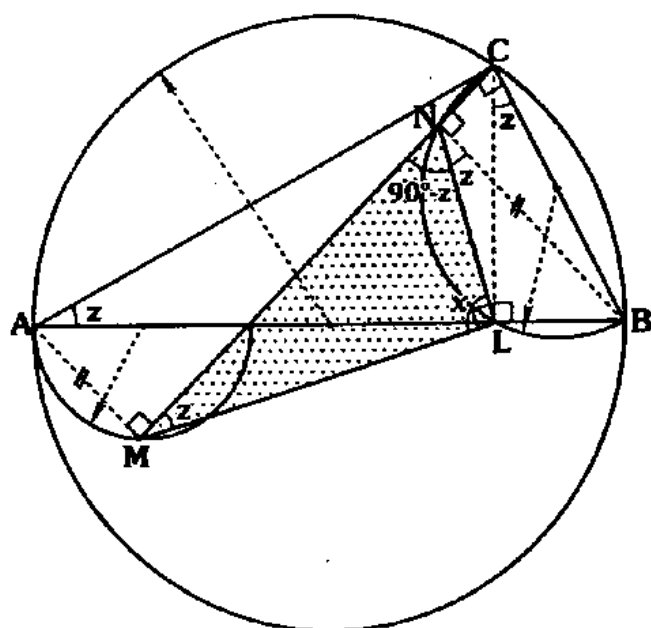
Si por un momento fijamos P , es claro que el mayor ángulo se dará cuando $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangente.

- Veamos los triángulos PBQ y P'B'Q', como $QP > l \rightarrow x > \alpha$
- $m\angle APB$ máximo, será: $2x$

$$\therefore m\angle APB = 74^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 145



Nos piden x .

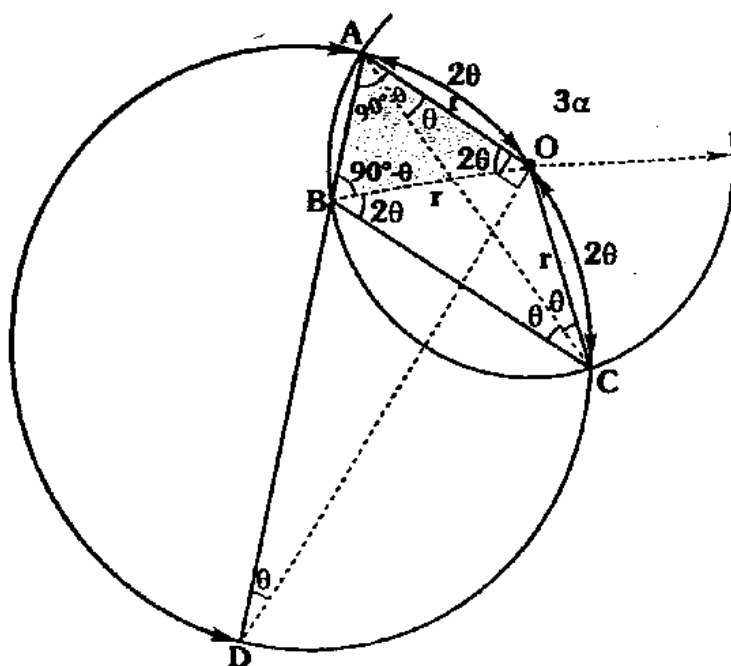
- Notemos que $\triangle AMLC$ es inscriptible
 $\rightarrow m\angle CAB = m\angle CML = z$
- $\triangle CNLB$: inscrito
 $\rightarrow m\angle LCB = m\angle LNB = z$
 $\rightarrow m\angle LNM = 90^\circ - z$
- En $\triangle MLN$:

$$x + z + 90^\circ - z = 180^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 146



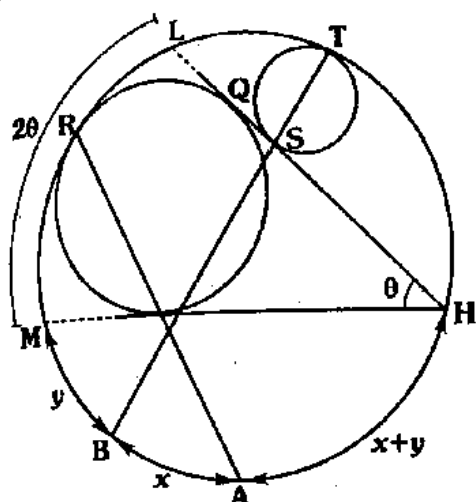
Nos piden $m\widehat{AD}$.

- Sea $m\widehat{AO} = m\widehat{OC} = 2\theta$
- $\triangle AOC$: isósceles
- Como $\overline{AO} \parallel \overline{BC} \rightarrow m\angle ACB = \theta$
- $\triangle BOC$: isósceles
 $\rightarrow m\angle OBC = m\angle OCB = 2\theta$
- $\triangle AOB$: isósceles
 $\rightarrow m\angle OAB = 90^\circ - \theta$
 $\rightarrow m\angle AOD = 90^\circ$

$$\therefore m\widehat{AD} = 180^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 147



Nos piden x en función de θ

- Sea $\widehat{mMB} = y$ por ángulo inscrito:

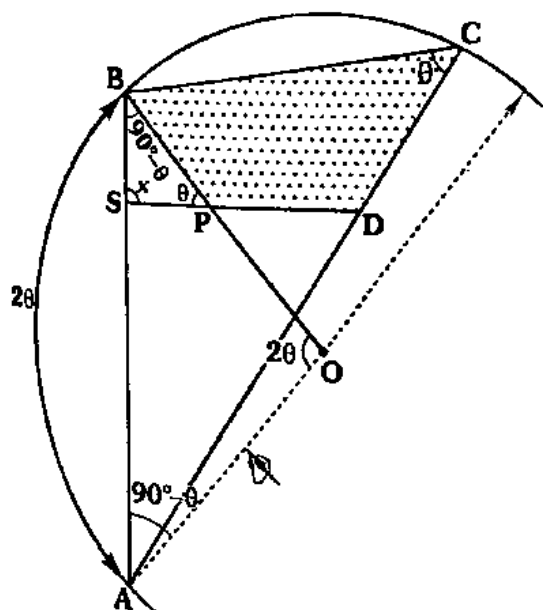
$$m_{ML} = 20$$

- Por propiedad:

$$m\widehat{MA} = m\widehat{AH} = x + y$$

$$m\widehat{LMB} = m\widehat{B\hat{H}} \rightarrow 2\theta + \psi = 2x + \psi$$

$$\therefore x=0$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 148**

- ❖ Por demostrar: $\overline{DP} \perp \overline{AB}$

- ❖ Sea $m\angle ACB = \theta \rightarrow m\angle AOB = 2\theta$

- En $\triangle AOB$: $m\angle ABO = 90^\circ - \theta$

- En $\triangle DPBC$ que es inscriptible:

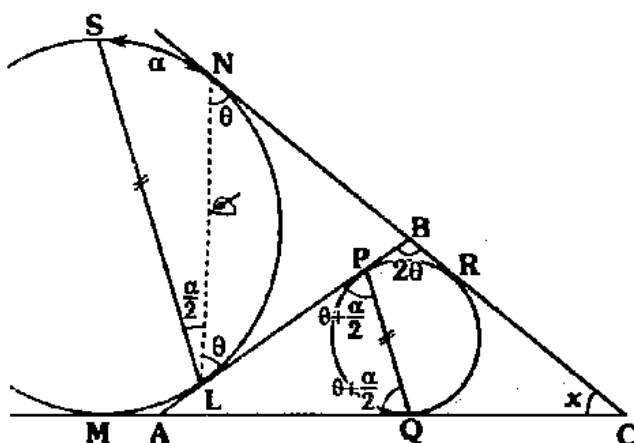
$$m_{\chi^0 \text{BPS}} = m_{\chi^0 \text{BCD}} = 0$$

- En $\triangle BSP$: $x + 90^\circ - \theta + \theta = 180^\circ$

$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{PD}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 149

Nos piden x en función de α .

- Por ángulo inscrito: $m\angle SLN = \frac{\alpha}{2}$

- Sea $m_{\text{BLN}} = \theta \rightarrow m_{\text{LBC}} = 2\theta$

- ❖ . Como $\overline{LS} \parallel \overline{QP} \rightarrow m\angle LPQ = \theta + \frac{\alpha}{2}$

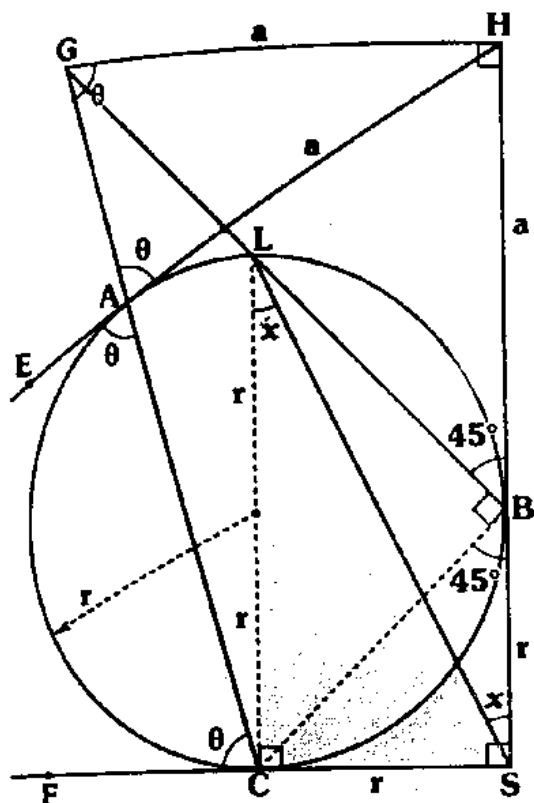
- En $\triangle$ QPBC:

$$x + 2\theta = \theta + \frac{\alpha}{2} + \theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore x = \alpha$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 152



Nos piden x.

- Notemos que:

$$m \angle FCA = m \angle EAC = \theta$$

- Como $\overline{GH} \parallel \overline{FS} \rightarrow m\angle HGA = \theta$

$$\rightarrow HG=HA=HB$$

→ $m \angle GBH = 45^\circ$

- $CS=SB \rightarrow m\angle CBS = 45^\circ$

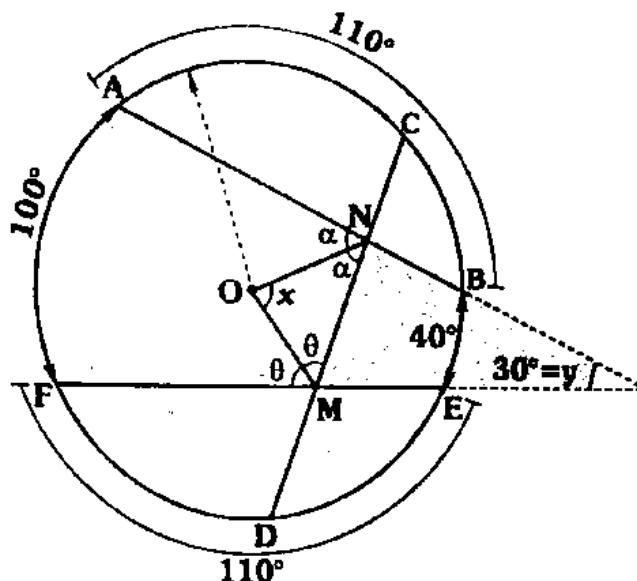
$$\rightarrow m \angle CBL = 90^\circ$$

→ $\overline{LC}$ es diámetro

$$\rightarrow \overline{CL} // \overline{SB} \rightarrow m\angle CLS = x$$

- Δ LCS: notable

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2}$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 153**

Piden x.

- Como $AB=FE=CD$

$$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{FE} = m\widehat{CD} = 110^\circ$$

- Luego $m\widehat{AF} = 100^\circ$

- Por ángulo exterior:

$$y = \frac{100^\circ - 40^\circ}{2} = 30^\circ$$

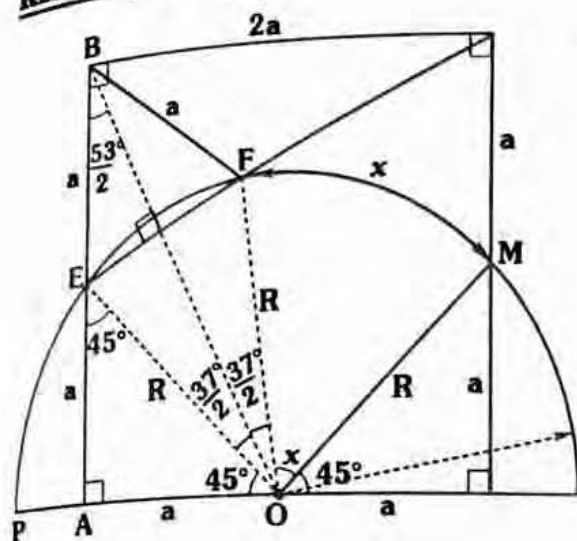
- En el ΔNML , por propiedad:

$$x = 90^\circ - \frac{30^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 157

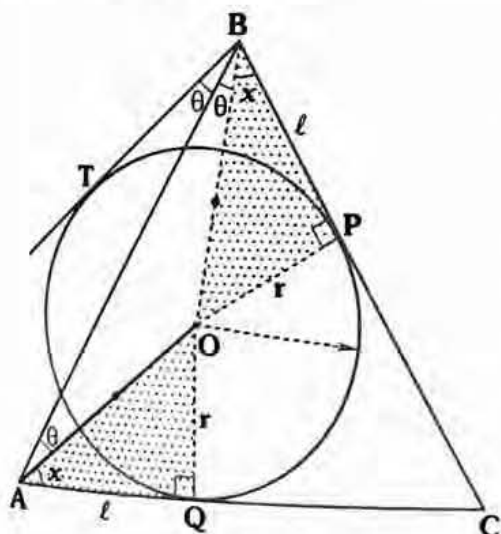


Nos piden x .

- Notemos que $\angle BAC$: notable de $53^\circ/2$
- $BEGF$: trapezoide simétrico
 $\rightarrow m\angle EOB = m\angle BOF = 37^\circ/2$
- En "O": $45^\circ + 37^\circ + x + 45^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 53^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 158



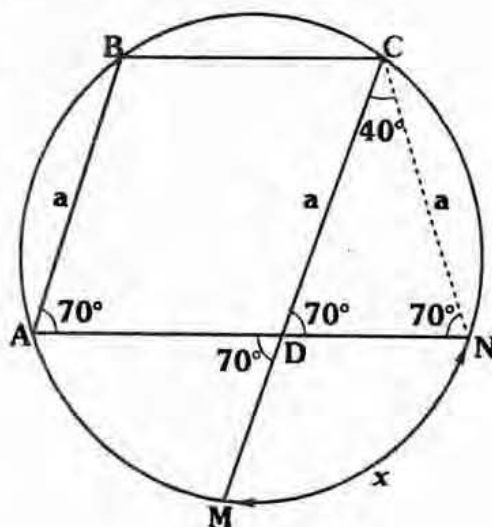
Nos piden x .

- Notemos que $CQ = CP \Rightarrow AQ = BP$

- $\rightarrow \triangle AQO \cong \triangle OPB \rightarrow AO = OB$
- Como
 $\overline{TB} \parallel \overline{AO} \rightarrow m\angle TBA = m\angle OAB = \theta$
 $m\angle OBA$
- Como $\overline{BO}$ bisectriz del ángulo TBP
 $\rightarrow x = 2\theta$ y $x + \theta = 90^\circ$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave A

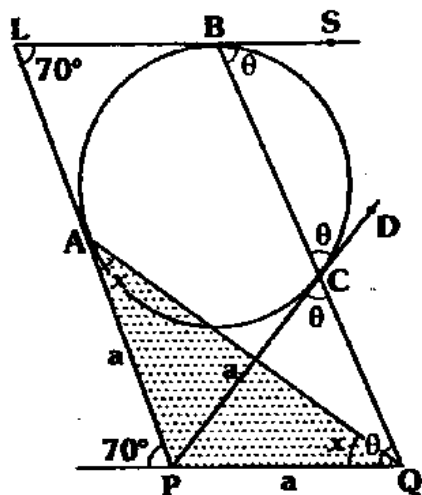
RESOLUCIÓN N° 159



Nos piden x .

- $ABCD$: paralelogramo
 $\rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AN}$
 $\rightarrow AB = CN$
- $\triangle DCN$: isósceles
 $\rightarrow m\angle DNC = 70^\circ$ y $m\angle MCN = 40^\circ$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 160

Nos piden x.

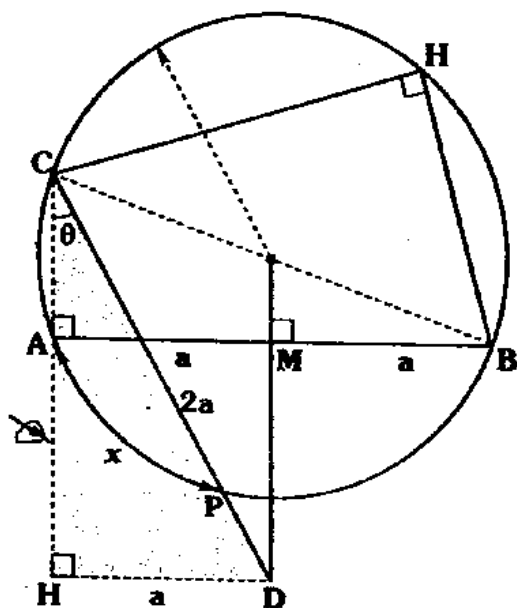
- Como

$$\overline{LB} \parallel \overline{PQ} \rightarrow m\angle PQB = m\angle SBQ = \theta$$

- $m\angle SBC = m\angle BCD = \theta$
- $\triangle PCQ$: isósceles $\rightarrow PQ = a$
- $\triangle PAQ$: isósceles $\rightarrow x + x = 70^\circ$

$$\therefore x = 35^\circ$$

Clave C

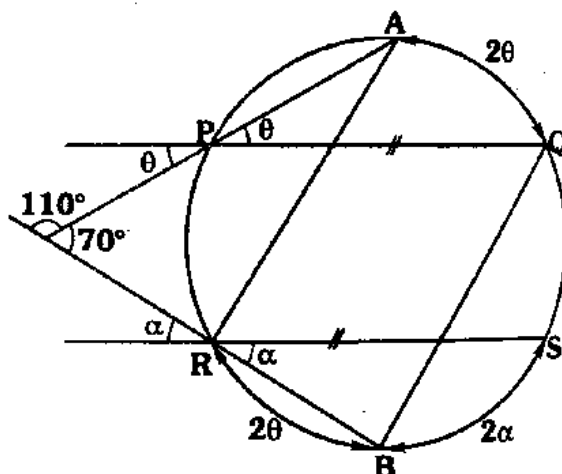
RESOLUCIÓN N° 161

❖ Nos piden x .

- Como $m\angle CHB = 90^\circ \rightarrow \overline{CB}$ es diámetro $\rightarrow m\angle CAB = 90^\circ$
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{DH} \perp \overline{CA} \rightarrow AMDH$ rectángulo.
- $\rightarrow DH = MA = a$ y $CD = 2a$
- $\angle DHC$: notable, pues: $CD = 2(HD)$
- $\rightarrow \theta = 30^\circ$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 162

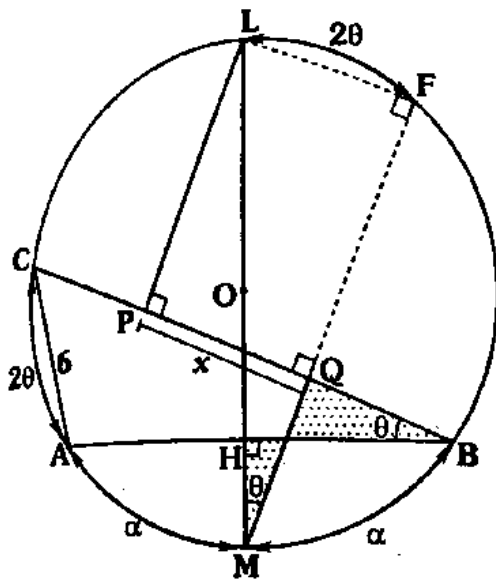
Nos piden $m\widehat{\text{RBS}}$

- Como $\overline{RA} \parallel \overline{BQ} \rightarrow m\widehat{RB} = m\widehat{AQ} = 2\theta$
- Sea $m\widehat{BS} = 2\alpha$
- Como $\overline{PQ} \parallel \overline{RS} \rightarrow \alpha + \theta = 70^\circ$

$$\therefore \widehat{\text{mRBS}} = 2\alpha + 2\theta = 140^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 163



Nos piden x .

- Como $\widehat{mAM} = \widehat{mMB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
- En la región sombreada.

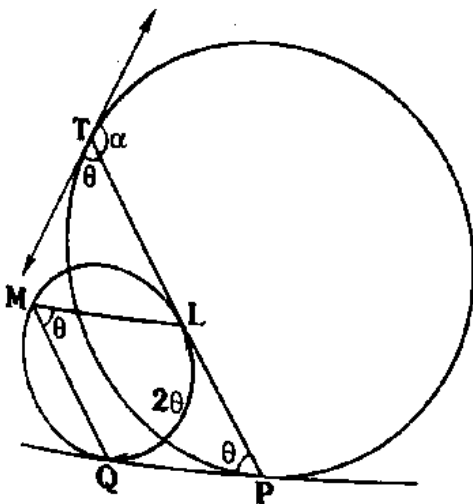
$$m \angle \text{HMQ} = m \angle \text{HBQ} = \theta$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AC} = m\widehat{LF} \rightarrow AC = LF$$

$$\therefore x=6$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 164

- ❖ Nos piden α .
- ❖ Como MLQP es un paralelogramo
- ❖ $\rightarrow m\angle LMQ = m\angle LPQ = \theta$
- ❖ Por ángulo inscrito:

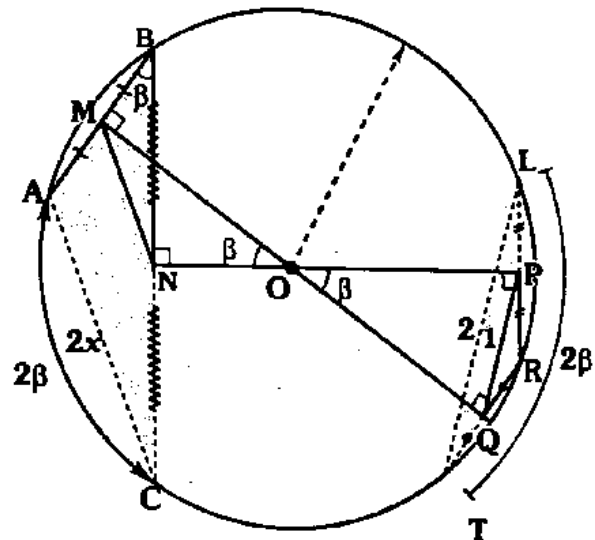
$$m\widehat{LQ} = 2\theta \rightarrow \theta + 2\theta = 180^\circ$$

$$\rightarrow \theta = 60^\circ$$

- En T: $\theta + \alpha = 180^\circ$

$$\therefore \alpha = 120^\circ$$

Clave **D**

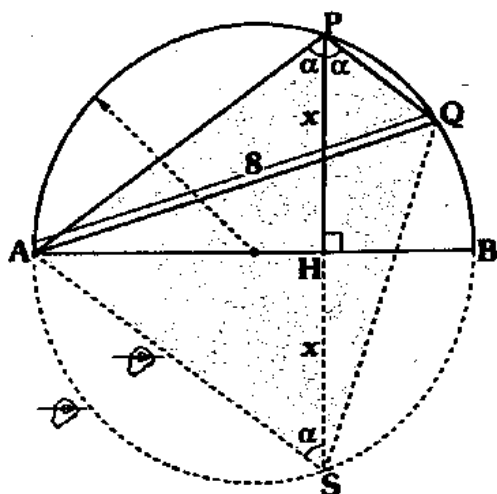
RESOLUCIÓN N° 165

- ❖ Nos piden x.
- ❖ Sea $m\angle NOM = \beta \rightarrow m\angle NBM = \beta$ y
- ❖ $m\widehat{LT} = 2\beta$
- ❖ Por base media en:
- ❖ * $\triangle ACB$: $AC = 2x$
- ❖ * $\triangle LRT$: $CT = 2$
- ❖ Como $m\widehat{AC} = m\widehat{LT} \rightarrow 2x = 2$

$$\therefore x=1$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 166



Nos piden x .

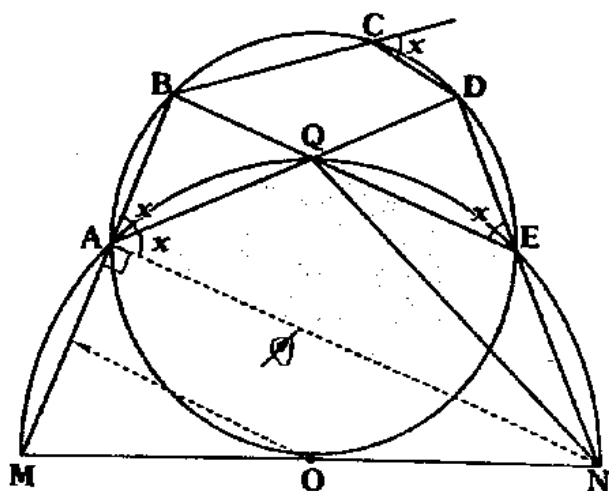
- Se completa la circunferencia y se prolonga $\overline{PH}$ hasta $S \rightarrow m\angle ASP = \alpha$
- $APQS$: trapezio isósceles

$$2x = 8$$

$$\therefore x = 4$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 167



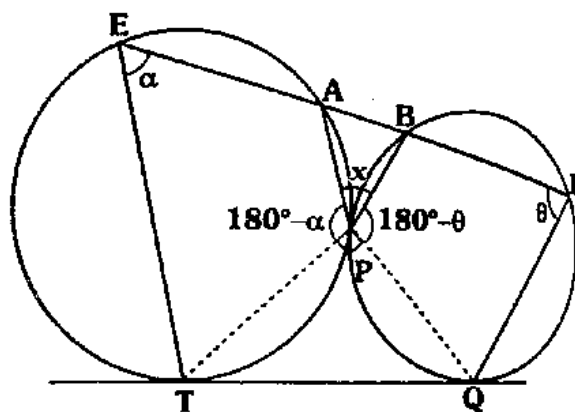
Nos piden x .

- $\triangle ABCD$ inscrito $\rightarrow m\angle BAD = x$
- $\triangle BCDE$ inscrito $\rightarrow m\angle BED = x$
- $\triangle AQEN$ inscrito $\rightarrow m\angle MAN = x$
- Como $m\angle NAM = 90^\circ \rightarrow 2x = 90^\circ$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 168



Nos piden x .

$$\text{Dato: } \alpha + \theta = 140^\circ$$

- En los $\triangle$ s inscritos $TPAE$ y $PBFQ$:

$$m\angle TPA = 180^\circ - \alpha \quad y$$

$$m\angle QPB = 180^\circ - \theta$$

- En P :

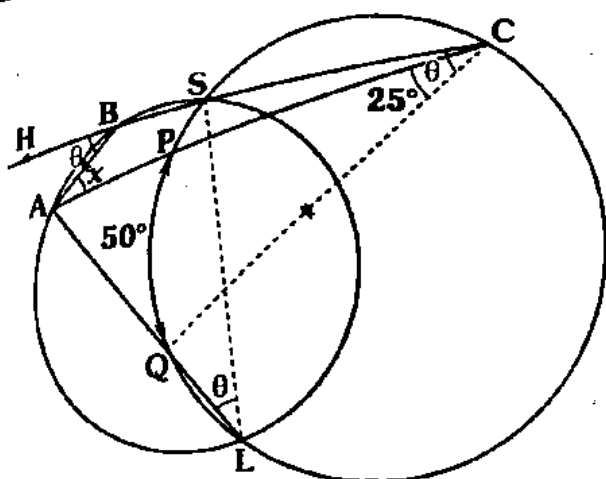
$$x + 180^\circ - \alpha + 90^\circ + 180^\circ - \theta = 360^\circ$$

$$\rightarrow x = \alpha + \theta - 90^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 169

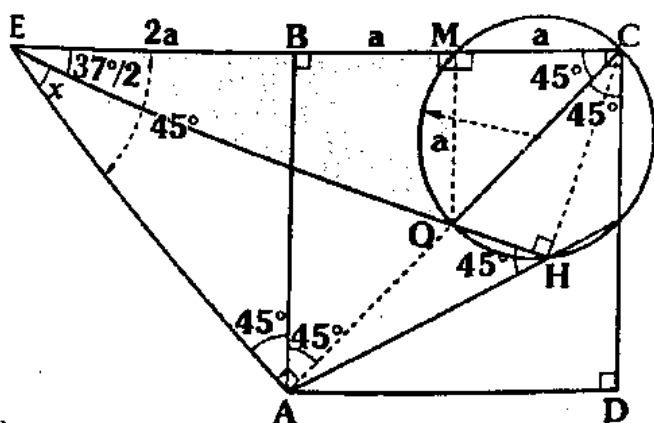


Nos piden x .

- Sea $m\angle ALS = \theta$
 $\rightarrow m\angle HBA = \theta$ y $m\angle QCS = \theta$
- Luego $\overline{AB} \parallel \overline{QC}$
- Por ángulo inscrito: $m\angle QCP = 25^\circ$
 $\therefore x = 25^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 170



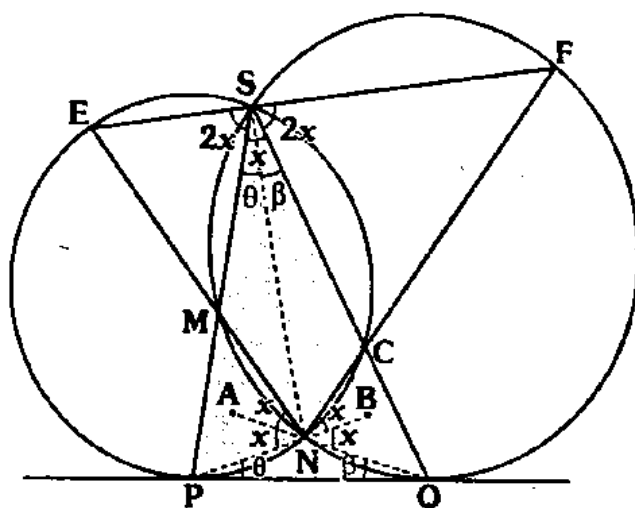
Nos piden x .

- Como O es centro del cuadrado ABCD
 $\rightarrow A, O$ y C son colineales
- Notamos que $m\angle AHE = m\angle ACE$
- $\triangle EAH$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle CAE = 90^\circ$

- En $\triangle CAE$: $CB = BE = 2a$
- $\triangle OMK$: notable de $37^\circ/2$
 $\therefore x = 53^\circ/2$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 171

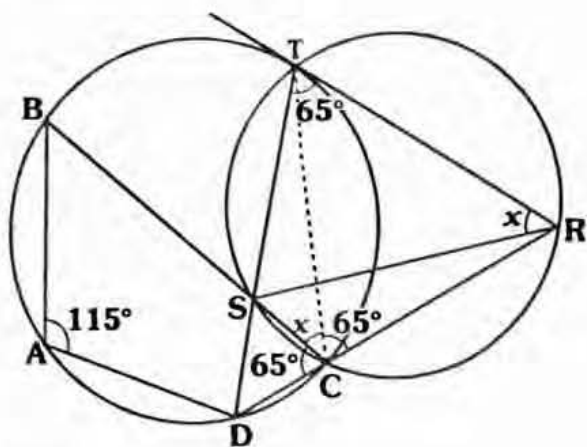


Nos piden x .

- Sea $m\angle PSN = \theta$ y $m\angle NSQ = \beta$
 $\rightarrow x = \theta + \beta$
- En $\triangle PNQ$: $m\angle ANP = m\angle BNQ = x$
- En $\triangle PNCS$ y $\triangle QNMS$: ambos inscritos, se cumple:
 $m\angle ANE = m\angle BNC = x$
- También:
 $m\angle PNE = m\angle PSE = 2x$
 $m\angle QNF = m\angle QSF = 2x$
- En "S": $2x + x + 2x = 180^\circ$
 $\therefore x = 36^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 172

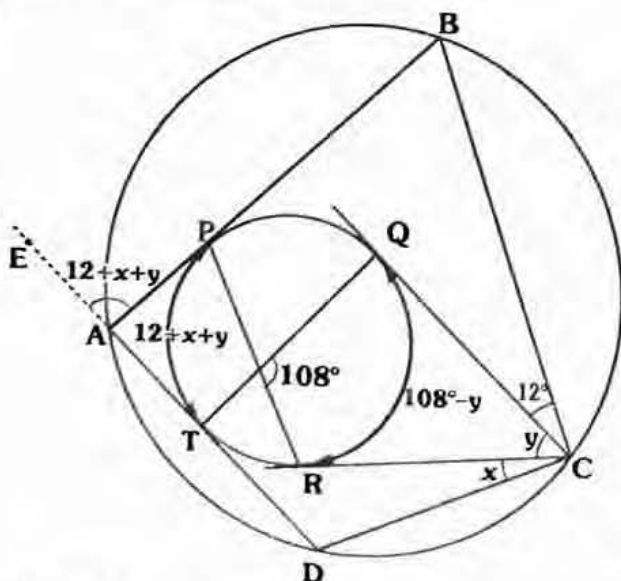


Nos piden x .

- En $\triangle ABCD$ inscrito: $m\angle DCB = 65^\circ$
- En $\triangle SCRT$: $m\angle STR = 65^\circ$
- Como
 $m\widehat{TCD} = 130^\circ \rightarrow m\angle TCR = 65^\circ$
- En "C": $65^\circ + x + 65^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 173



Nos piden x .

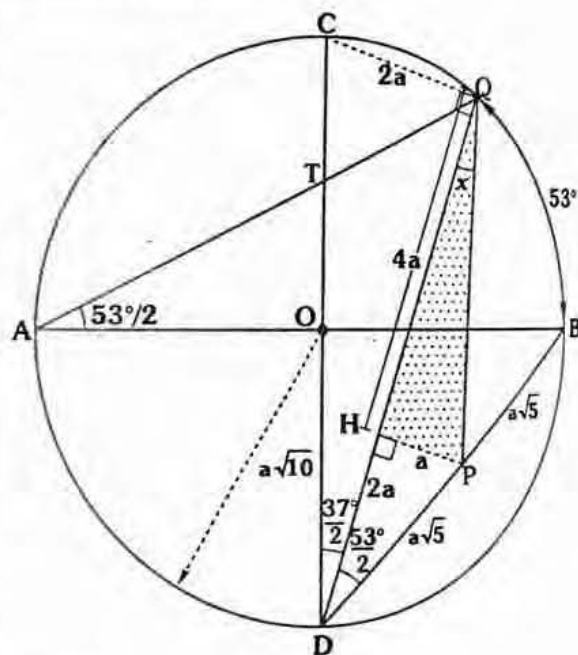
- Sea $m\angle QCR = y \rightarrow m\widehat{QR} = 180^\circ - y$
- En $\triangle ABCD$: $m\angle EAB = 12 + x + y$
- Por propiedad: $m\widehat{PT} = 12 + x + y$
- Por ángulo interior:

$$108^\circ = \frac{12^\circ + x + y + 180^\circ - y}{2}$$

$$\therefore x = 24^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 174



Piden x .

- Como $OT = TC \rightarrow AO = 2(OT)$
 $\rightarrow m\angle OAT = \frac{53^\circ}{2}$
- Luego $m\widehat{QB} = 53^\circ \rightarrow m\angle QDB = \frac{53^\circ}{2}$
 $y m\angle CDQ = \frac{37^\circ}{2}$
- Se traza $\overline{PH} \perp \overline{DQ}$ (H en $\overline{DQ}$)

$$pH=a, \quad HD=2a \quad y \quad DP=a\sqrt{5}$$
$$CD = 2a\sqrt{10} \rightarrow CQ = 2a \text{ y } QD = 6a$$

$$\rightarrow QH = 4a$$

Clave B

- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$

- $\triangle ABM$: isósceles $\rightarrow m\angle BMA = 87^\circ$

- Como $m_{\angle BMA} = m_{\angle BCD}$

→ $\triangle MBCD$

- Es incriptible $\rightarrow m \angle BDM = 10^\circ$

- $E_n \Delta ASO :$

$$x = 3^\circ + 10^\circ$$

$$\therefore x = 13^\circ$$

Clave A

Nos piden $\frac{AB}{AC}$.

- Como $m\widehat{PQ} = m\widehat{QB}$

$$\rightarrow m \angle \text{QPN} = m \angle \text{QNB} = \beta$$

- $\triangle PQMN$: inscriptible

• Luego $m\angle PNQ = m\angle PMQ = m\angle ACQ$

$$\rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{PN}$$

- Cuando trazamos la tangente $\vec{\mathcal{L}}$ en A

- Notaremos:

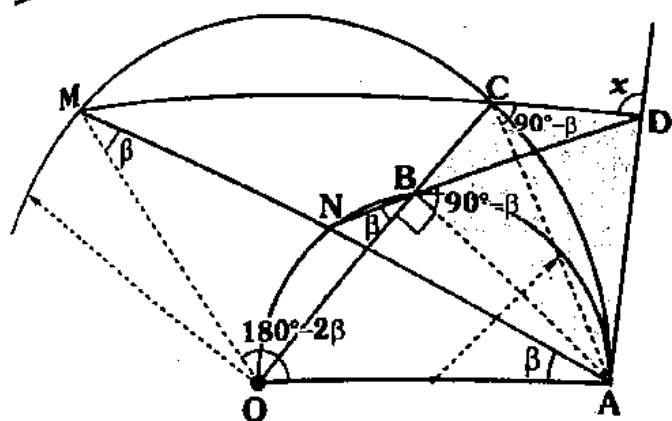
$$m \angle PBR = \beta \rightarrow \overleftrightarrow{ZP} \parallel \overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$$

• Como $\overline{AC} \parallel \vec{\mathcal{L}} \rightarrow AB=BC$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = 1$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 180



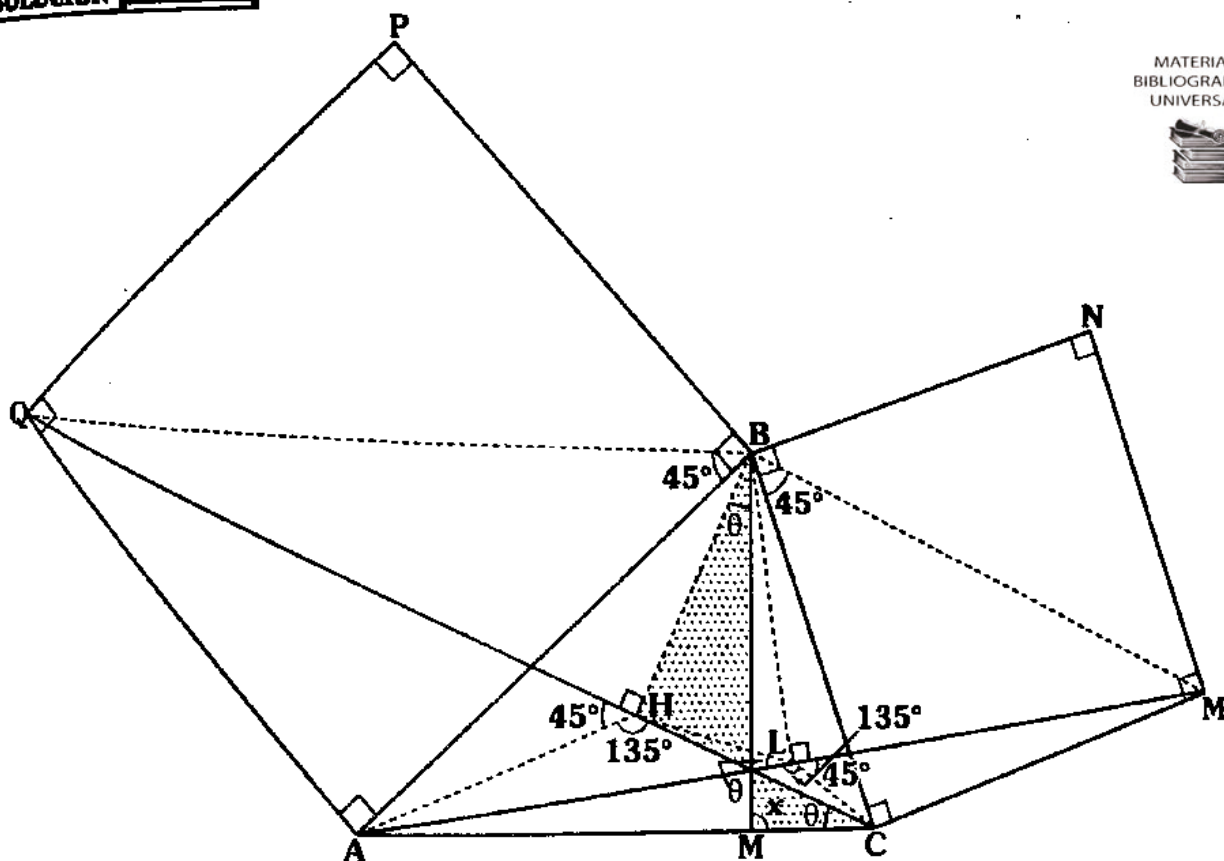
Nos piden x .

- Como $m\angle OAM = \beta$
 $\rightarrow m\angle AOM = 180^\circ - 2\beta$
- $m\angle NBO = \beta \rightarrow m\angle ABD = 90^\circ - \beta$
- $\triangle ABCD$: inscriptible
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 181

MATERIAL
BIBLIOGRAFICO
UNIVERSAL



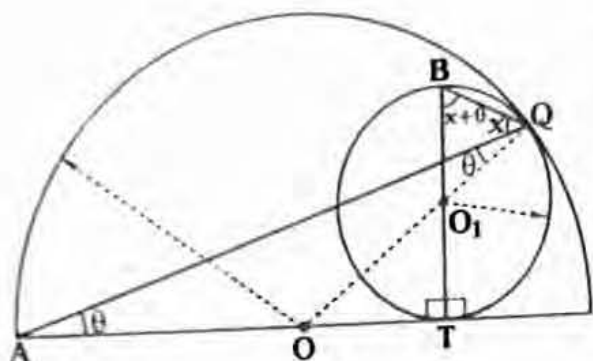
Por demostrar: $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{QC}$ y $\overline{BL} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AC}$ y L en $\overline{AM}$)
- $\triangle AHBQ$ y $\triangle CLBM$: inscriptible $m\angle AHQ = 45^\circ$ y $m\angle CLM = 45^\circ$
- $\triangle AHLC$: inscriptible $\rightarrow m\angle ACH = m\angle ALH = \theta$
- En la región sombreada: $x + \theta = 90^\circ + \theta$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 182



Nos piden x .

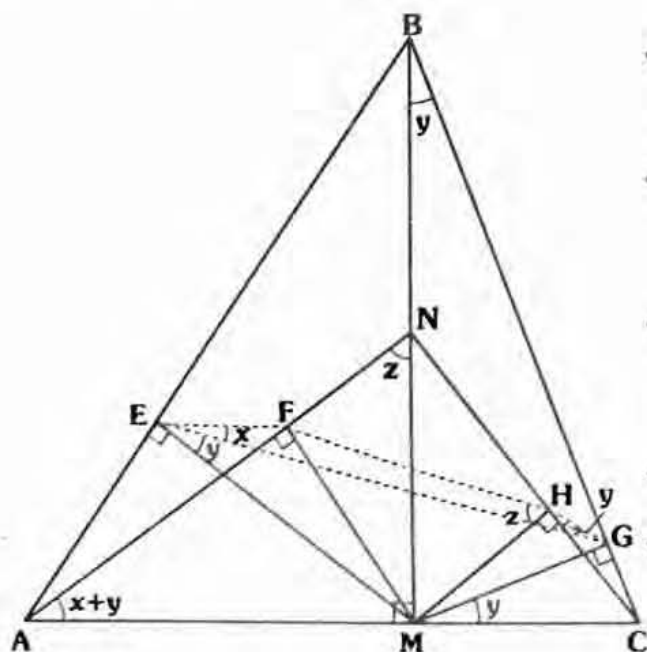
- O, O_1 y Q : colineales
- $\triangle AOQ$: isósceles
 $\rightarrow m\angle OAQ = m\angle OQA = \theta$
- $\triangle O_1BQ$: isósceles
 $\rightarrow m\angle O_1QB = m\angle O_1BQ = x + \theta$
- En la región sombreada:

$$x + x + \theta = 90^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

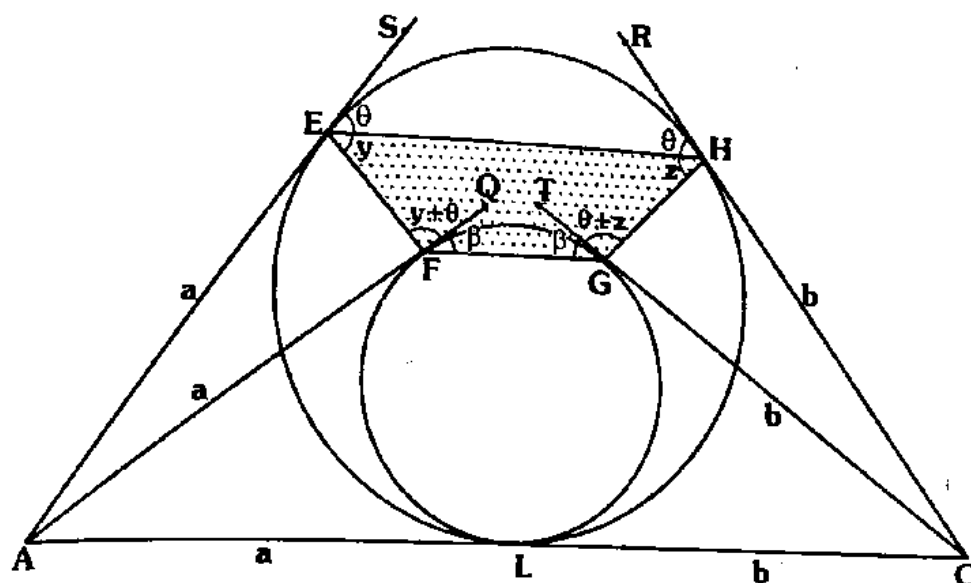
Clave D

RESOLUCIÓN N° 183



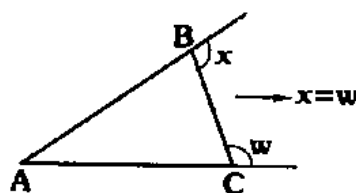
- Por demostrar que el $\triangle EFGH$ es inscriptible
- Sea $m\angle FEG = x$; $m\angle FHM = z$ y $m\angle CHG = y$
- Luego $\triangle EFGH$ es inscriptible
 $\Leftrightarrow x + y + z = 90^\circ$
- $\triangle MHGC$: inscriptible $\rightarrow m\angle GMC = y$
 $\rightarrow m\angle MBC = y$
- $\triangle MHGC$: inscriptible $\rightarrow m\angle MEG = y$
- $\triangle AEFM$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle MQF = x + y$
- $\triangle AMN$: $x + y + z = 90^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 184

- Usaremos la siguiente propiedad:

Si $AB=AC$



- $$m_{\Delta \text{SEF}} = m_{\Delta \text{QFE}} = y + \theta$$

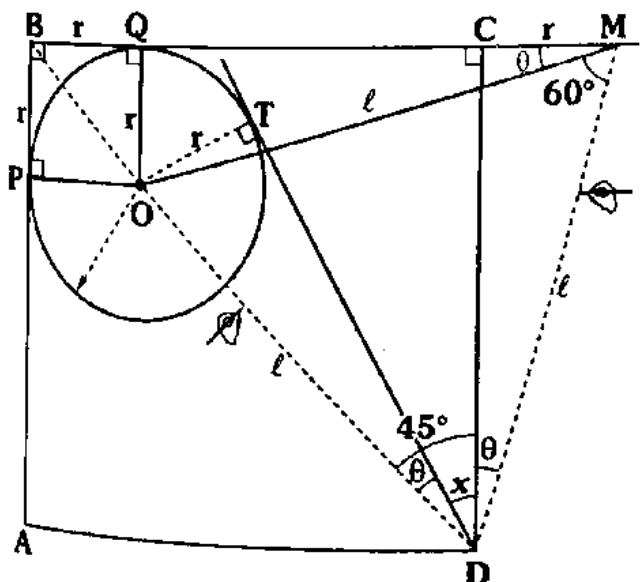
$$m\angle TGH = m\angle RHG = \theta + z$$

- En $\triangle EFGH$: $2y + 20 + 2\beta + 2z = 360^\circ$

$$y + \theta + \beta + z = 180^\circ$$

■

$\triangle EFGH$: Inscriptible.

RESOLUCIÓN N° 185

Nos piden x.

- Prolongamos $\overline{BC}$ hasta M tal que $CM=r$

- Luego: $\triangle OTD \cong \triangle OQM \cong \triangle MCD$

$$\rightarrow OD = OM = MD$$

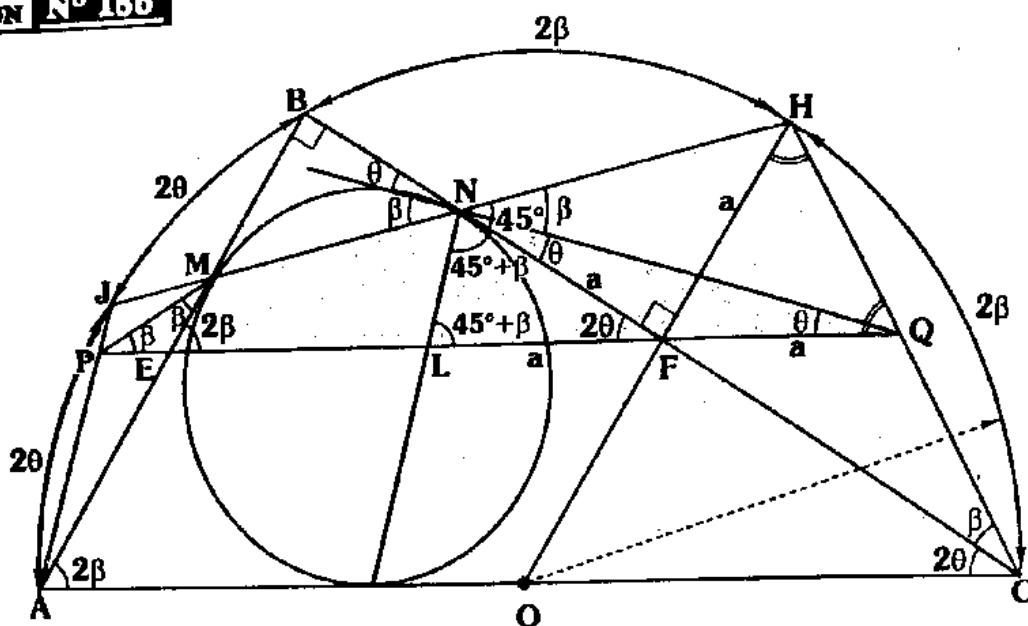
→ $\triangle OMD$: equilátero

$$\bullet \quad 45^\circ + \theta = 60^\circ \rightarrow \theta = 15^\circ$$

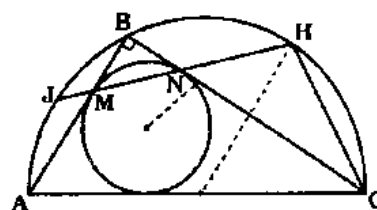
- $x + 20 = 60^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **D**

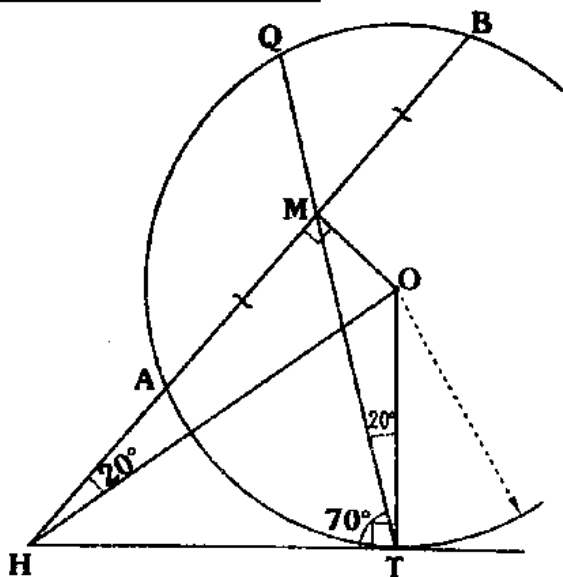
RESOLUCIÓN N° 186

- Por demostrar: $\triangle PMNQ$ es inscriptible
- Por propiedad $m\widehat{AJ} = m\widehat{JB} = 2\theta$ y $m\widehat{BH} = m\widehat{HC} = 2\beta$
O, F y H: colineales
- $\triangle LNF$: isósceles $\rightarrow LF = FN = FQ$
 $\triangle NFQ$: isósceles
- Análogamente: $EP = PM$
- Como $\theta + \beta = 45^\circ \rightarrow m\angle QNH = \beta$
 $\therefore \triangle PMNQ$: Inscriptible.

Propiedad

Se cumple:

- * $\widehat{mJBH} = 90^\circ$
- * $\widehat{mAJ} = \widehat{mJB}$ y $\widehat{mBH} = \widehat{mHC}$

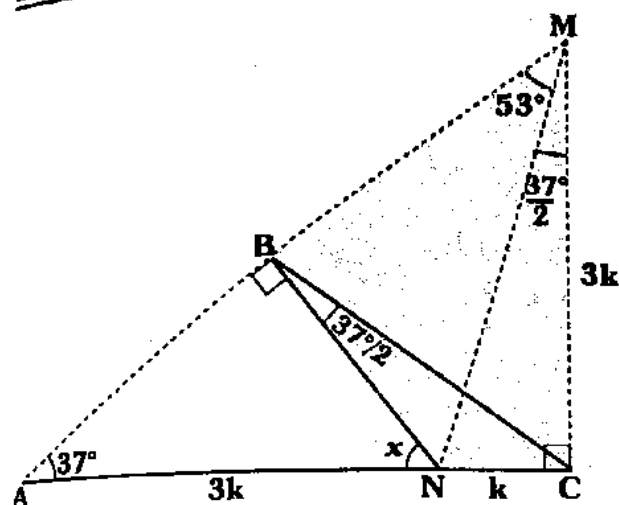
RESOLUCIÓN N° 187

Nos piden $m\overline{\text{TAQ}}$.

- Como $AM=MB \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
 - $\triangle HMOT$: inscriptible
 - $\rightarrow m\angle OTM = 20^\circ$
 - $\rightarrow m\angle HTQ = 70^\circ$
- $\therefore m\widehat{TAQ} = 140^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 188

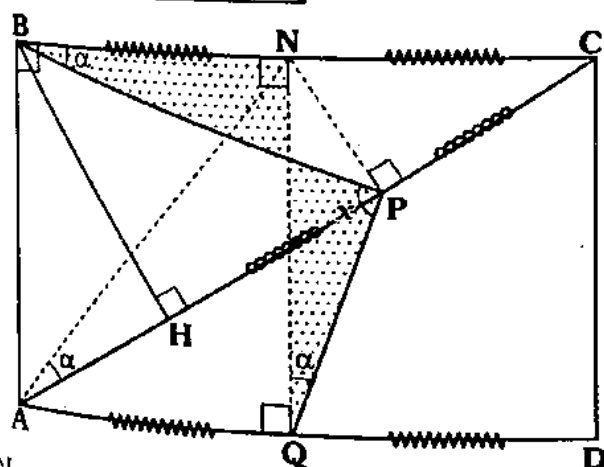


Nos piden x.

- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta M tal que $m\angle ACM = 90^\circ$
- $\triangle ACM$: notable de $37^\circ \rightarrow CM = 3k$
- $\triangle NCM$: notable de $37^\circ/2$
 $\rightarrow \triangle NBMC$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle NBA = 90^\circ$

$$\therefore x = 53^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 189

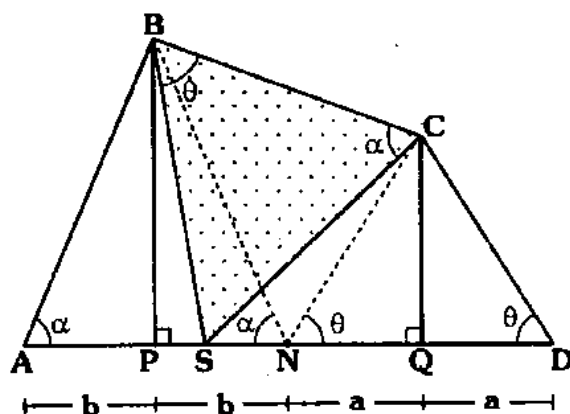
Nos piden x .

- Se traza $\overline{QN} \perp \overline{BC} \rightarrow BN = NC$

- En $\triangle BHC$: $\overline{NP}$ es base media
 $\rightarrow \overline{NP} \perp \overline{AC}$
- Como $\triangle ABNP$ y $\triangle ANPQ$ son inscrip-
 tibles
 $\rightarrow m\angle PBN = m\angle NAP = m\angle NQP = \alpha$
- En la región sombreada:

$$x + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **E****RESOLUCIÓN N° 190**

- Se ubica N en $\overline{PQ}$ tal que:

$$NQ = QD = a$$

$$\rightarrow m\angle DNC = \theta$$
- Luego el $\triangle SBCN$ es inscriptible

$$\rightarrow m\angle BNA = \alpha$$

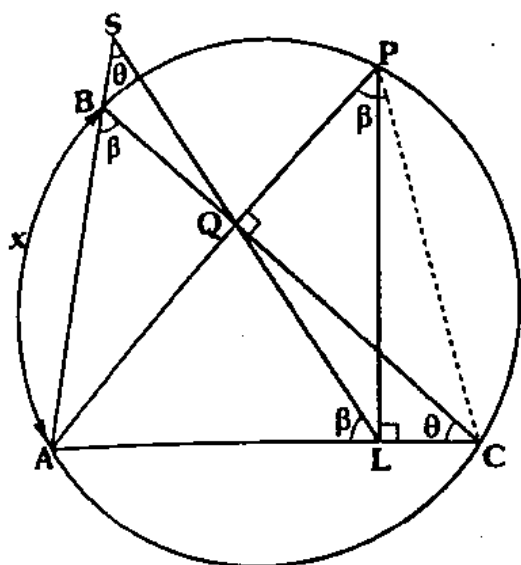
$$\rightarrow \triangle ABN \text{ es isósceles}$$

$$\rightarrow \Delta P = PN = b$$

$$\therefore AD = 2(a + b) = 2(PQ)$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 192



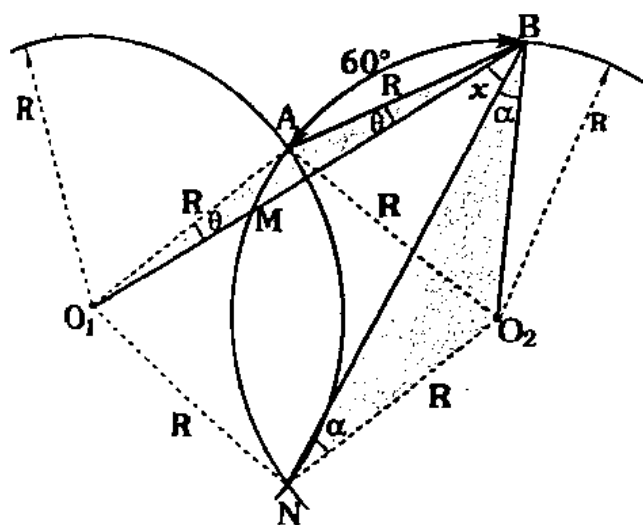
Nos piden x .

- Sea $m\angle ABC = \beta \rightarrow m\angle APC = \beta$
- $\triangle QPCL$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle QLA = \beta$
- En la región sombreada: $m\angle QCL = \theta$

$$\therefore x = 2\theta$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 193



Nos piden $m\widehat{MN}$.

- Como las circunferencias tienen igual

radio $\rightarrow O_1AO_2N$ es un rombo

$$\rightarrow \overline{O_1A} \parallel \overline{NO_2}$$

- $\triangle O_1AO_2$ y $\triangle NO_2B$ son isósceles
- Notemos que $x = \theta + \alpha$, pues:

$$\overline{O_1A} \parallel \overline{NO_2}$$

- $\triangle AO_2B$: equilátero

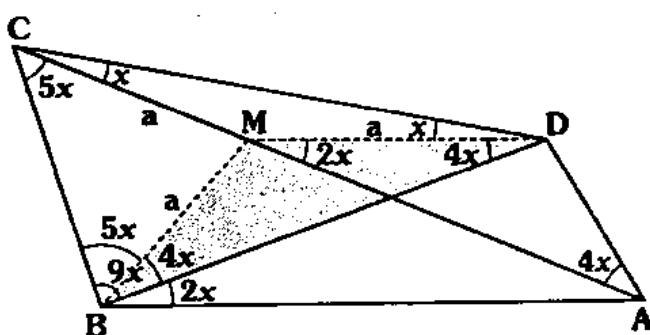
$$x + \theta + \alpha = 60^\circ$$

$$\rightarrow x = 30^\circ$$

- Por ángulo inscrito; $m\widehat{MN} = 60^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 194



Nos piden x .

- Se ubica M en $\overline{AC}$ tal que:

$$m\angle DBM = 4x$$

$$\rightarrow \triangle BMDA \text{ es inscriptible}$$

$$\rightarrow m\angle AMD = 2x$$

- $\triangle CMD$ y $\triangle BMC$: isósceles

$$\rightarrow BM = MC = MD$$

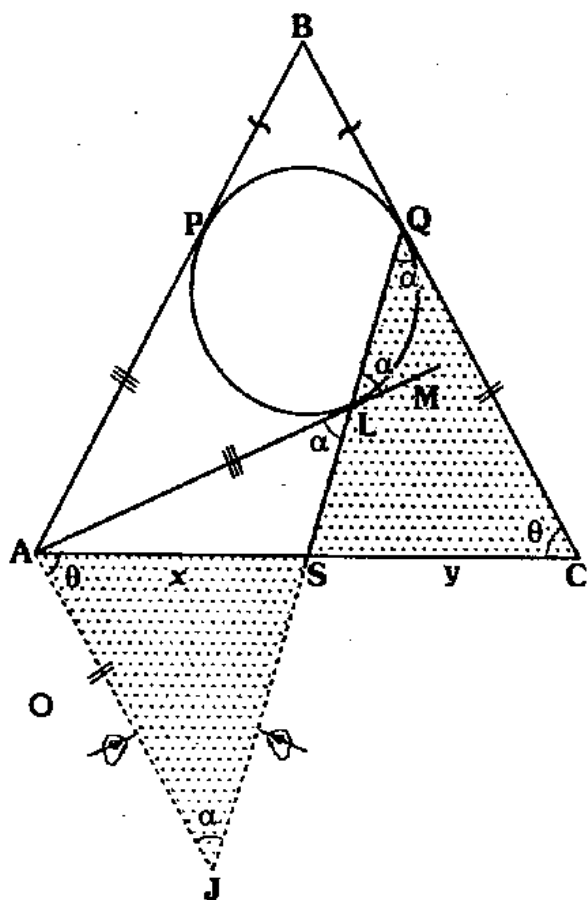
- $\triangle BMD$: isósceles $\rightarrow m\angle MDB = 4x$

$$\triangle ABCD: 9x + 6x + 5x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 9^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 195



Sea $AS = x$ y $SC = y$

Por demostrar: $x = y$

• Como $m\angle CQM = m\angle QLM = \alpha$

$$\rightarrow m\angle ALS = \alpha$$

• Se prolonga QL hasta J tal que:

$$m\angle QJA = \alpha$$

$$\rightarrow \overline{AJ} \parallel \overline{BC}$$

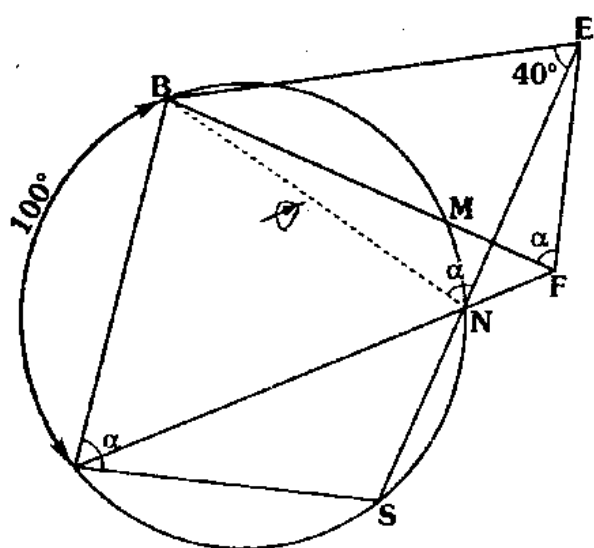
$$\rightarrow m\angle JAS = \theta$$

• $\triangle JAS \cong \triangle QCS$ (ALA)

$$\therefore x = y$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 196



Nos piden $m\widehat{MN}$.

• $\triangle ABNS$: inscripible

$$\rightarrow m\angle BNE = \alpha$$

• $\triangle ABNS$: inscripible

$$\rightarrow m\angle BFN = 40^\circ$$

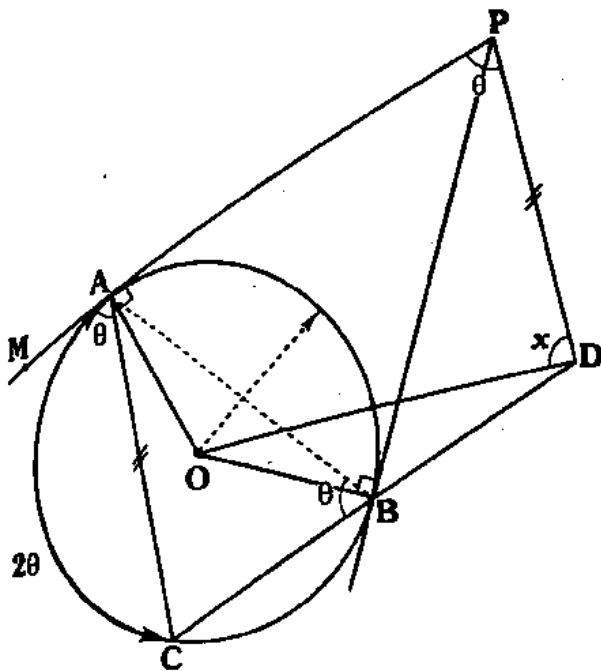
• Por ángulo exterior:

$$40^\circ = \frac{100^\circ - m\widehat{MN}}{2}$$

$$\therefore m\widehat{MN} = 20^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 197



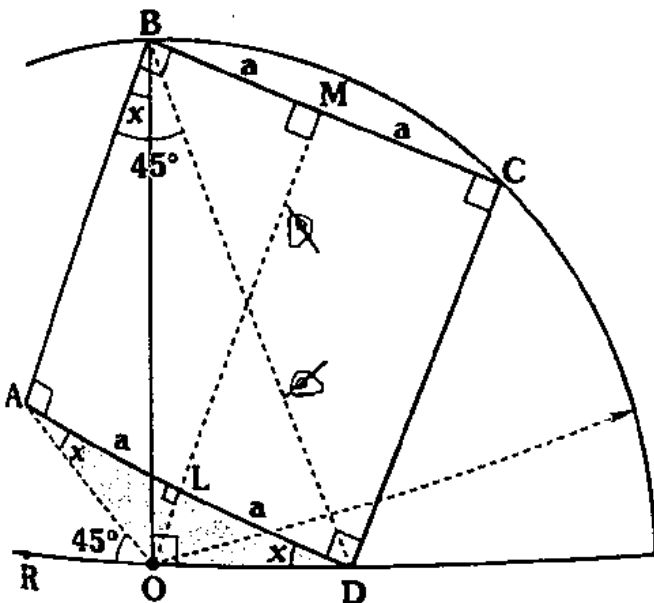
Piden x .

- Sea $m\widehat{AC} = 2\theta$
 $\rightarrow m\angle MAC = \theta = m\angle ABC$
 $\rightarrow m\angle APD = \theta$
- $\triangle APDB$: inscriptible
- También $\triangle OAPB$: inscriptible
- Los puntos O, A, P, D y B son concíclicos de diámetro $\overline{OP}$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 198



Piden x .

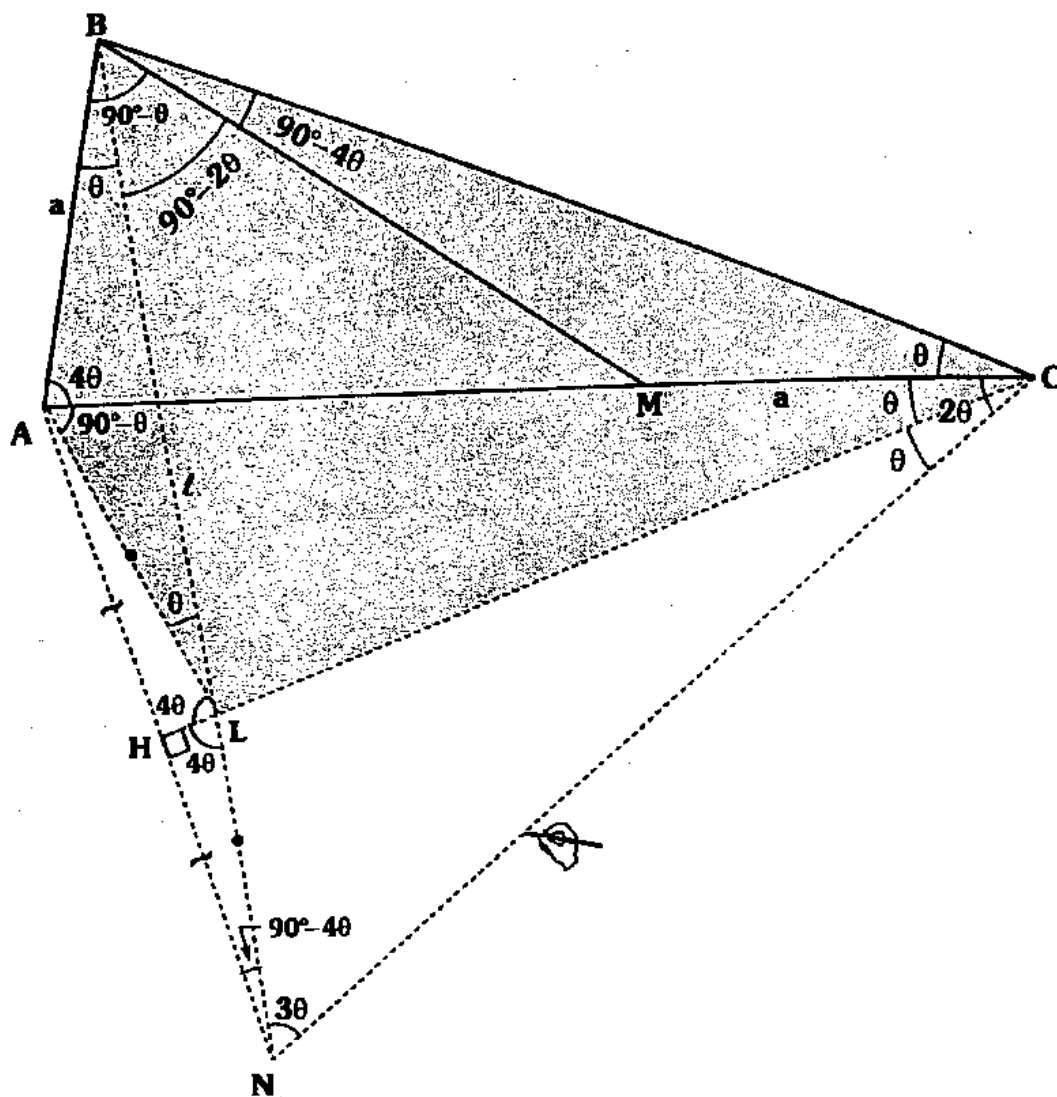
- $\triangle OABD$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle AOB = 45^\circ$
- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$
 $\rightarrow BM = MC$ y $AL = LD$
 $\rightarrow AO = OD$
- $\triangle AOD$: isósceles

$$x + x = 45^\circ$$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 199

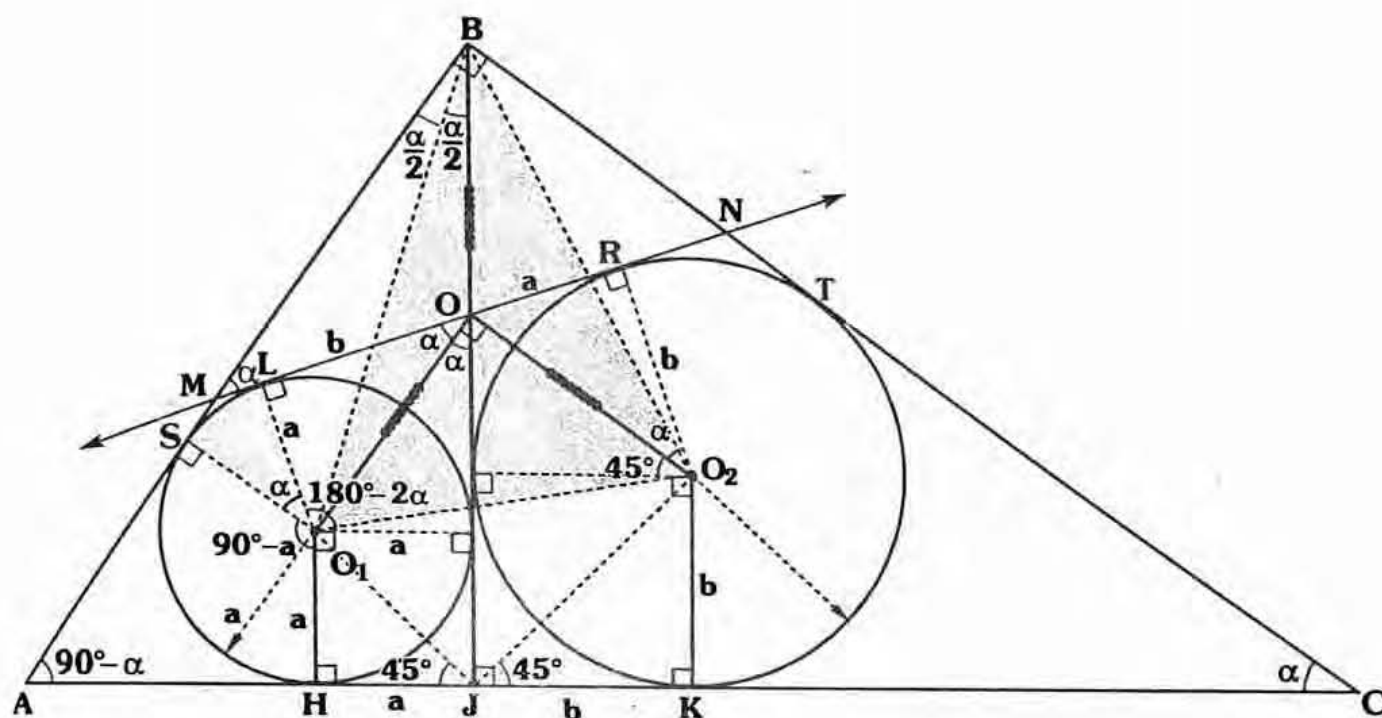


Nos piden θ .

- Se ubica M tal que $m\angle ABN = \theta$ y $BN = BC$
 $\rightarrow \triangle ABN \cong \triangle CBM \rightarrow m\angle ABN = 90^\circ - 4\theta$
- $m\angle NBC = 180^\circ - 6\theta \rightarrow m\angle BNC = 3\theta$ y $m\angle ACN = 2\theta$
- $\triangle ACN$: isósceles, se traza la altura CH $\rightarrow m\angle ALH = m\angle HLN = 4\theta$
- $\triangle ABCL$: inscriptible $\rightarrow m\angle ALB = \theta$
- En L:
 $4\theta + 4\theta + \theta = 180^\circ$
 $\therefore \theta = 20^\circ$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 200



Nos piden demostrar que el $\triangle AMNC$ es inscriptible.

- Por propiedad: $HJ = OR = a$ y $JK = OL = b$
- $\angle O_1LO \cong \angle O_2RO \rightarrow OO_1OO_2$ y $m\angle O_1OO_2 = 90^\circ$
- Como $m\angle O_1BO_2 = 45^\circ$, $m\angle O_1OO_2 = 90^\circ$ y $O_1O = OO_2 \rightarrow O$ es circuncentro del $\triangle O_1OO_2 \rightarrow m\angle OBO_1 = \frac{\alpha}{2}$
- Luego $m\angle ABJ = \alpha = m\angle BCA$
- En O_1 : $m\angle SO_1L = \alpha \rightarrow m\angle LMB = \alpha$

$\therefore \triangle AMNC$: inscriptible

Clave **B**

• Como $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales por propiedad: $m\angle PAQ = 45^\circ$

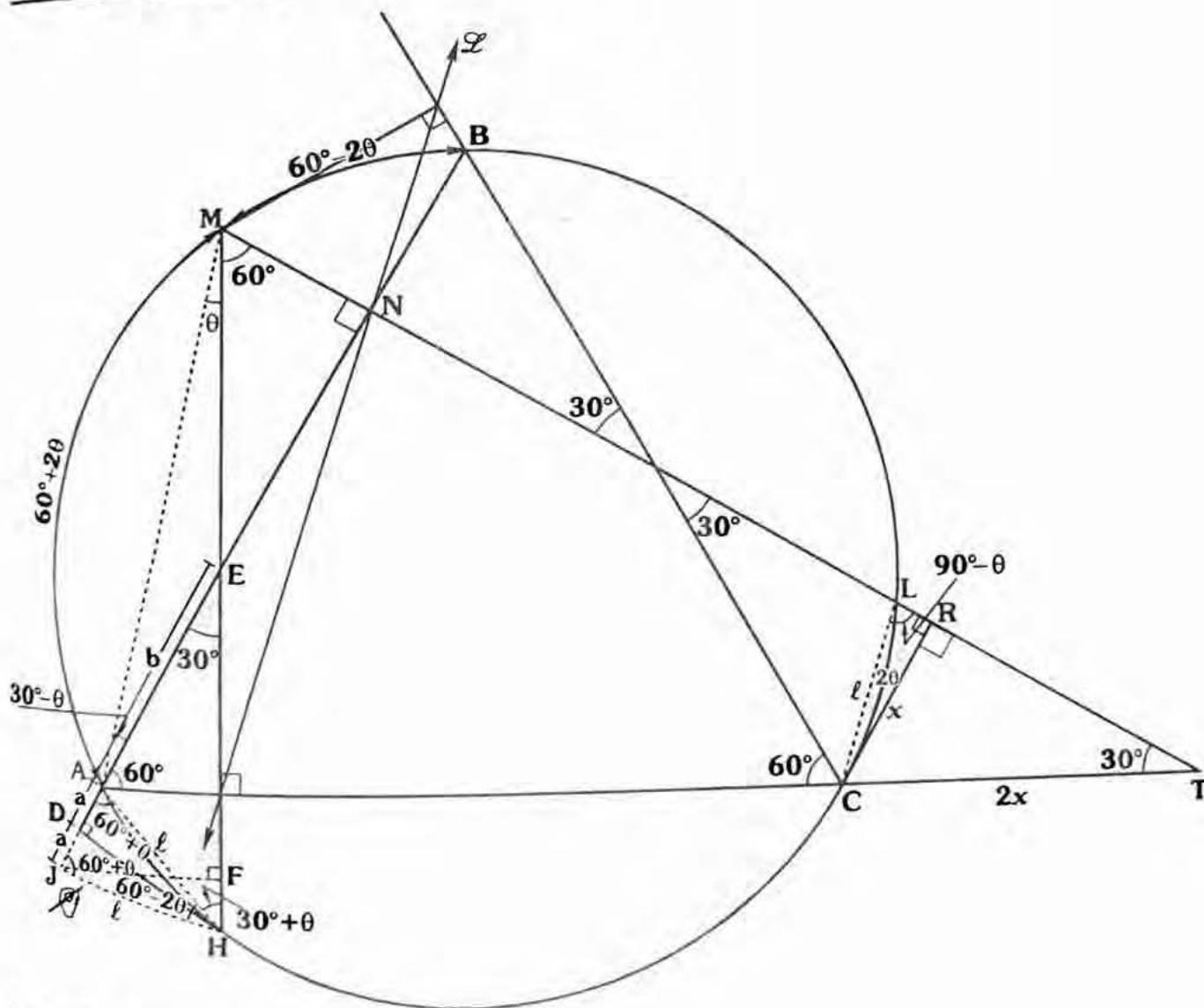
Sea:

$$\left. \begin{array}{l} m\angle PEF = \theta \rightarrow m\angle PAF = \theta \\ m\angle QGF = \beta \rightarrow m\angle QAF = \beta \end{array} \right\} \theta + \beta = 45^\circ$$

$$\Delta ESG: \quad x = \theta + \beta$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 204

Nos piden CT.

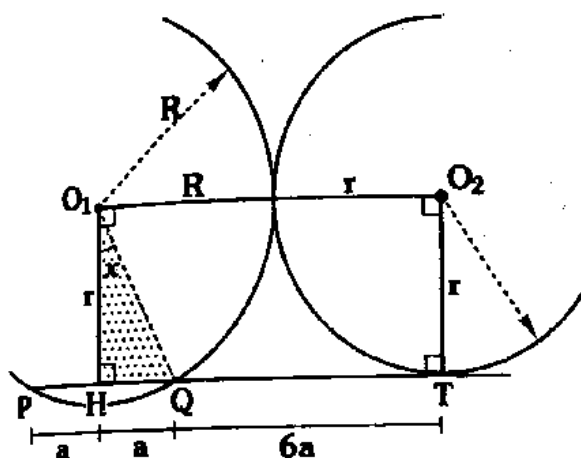
En $\triangle AME$: $2y + 2z + \theta = 180^\circ$

$$y + z = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 207



Nos piden $m\widehat{PQ}$.

• Notemos que HO_1O_2T es rectángulo

• Luego: $R + r = 6a$... (1)

• En $\triangle HO_1Q$: $R^2 = r^2 + a^2$

$$\rightarrow R^2 - r^2 = a^2$$

$$\rightarrow (R + r)(R - r) = a^2$$

$$\rightarrow R - r = \frac{a}{6} \quad \dots (2)$$

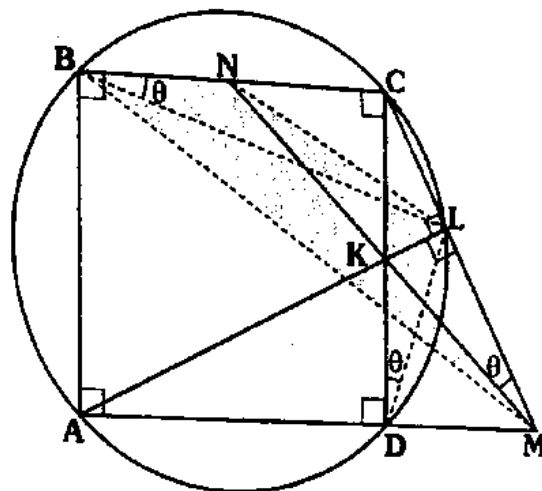
• De (1) y (2): $R = \frac{25a}{7}$

• $\triangle O_1HQ$: notable $x = 16^\circ$

$$\therefore m\widehat{PQ} = 32^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 208



• Lo que nos piden demostrar en realidad es que el $\triangle BNL$ es inscriptible

• Notamos que el $\triangle DKLM$ es inscriptible

$$\rightarrow m\angle CDL = m\angle KML = \theta$$

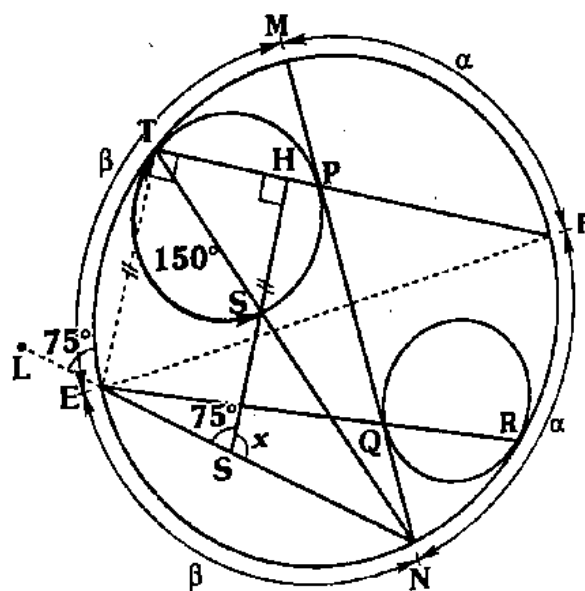
$$\rightarrow m\widehat{CL} = 2\theta$$

• Por ángulo inscrito: $m\angle CBL = \theta$

• Como $m\angle NBL = m\angle NML$

$\therefore \triangle BNL$ es inscriptible

RESOLUCIÓN N° 209



Piden x .

- Por propiedad: $m\widehat{MF} = m\widehat{FN} = \alpha$
 $m\widehat{NE} = m\widehat{EM} = \beta$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

- Es decir $\overline{EF}$ es diámetro

$$\rightarrow m\angle ETF = 90^\circ \rightarrow \overline{ET} \parallel \overline{SH}$$

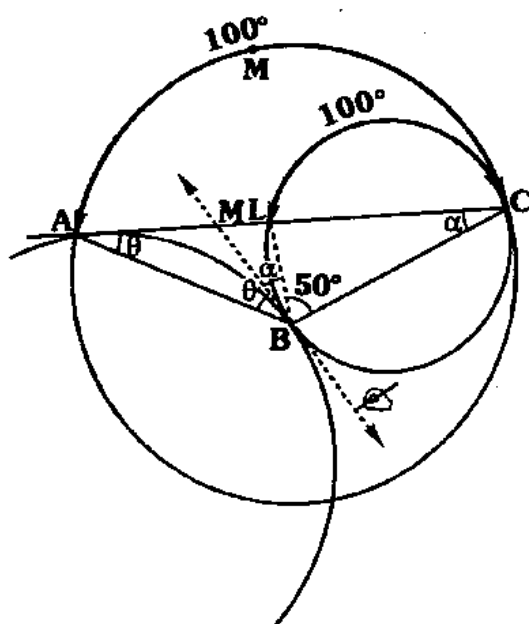
- Como: $m\widehat{TS} = m\widehat{TN} = 150^\circ$

$$\rightarrow m\angle LET = 75^\circ$$

$$\therefore x = 105^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 210



Nos piden $m\angle ABC$.

- Por propiedad:

$$m\widehat{AC} = m\widehat{BC} = 100^\circ$$

- Se traza la tangente en B

$$\rightarrow m\angle MAB = m\angle MBA = \theta \quad y$$

$$m\angle MBL = m\angle BCL = \alpha$$

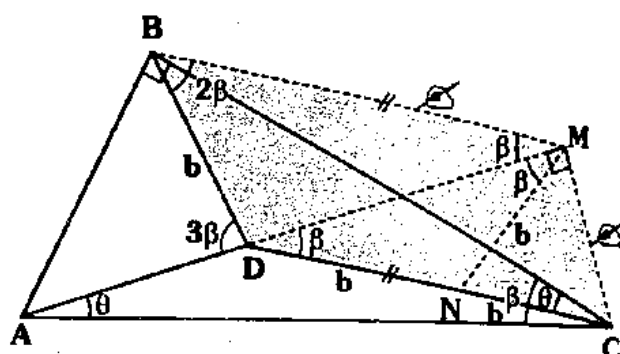
$$\text{En } \triangle ABC: 2x + 2\theta + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\rightarrow \alpha + \theta = 65^\circ$$

$$\therefore m\angle ABC = 115^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 211



Nos piden $\frac{CD}{BD}$.

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta M tal que $m\angle AMC = 90^\circ$

$$\rightarrow \triangle ABMC: \text{inscriptible}$$

- Notemos que:

$$m\angle AMB = \beta \quad y \quad m\angle CDM = \beta$$

$$\rightarrow \overline{DN} \parallel \overline{BM}$$

- En $\triangle DMC$: se traza la mediana MN

$$\rightarrow DN = NC = NM = b$$

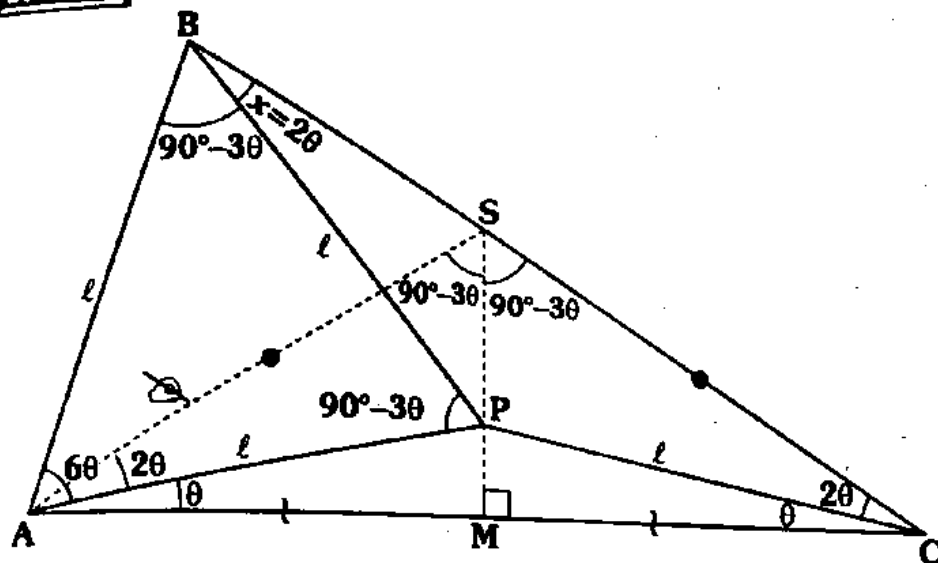
- $\triangle DBMN$: trapecio isósceles

$$BD = MN \rightarrow CD = 2b \quad y \quad BD = b$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = 2$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 212

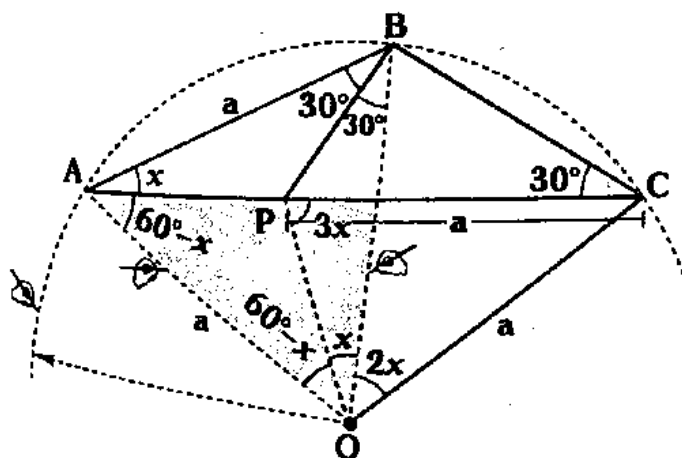


Nos piden x .

- Se traza la recta $\overline{PM}$ $\rightarrow AM=MC \rightarrow AS=SC$
 $\rightarrow m\angle ASM = m\angle MSC = 90^\circ - 30^\circ$
 - $\triangle ABSP$: inscriptible $\rightarrow x = 20^\circ \rightarrow PB = PC$
 - $\triangle ABP$: equilátero $\rightarrow 60^\circ = 60^\circ \rightarrow \theta = 10^\circ$
- $\therefore x = 20^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 213

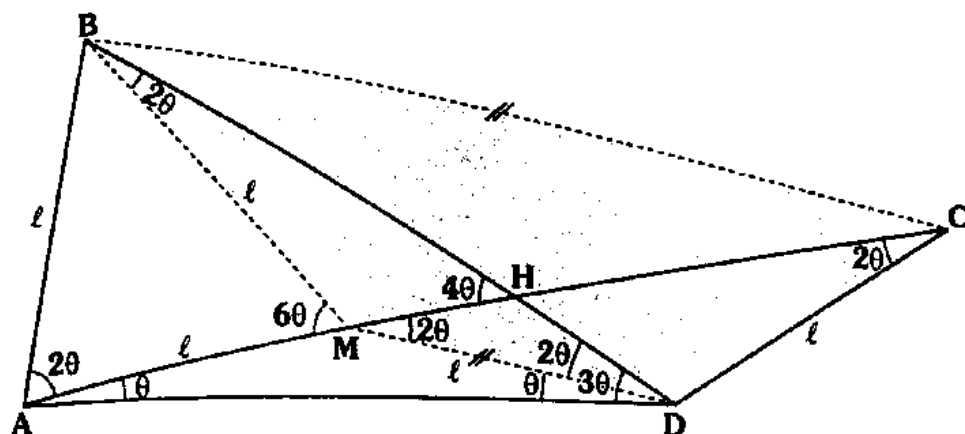


Nos piden x .

- Se traza la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ cuyo centro es O .
 $\rightarrow \triangle AOB$: equilátero
 $\rightarrow m\angle ABP = m\angle PBO = 30^\circ$
 $\rightarrow AP = PO$
 $\rightarrow m\angle PAO = m\angle AOP = 60^\circ - x$
- $\triangle OPC$: isósceles
 $\rightarrow m\angle OPC = m\angle POC = 3x$
- En $\triangle AOP$: $3x = 60^\circ - x + 60^\circ - x$
 $\therefore x = 24^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 216

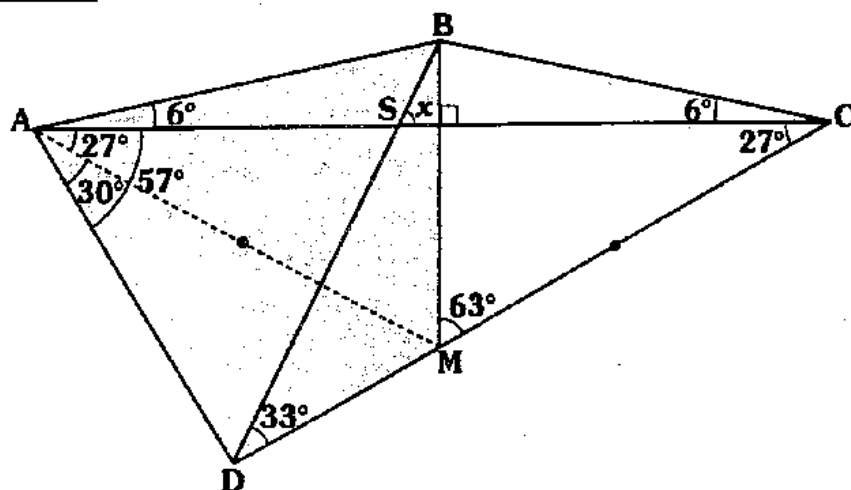


Nos piden θ .

- Se traza $\overline{BM}$, M en $\overline{AC}$ tal que $m\angle AMB = 60^\circ \rightarrow AM = BM$ también: $m\angle MBD = 20^\circ$
- $\triangle MBCD$: inscriptible como $BM = CD$ dicho cuadrilátero es un trapecio isósceles $\rightarrow m\angle HMD = m\angle HDM = 20^\circ$
- Notemos que $\triangle AMD$: isósceles, lo mismo que el $\triangle BMD \rightarrow AM = MD = MB$
- $\triangle ABM$: equilátero $\rightarrow 60 = 60^\circ \therefore \theta = 10^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 217



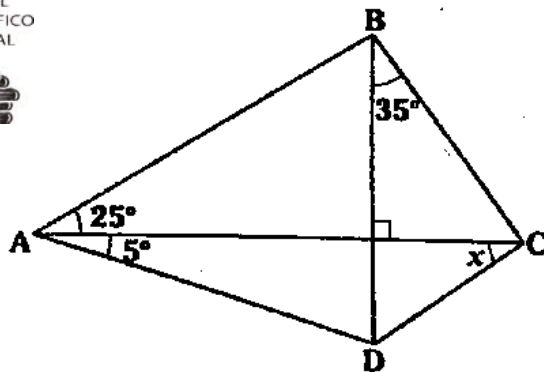
Nos piden x .

- Se ubica M en $\overline{CD}$ tal que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$. Luego: $MA = MC \rightarrow m\angle MAC = 27^\circ$
- Notemos que $m\angle DAB = m\angle BMC = 63^\circ \rightarrow \triangle DABM$: inscriptible $\rightarrow m\angle MDB = m\angle MAB = 33^\circ$
- Luego, en el $\triangle DSC$: $x = 33^\circ + 27^\circ \therefore x = 60^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 218

MATERIAL
BIBLIOGRAFICO
UNIVERSAL



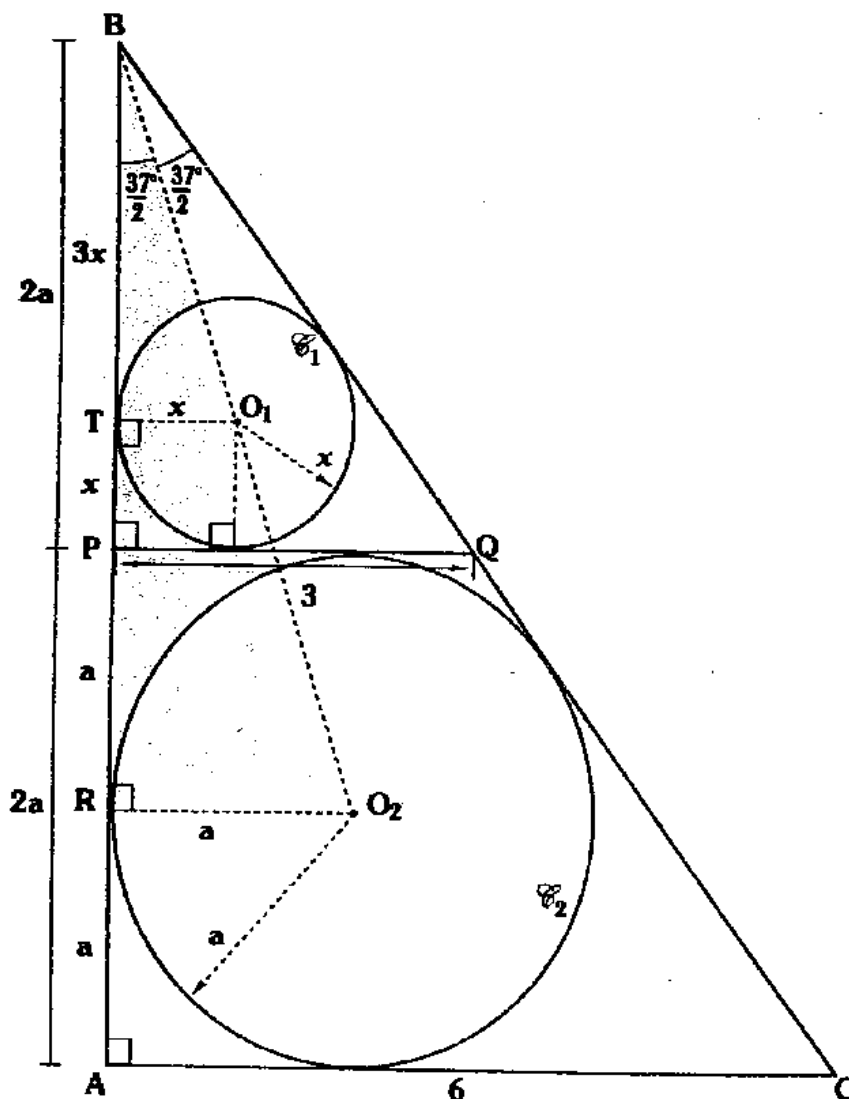
Nos piden x .

- Es una aplicación de la propiedad (pag. 77)
- Para $\theta = 5^\circ \rightarrow x = 3\theta$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 219



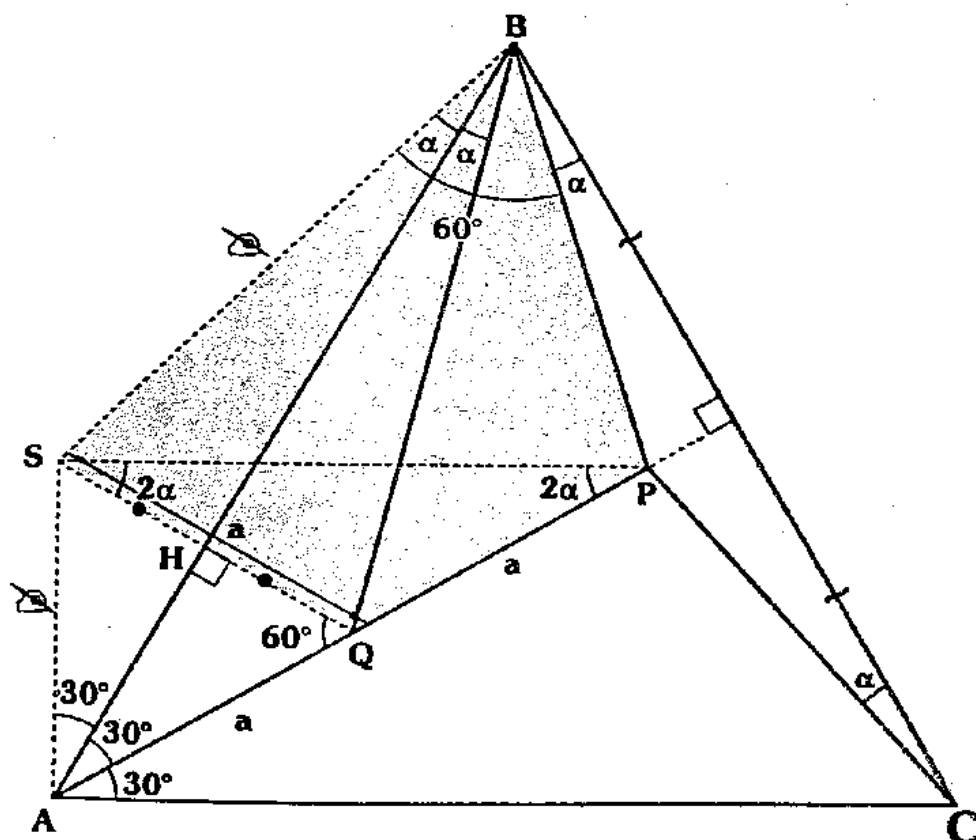
Nos piden x.
 Como $AC=2(PQ)$ y $\overline{AC} \parallel \overline{PQ} \rightarrow PQ$ es base media $\rightarrow BP=PA$.

Sea "a" el radio de $\mathcal{C}_2 \rightarrow PA=23a=PB$

$$\therefore \angle BRO_2 : \text{notable de } \frac{37^\circ}{2} \rightarrow m\angle PBQ = 37^\circ \rightarrow PB = 4$$
$$\Delta BTO_1: TB = 3x \rightarrow 3x + x = 4$$

$$\therefore x=1$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 220

- Se ubica S en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ tal que $\overline{QS} \perp \overline{AB}$ y $QS=QA$

- ΔAQS : equilátero $\rightarrow QH=HS \rightarrow SB=BQ$

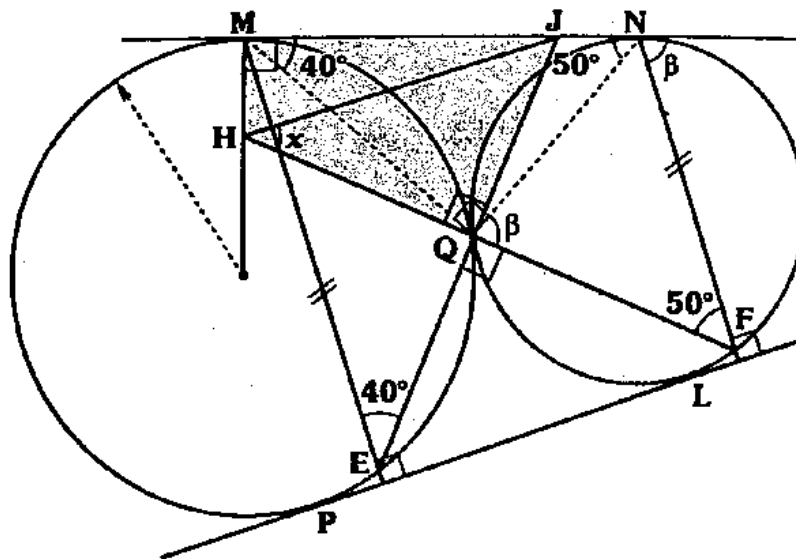
- $\triangle SBPQ$: inscriptible $\rightarrow m\angle QPS = m\angle QSP = 2\alpha$.

- $\Delta S Q P: 2\alpha + 2\alpha = 60^\circ$

$$\therefore \alpha = 15^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 221



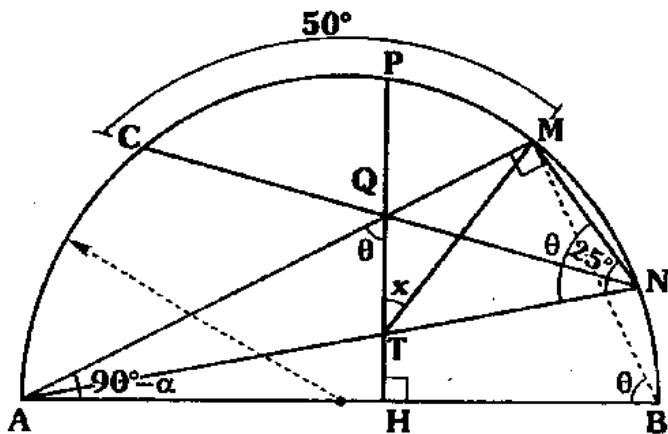
Nos Piden x .

- Por propiedad: $m\angle MQN = 90^\circ \rightarrow m\angle QMN = 40^\circ \rightarrow m\angle MEQ = 40^\circ$
- Como $\overline{ME} \parallel \overline{NF} \rightarrow m\angle EQF = 90^\circ \rightarrow m\angle HQJ = 90^\circ$
- $\triangle HMJQ$: inscriptible

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 222



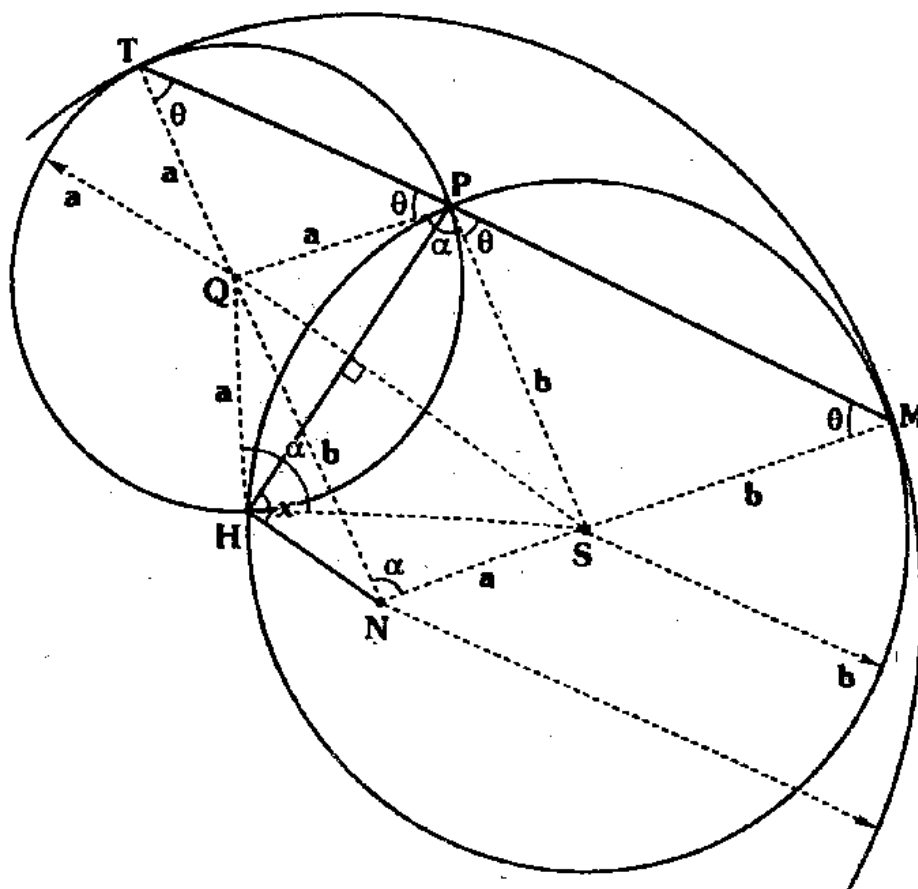
Nos Piden x .

- Por ángulo inscrito: $m\angle CNM = 25^\circ$
- Sea $m\angle ABM = \theta \rightarrow m\angle ANM = \theta$ y $m\angle HQA = \theta$
- $\triangle TQMN$: inscriptible

$$\therefore x = 25^\circ$$

Clave

RESOLUCIÓN N° 223



Nos Piden x .

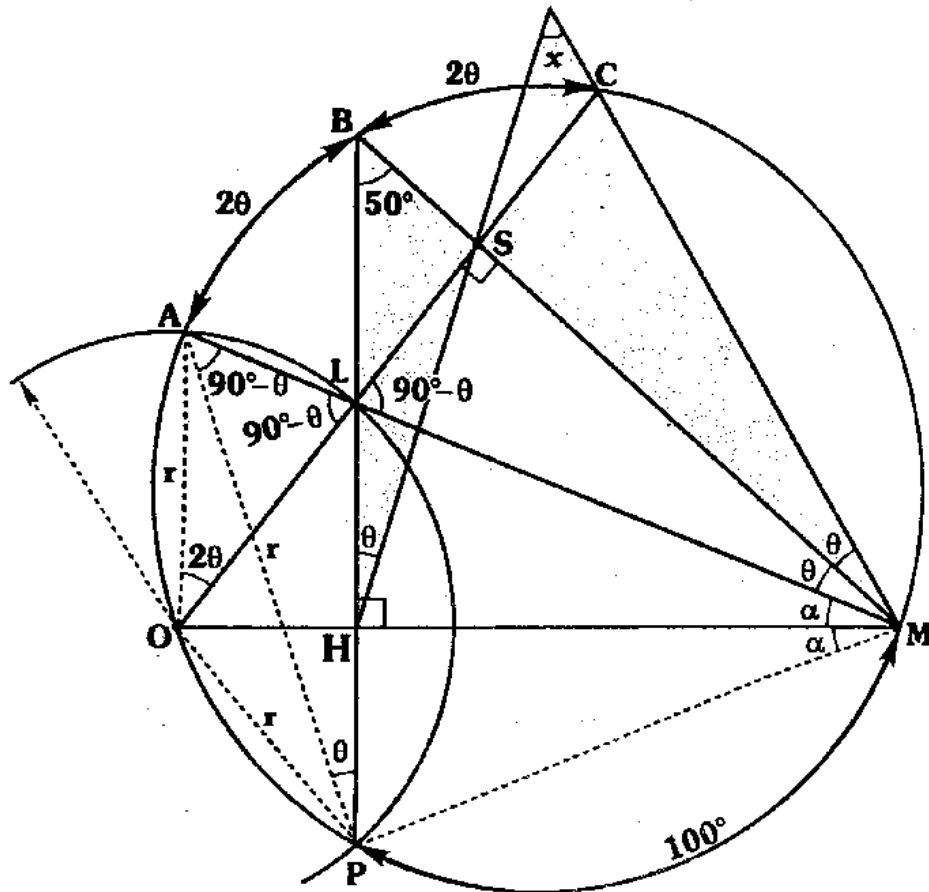
- Son colineales:
 - N, Q y T
 - N, S y M
- Notemos que:
 - HQPS: trapezoide simétrico $\overline{HP} \perp \overline{QS}$
 - NQPS: paralelogramo
- Luego $m\angle QHS = m\angle QNS$

$\triangle QHNS$ es inscriptible y como $QH=NS \rightarrow \overline{HN} \parallel \overline{QS}$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 224



Nos Piden x .

- Sea $m\angle APL = \theta$

$$\rightarrow m\angle AOL = 2\theta \quad \text{y} \quad m\angle ALO = 90^\circ - \theta$$

- También $m\angle AMQ = \theta$

$$\rightarrow m\angle OSM = 90^\circ$$

- $\triangle PMLO$: trapezoide simétrico

$$\rightarrow \overline{OM} \perp \overline{LP}$$

- $\triangle HLMS$: inscriptible $\rightarrow m\angle LHS = \theta$

- En la región sombreada:

$$x + \theta = 50^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave **A**

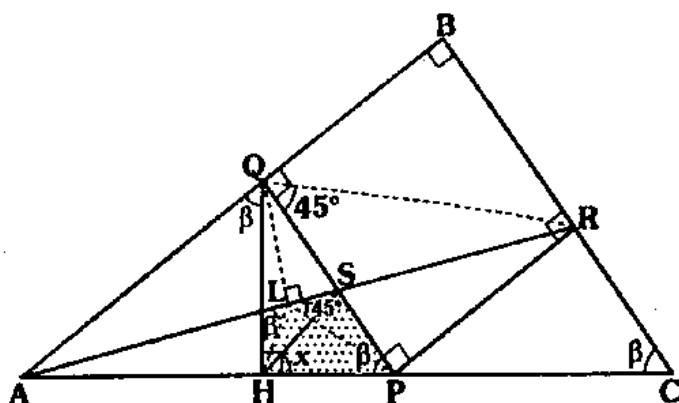
The diagram shows a circular arc with center O. Points A, S, T, L, Q, B, and P are marked. Angles are labeled with Greek letters: α , θ , ω , x , y , z , and ϕ . A shaded region is shown between the arc and a line segment.

- $x = 90^\circ$

The diagram shows a triangle ABC with a vertical line segment BH from vertex B to the base AC . A point O is located on BH . A line segment PQ is drawn through O , perpendicular to BH . The diagram illustrates the relationship between the angles of the triangle and the position of the point O . The angle α is marked at vertices A and C , and at the intersection of PQ and BH . The angle $90^\circ - \alpha$ is marked at vertex B and at the intersection of PQ and BH . The angle x is marked at vertex O .

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave ☒ D

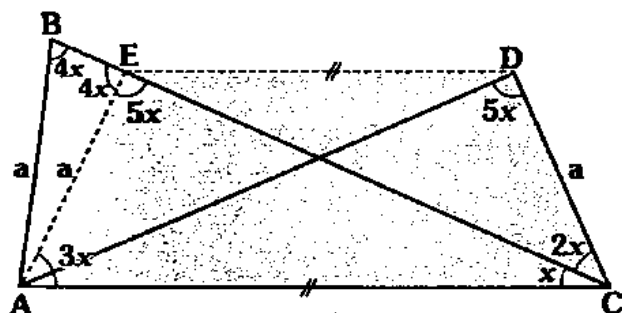
RESOLUCIÓN N° 227

Nos piden "x".

- Se traza $\overline{QL} \perp \overline{AR}$ entonces $\triangle QRPL$ es inscriptible $\Rightarrow m\angle PLR = 45^\circ$
- Sea $m\angle APQ = \beta \Rightarrow m\angle AQH = \beta$
- $\triangle HLSP$: inscriptible

$x = 45^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 228

Nos piden “x”.

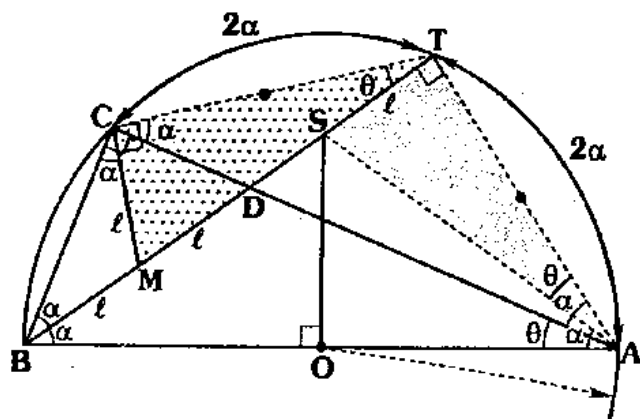
- Se ubica E en $\overline{BC}$ tal que:
- $$m\angle AEB = 4x \Rightarrow AB = AE$$
- $$\Rightarrow m\angle EAC = 3x \Rightarrow AE = DC$$
- es un trapecio isósceles, el cual también es inscriptible.

$$\Rightarrow m \angle AEC = m \angle ADC = 5x$$

- En E: $4x + 5x = 180^\circ$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave  **E**

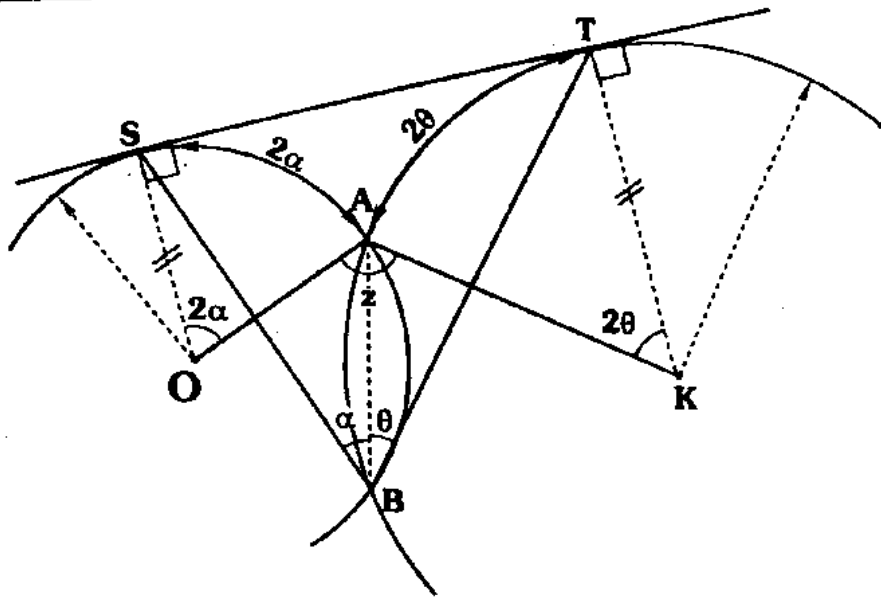
RESOLUCIÓN N° 229

- Sea $m\angle OAD = \theta \rightarrow m\angle SAT = \theta$
- Como $m\widehat{CT} = m\widehat{TA} = 2\alpha \rightarrow CT = TA$
- En el $\triangle BCD$, se traza la mediana $\overline{CM} \rightarrow BM = MD = CM$
- Notemos que $\angle CMT \cong \angle STA$
 $\rightarrow MC = ST$

$$\therefore \frac{BD}{ST} = \frac{2\ell}{\ell} = 2$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 230



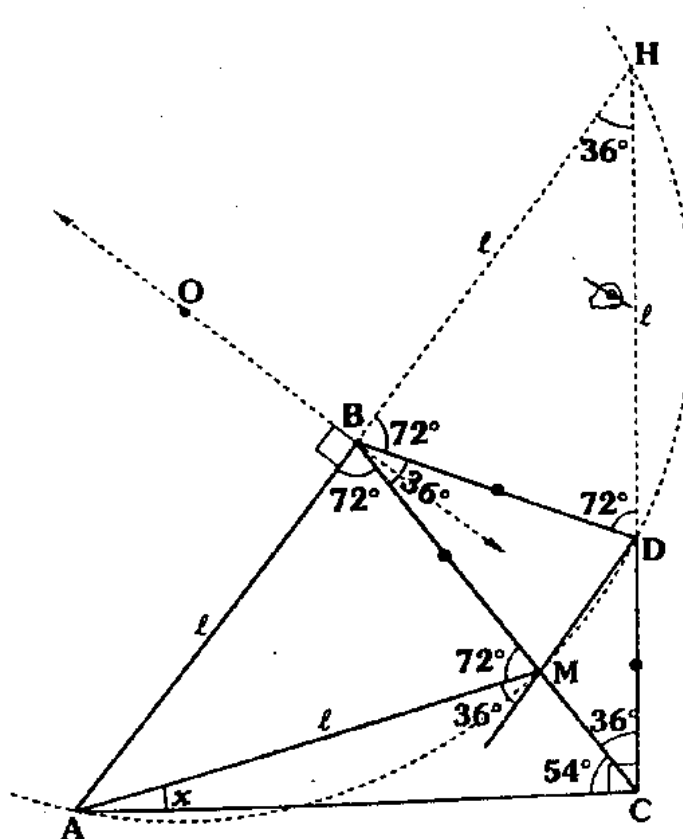
Piden: $\frac{m\angle SBT}{m\angle OAK}$

- Sea $m\angle ABS = \alpha$ y $m\angle ABT = \theta \rightarrow m\angle SBT = \alpha + \theta$
- Como $\overline{OS} \parallel \overline{KT} \rightarrow m\angle OAT = 2\alpha + 2\theta$

$$\therefore \frac{m\angle SBT}{m\angle OAK} = \frac{1}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 231

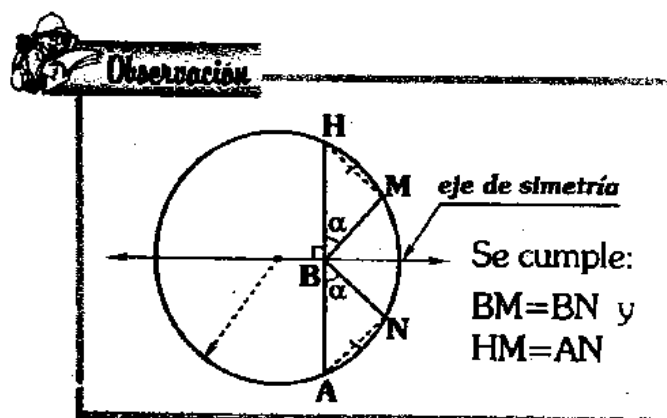


Nos piden x .

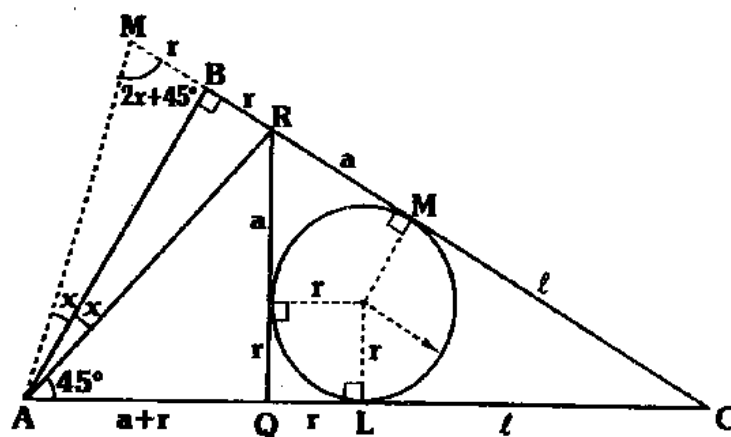
- Las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en $H \rightarrow AB=BC=BH$
- $\triangle AMDH$: inscriptible, sea O el centro de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero.
- Como $AB=BH \rightarrow \overline{OB} \perp \overline{AH}$
- De la observación: $BD=BM$ y $AM=\ell \rightarrow m\angle AMB = 72^\circ$
- En $\triangle ACM$: $x + 54^\circ = 72^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$

Clave B



RESOLUCIÓN N° 232

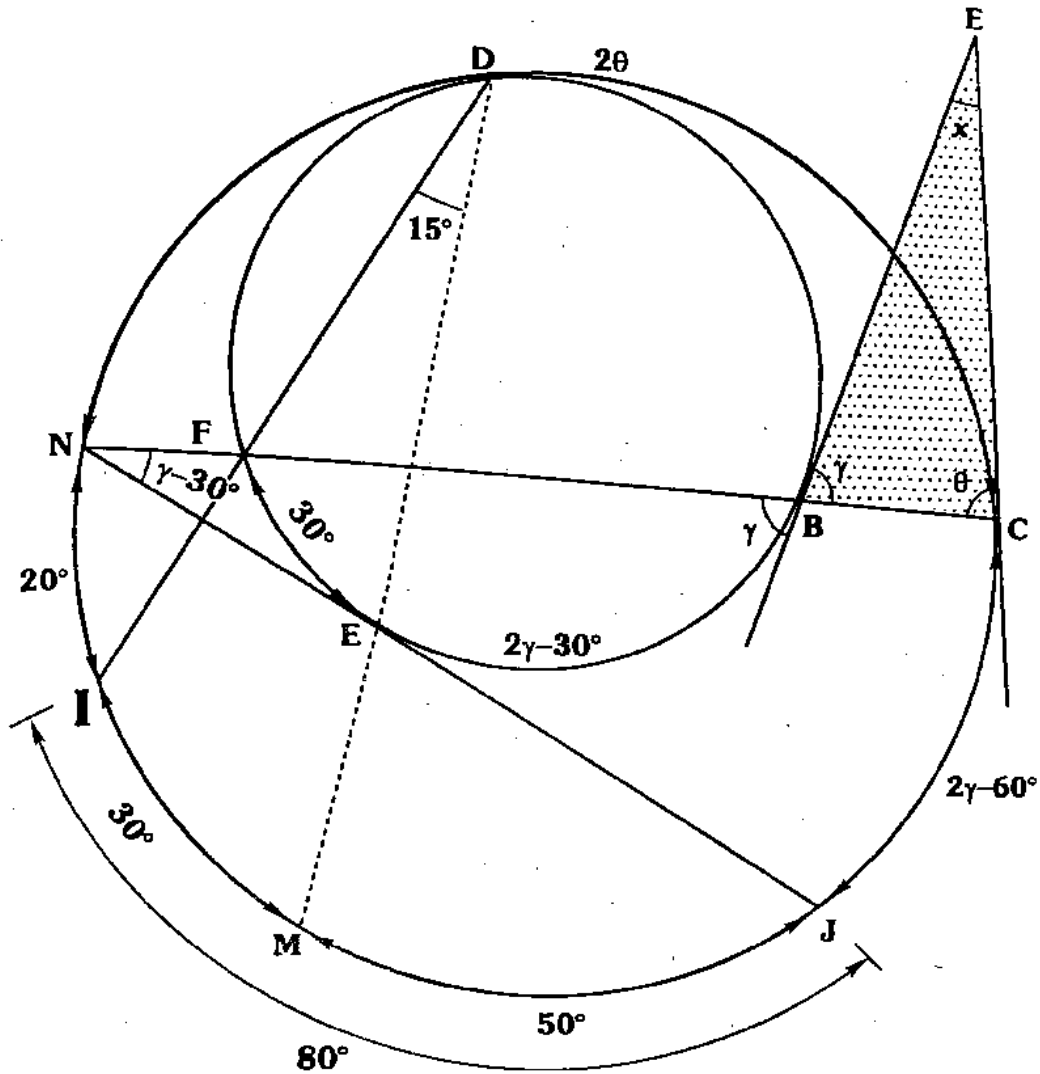


Nos piden x .

- Prolongamos $\overline{CB}$ hasta M tal que $BM=r \rightarrow AR=AM$ y $m\angle BAM = x$
- Notemos que $AC=CM \rightarrow \triangle AMC$: isósceles $\rightarrow m\angle MAC = m\angle AMC = 45^\circ + 2x$
- En $\triangle ABM$: $x + 2x + 45^\circ = 90^\circ$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave A



Piden x .

- En $\triangle BEC$: $x + \theta + \gamma = 180^\circ$... (1)
- Al prolongar $\overline{DM}$ hasta que corte a la circunferencia mayor en M, notamos:

$$m\widehat{NM} = m\widehat{MJ} = 50^\circ$$

$$\cdot \quad m\widehat{FEB} = 2\gamma \rightarrow m\widehat{EB} = 2\gamma - 30^\circ \rightarrow m\angle JNC = \gamma - 30^\circ \rightarrow m\widehat{CJ} = 2\gamma - 60^\circ$$

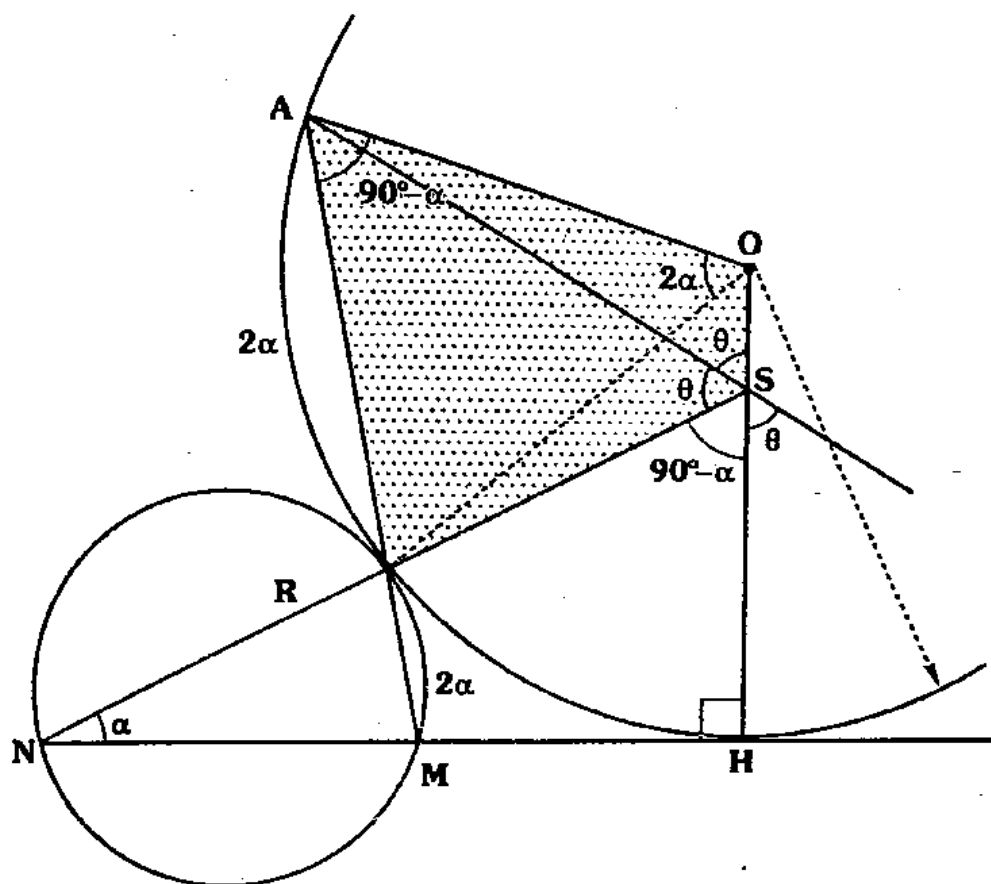
• Finalmente: $2\theta + 2\gamma - 60^\circ + 80^\circ + 20^\circ = 360^\circ$
 $\rightarrow \theta + \gamma = 160^\circ$

- $E_n(1)$:

$x = 20^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 236



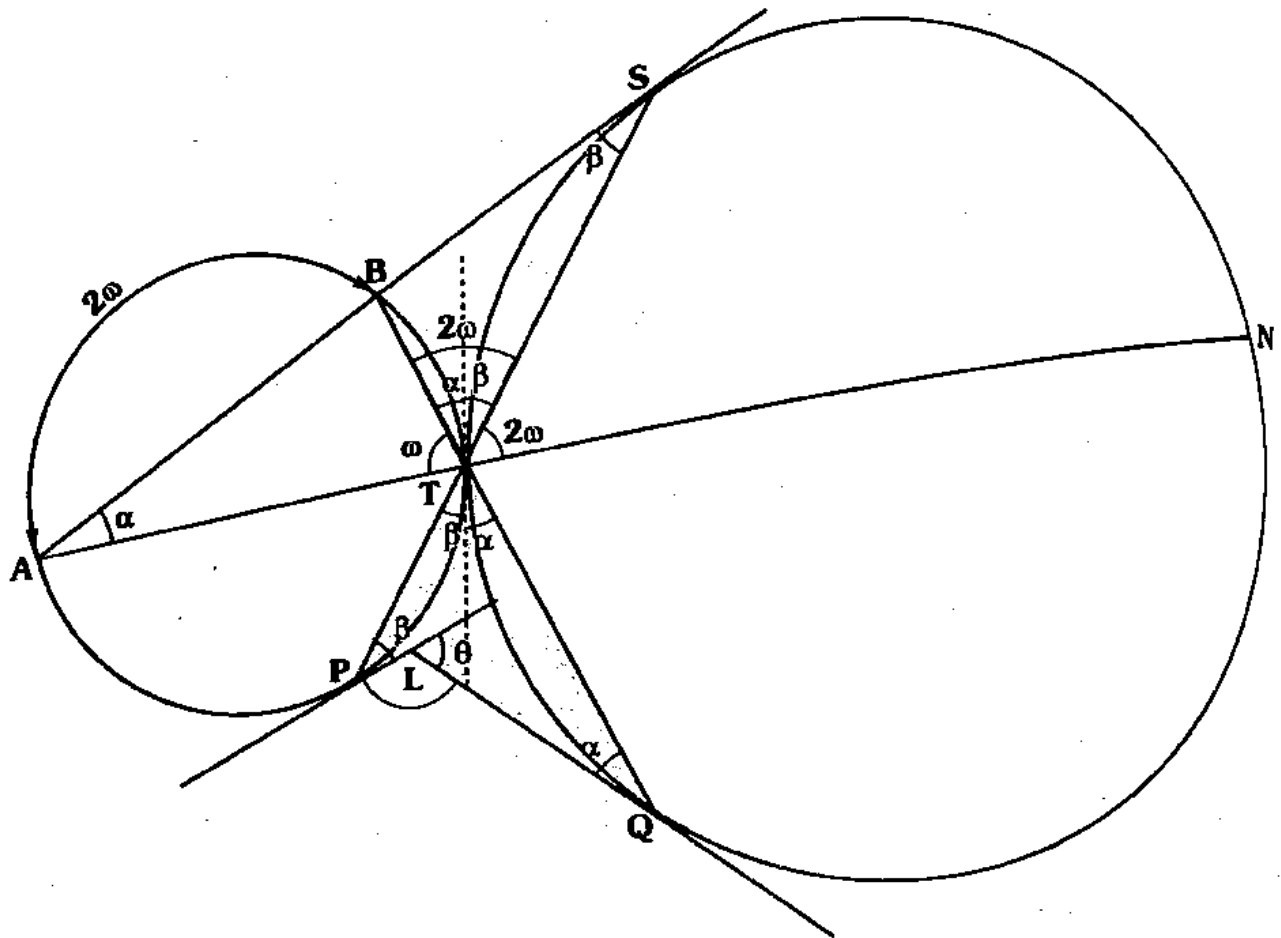
Piden θ .

- Por propiedad: $m\widehat{MR} = m\widehat{RA} = 2\alpha$
- Como el $\triangle ROA$: es isósceles $\rightarrow m\angle RAO = 90^\circ - \alpha$
- En $\triangle NHS$: $m\angle NSH = 90^\circ - \alpha$
- $\triangle RSOA$: inscriptible $\rightarrow \theta = 2\alpha \quad \dots (1)$
- En $\triangle HSN$:

$$2\theta = 90^\circ + \alpha \quad \dots (2)$$
- De (1) y (2):

$$\theta = 60^\circ$$

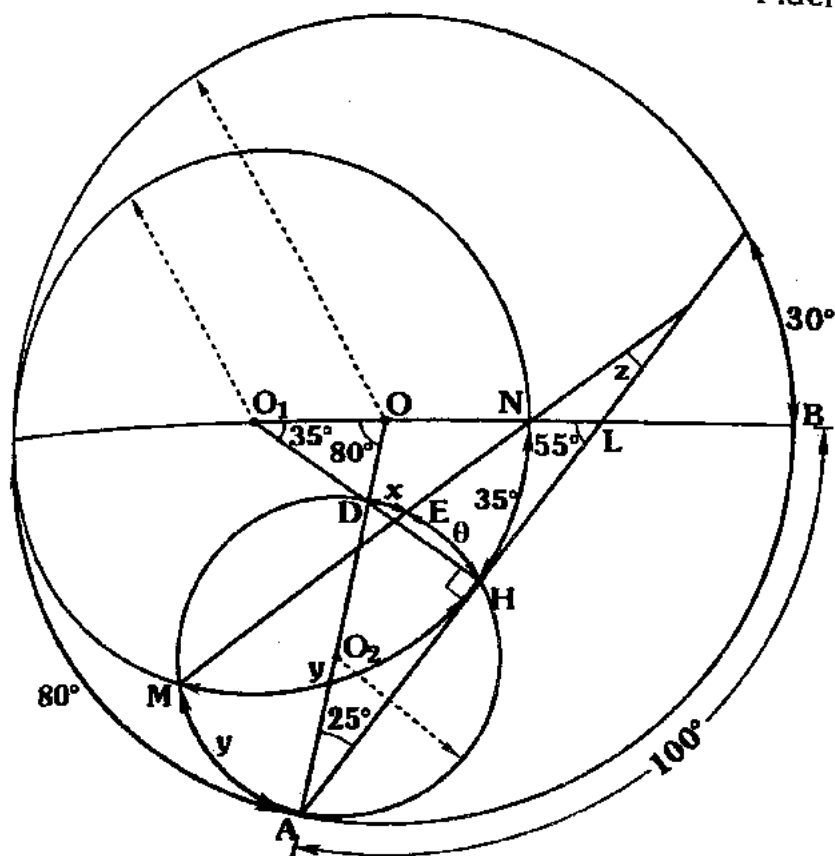
Clave **C**



254

RESOLUCIÓN N° 238

Piden x .



- O_1, O_2 y A : colineales, lo mismo que O_1, D y H
- Se sabe que $m\widehat{AM} = m\widehat{MH}$
- Por ángulo exterior:

$$z = \frac{y - \theta}{2} = \frac{y - 35}{2}$$

$$\rightarrow \theta = 35^\circ$$

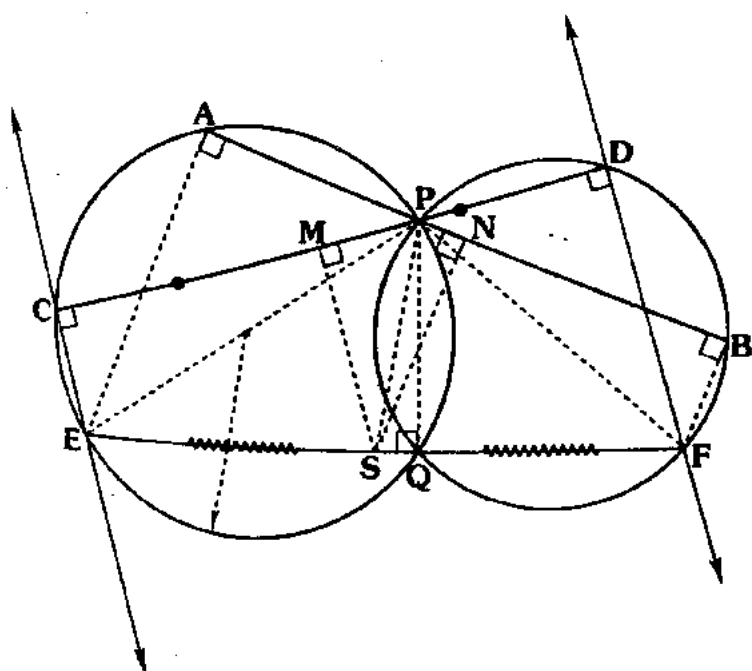
- Por ángulo inscrito:

$$\frac{m\widehat{DH}}{50^\circ} = x + \theta$$

$$\therefore x = 15^\circ$$

Clave B

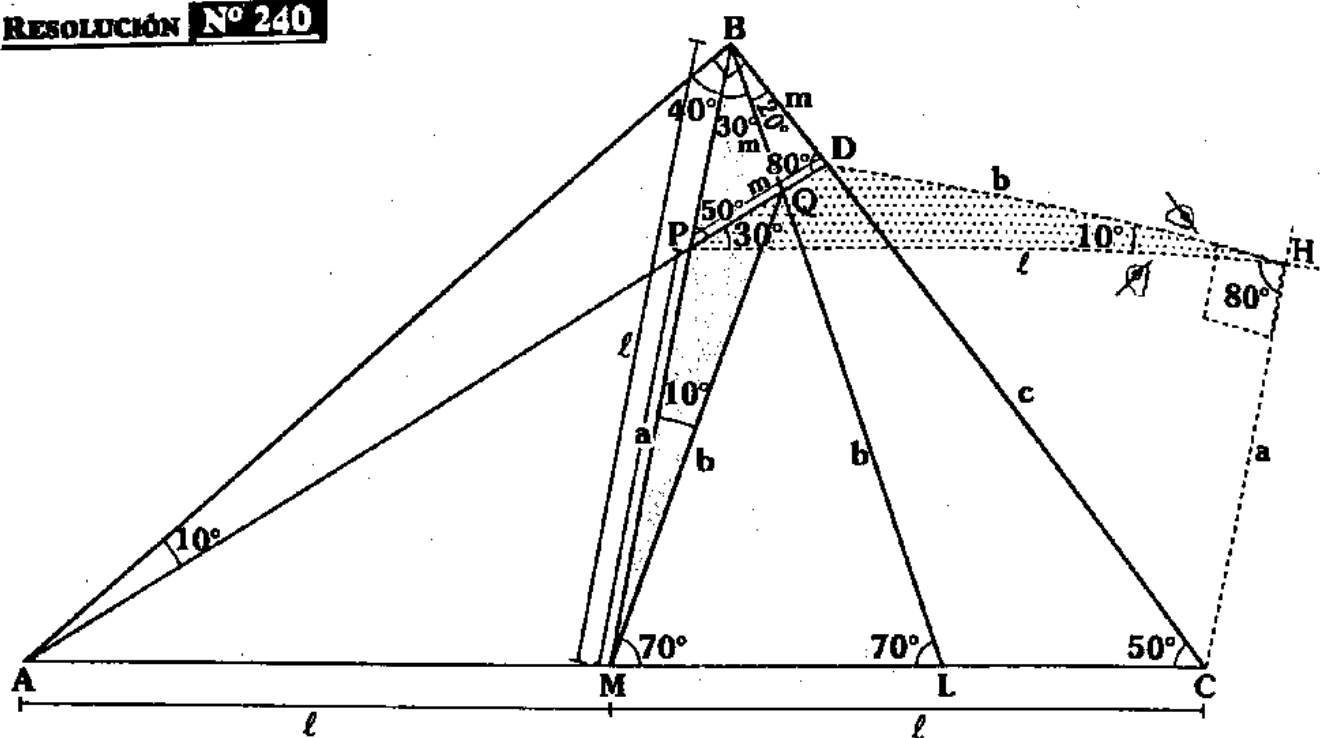
RESOLUCIÓN N° 239



Por demostrar que el $\triangle QNPM$ es inscriptible

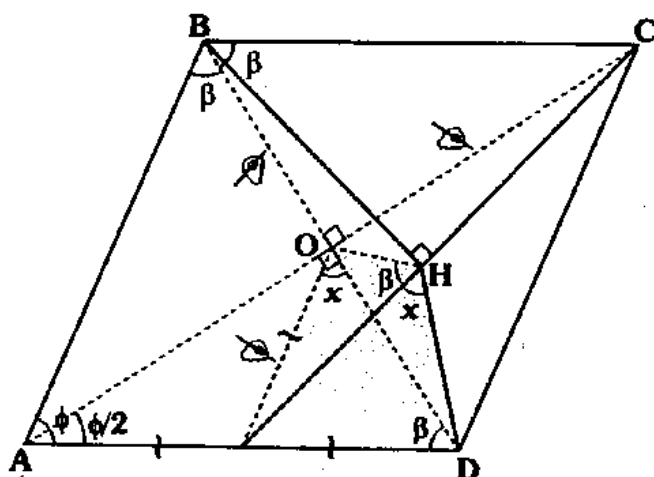
- Trazamos los diámetros $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ entonces E, QA y F son colineales
- Por propiedad: $\overline{CE} \parallel \overline{DF}$
entonces $ECDF$ es un trapecio y $\overline{SM}$ es su base media $\rightarrow \overline{SM} \perp \overline{CD}$
- Análogamente: $\overline{SN} \perp \overline{AB}$
- Notamos que S, M, P, N y Q son concíclicos.

$\therefore \triangle QNPM$: inscriptible

RESOLUCIÓN N° 240

- Piden la relación entre a , b y c .
- $\triangle ABQN$: inscriptible
- Se traza el paralelogramo $MPHC \rightarrow MP=HC=a$
- Como: $PD=DB=BQ \rightarrow \triangle MBQ \cong \triangle HPD \rightarrow DH=b$ y $m\angle PHC = 10^\circ$
 $\rightarrow m\angle DHC = 90^\circ$
- Finalmente en el $\triangle DHC$: $c^2 = a^2 + b^2$

Clave  **C**

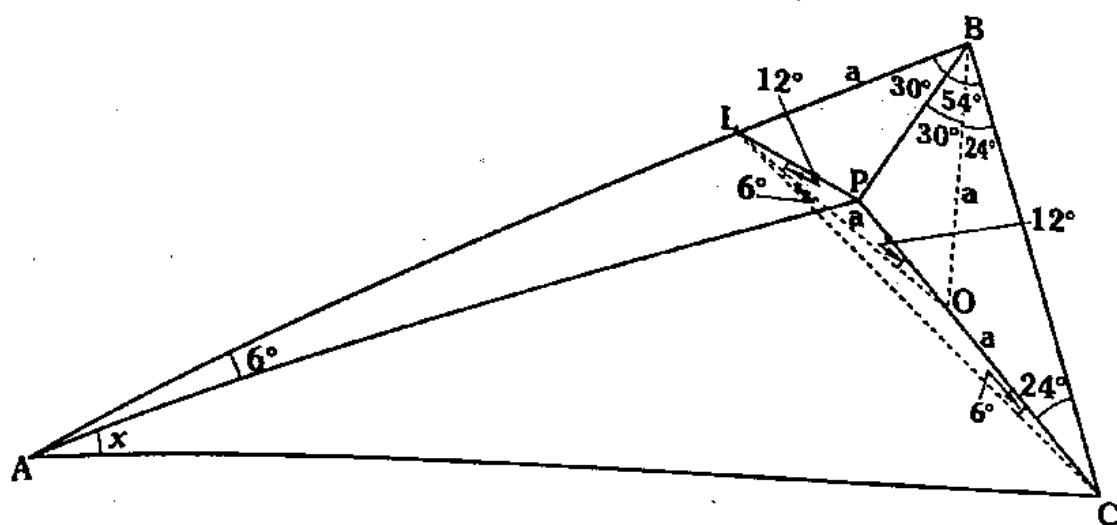
RESOLUCIÓN N° 241

Fiden x.

- Trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ secantes en $O \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$.
- $\triangle OBCH$: inscriptible $\rightarrow m\angle OHM = \beta$
- $\triangle OHDM$: inscriptible, pues
 $m\angle OHM = m\angle MDO = \beta \rightarrow m\angle MOD = x$
- En $\triangle DHC$: $\overline{OM}$ es mediana
 $\rightarrow m\angle AOM = \phi/2$

$$\therefore x = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$$

Clave **E**

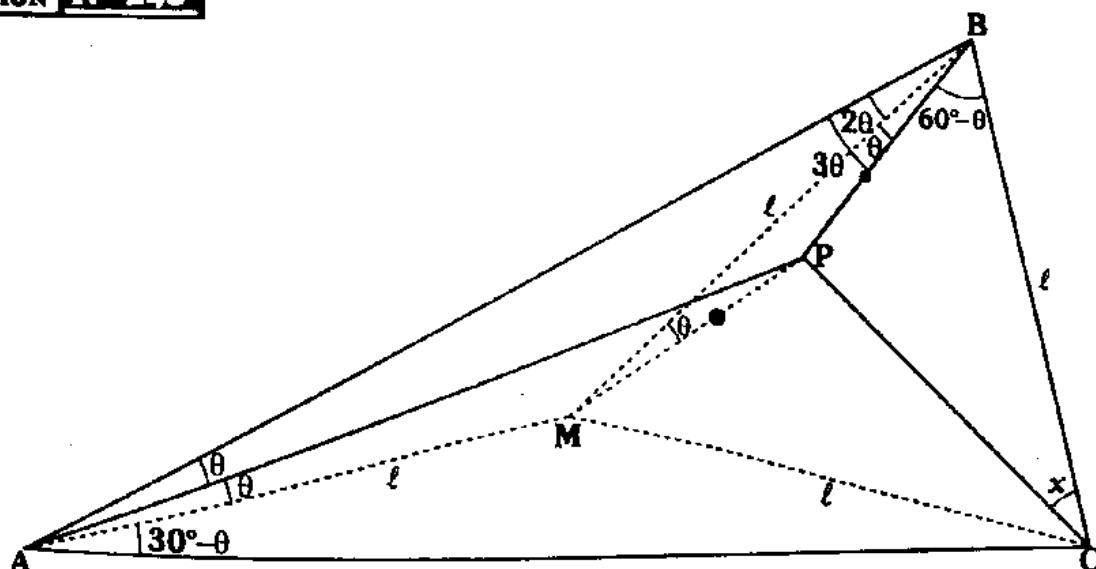


Piden x.

- Se ubica L en $\overline{AB}$ tal que $m\angle PCL = 6^\circ \rightarrow \triangle ALPC$ es inscriptible y $m\angle LCB = 30^\circ$
- Se ubica O en $\overline{PC}$ tal que $m\angle CBO = 24^\circ \rightarrow OB = OC$ y $m\angle LBO = 60^\circ$
- Se concluye que O es circuncentro del $\triangle LBC \rightarrow OL = OB = OC$
- Como $\triangle ALPC$: inscriptible $x = 18^\circ$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 243

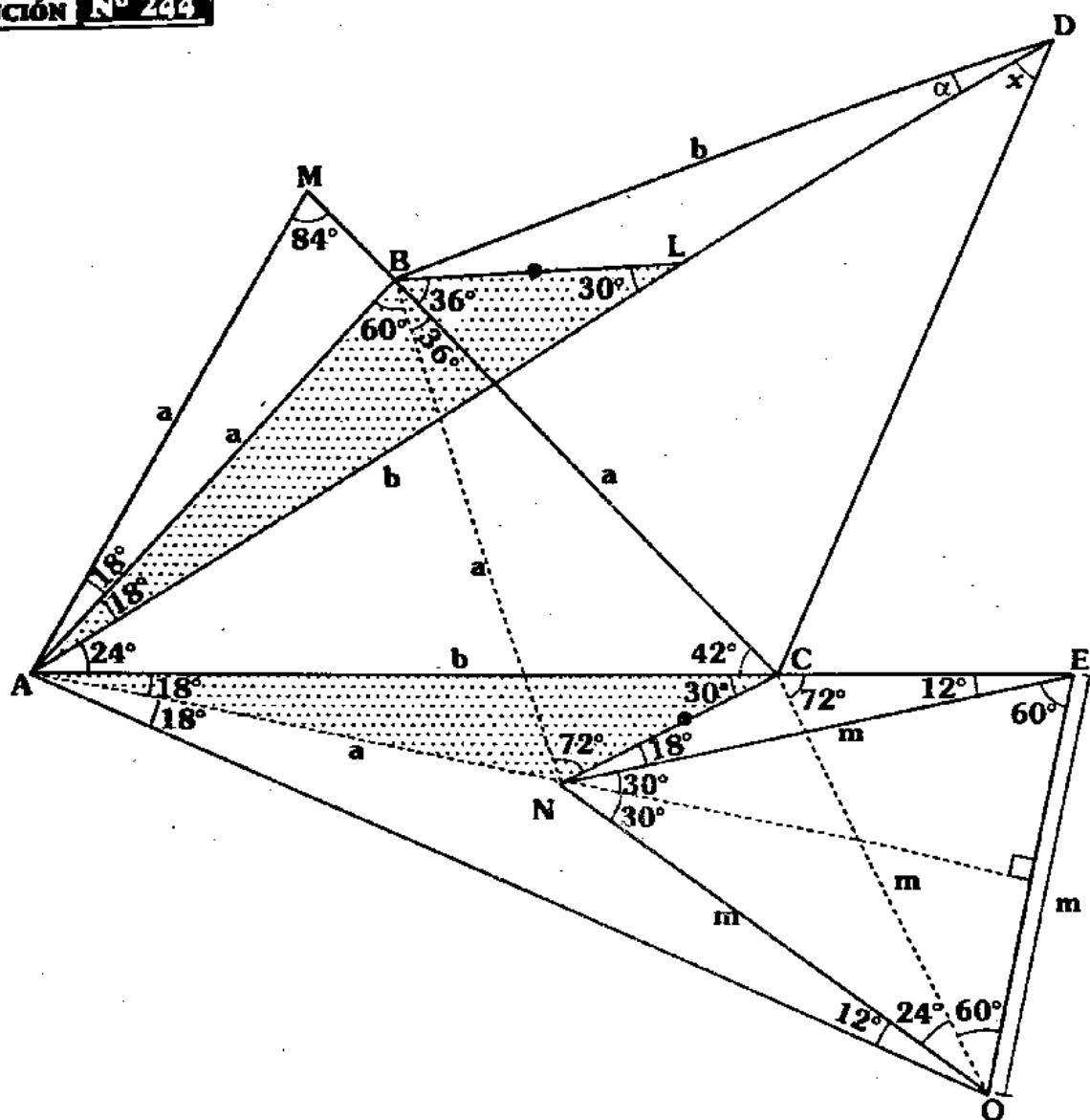


Piden x.

- Se ubica el circuncentro M del triángulo ABC $\rightarrow MA = MB = MC$
- $\rightarrow \triangle MBC$: equilátero, $m\angle MBP = \theta$ y $m\angle MBA = m\angle MAB = 2\theta$
- $\triangle ABPM$: inscriptible $\rightarrow m\angle PMB = \theta \rightarrow MP = PB$
- En el $\triangle MBC$: $x = 30^\circ$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 244



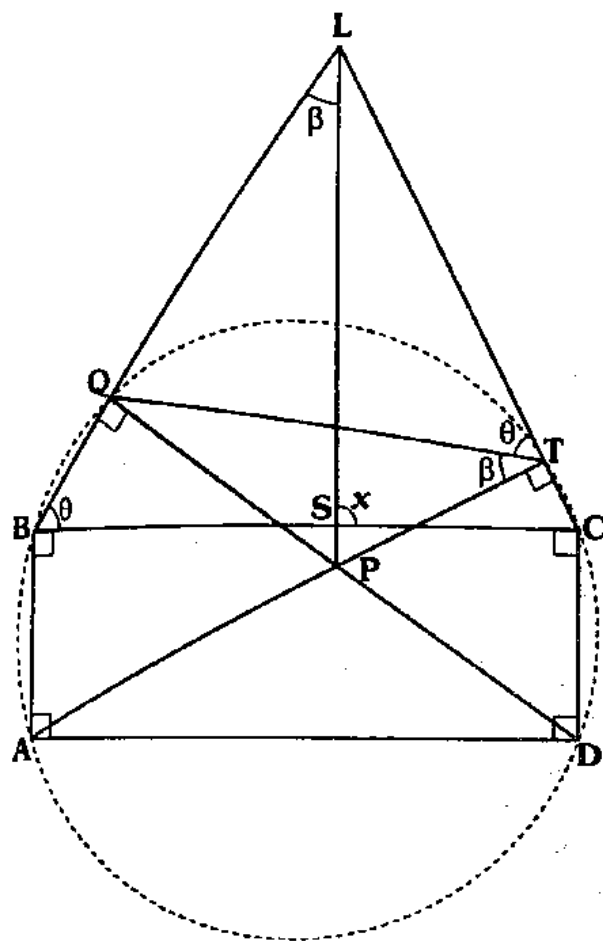
Piden θ .

- Se traza el $\triangle ANC$ tal que: $m\angle NAC = 18^\circ$ y $AN = AB \rightarrow \triangle ABN$: equilátero.
- Se ubica L en $\overline{AD}$ tal que $m\angle ALB = 30^\circ \rightarrow \triangle ABL \cong \triangle ACN$
- Sea E en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $m\angle AEN = 12^\circ$
- Sea O circuncentro del $\triangle NCE$
- En $\triangle ACO$: se verifica $b = m$
- $\triangle BLD \cong \triangle NCE \rightarrow \alpha = 12^\circ \rightarrow m\angle LBD = 18^\circ$
- $\triangle AMC \cong \triangle CBD$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 245



- Por demostrar que $x = 90^\circ$
- Como $m\angle BQD = m\angle ATC = 90^\circ$ los puntos Q y T estarán en la circunferencia circunscrita al rectángulo ABCD.
- En $\triangle BSL$: $x = \theta + \beta$
- En $\triangle BQTC$:

$$m\angle QBC = m\angle QTC = \theta$$
- En el $\triangle PQLT$ que es inscriptible:

$$m\angle QLP = m\angle QTP = \beta$$
- En T: $\theta + \beta = 90^\circ$

$$\therefore x = 90^\circ$$



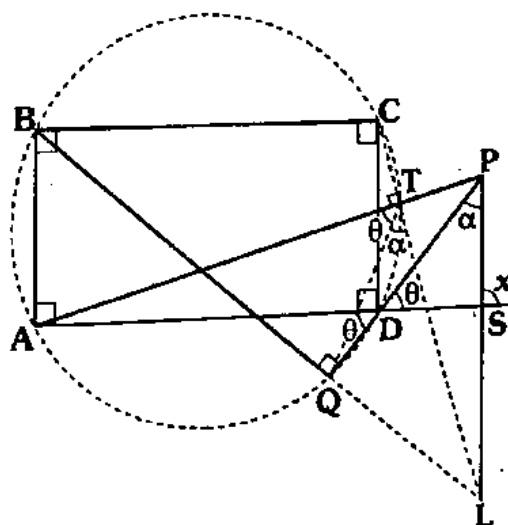
Observación

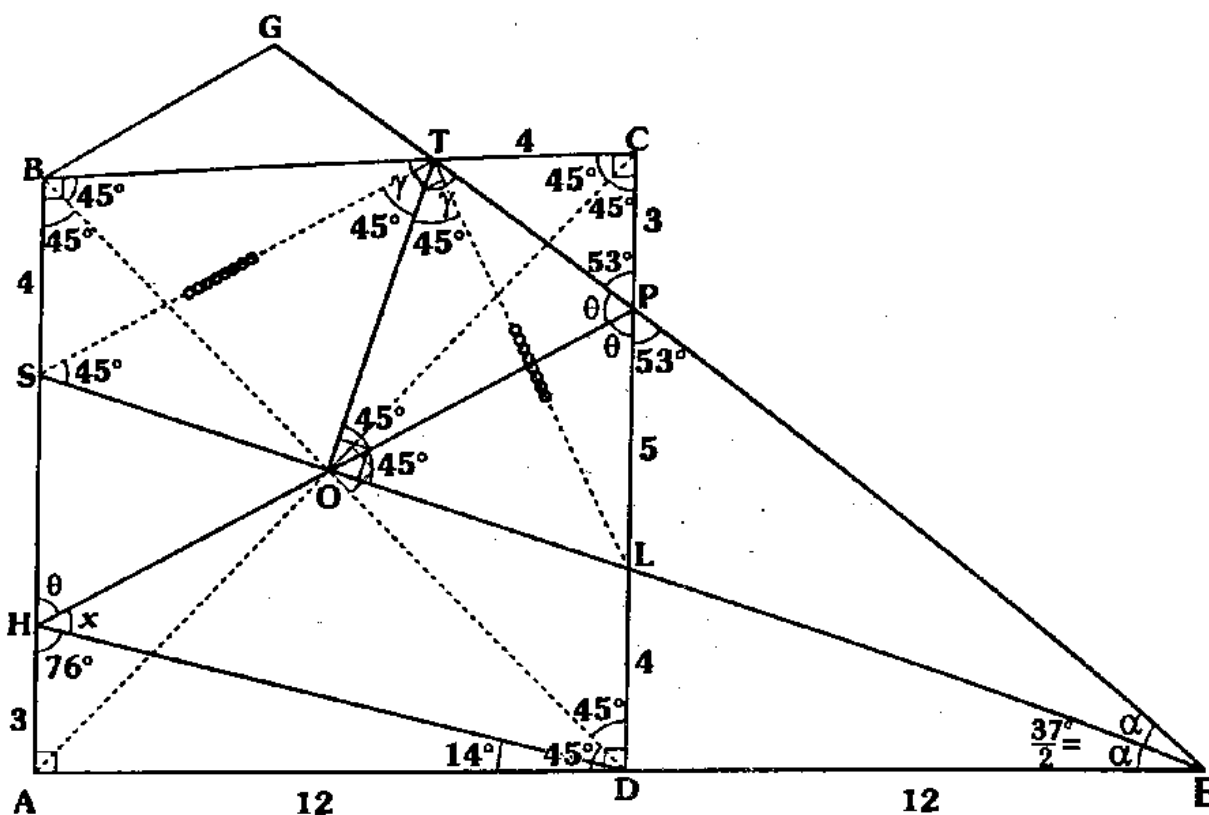
En punto P no necesariamente es interior también puede ser exterior o estar en algún lado del rectángulo (la prueba es similar)

Por ejemplo

$$x = \alpha + \theta$$

$$\therefore x = 90^\circ$$



RESOLUCIÓN N° 246

Nos piden x .

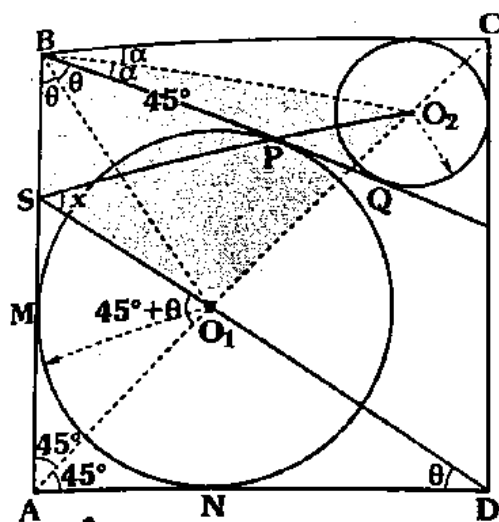
- Como BHGP es trapecio isósceles $\rightarrow m\angle BHP = m\angle HPT = m\angle HPD \rightarrow O$ es excentro de $\triangle TCP$ y $\triangle PDE \rightarrow m\angle POL = 45^\circ$ y $m\angle EOT = 90^\circ$
- $\triangle OTBS$ y $\triangle OTCL$: inscriptibles $m\angle STL = 90^\circ$ y $ST = TL$
- $\triangle SBT \cong \triangle TCL \rightarrow TC = 4 \rightarrow m\angle TPC = 53^\circ$ y $\alpha = \frac{37^\circ}{2} \rightarrow DE = 12$ y $PL = 5$
- Como $AH = 4$ y $AD = 12 \rightarrow \triangle HAD$: notable de $14^\circ \rightarrow m\angle AHD = 76^\circ$
- Como $\theta = \frac{127^\circ}{2} \rightarrow$ en H:

$$x + \theta + 76^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = \frac{81^\circ}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 247



Piden x .

- Como: $\triangle AO_1D \cong \triangle AO_1B$
 $\rightarrow m\angle ABO_1 = \theta$
- Notemos que $m\angle O_1BO_2 = 45^\circ$
- $\triangle SBO_2O_1$: inscriptible, pues:

$$m\angle SBO_2 = m\angle SO_1A$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

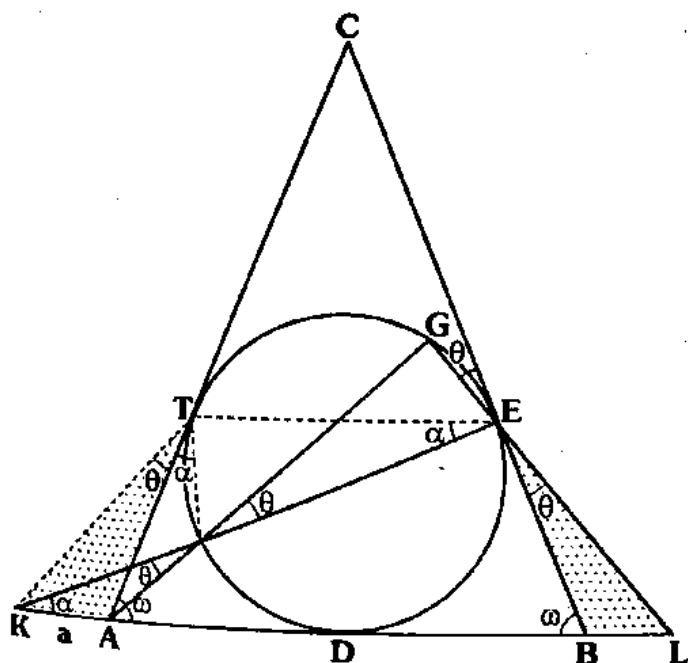
Clave **D**



Nota

El dato que $\theta = 33^\circ$, no era necesario.

RESOLUCIÓN N° 248

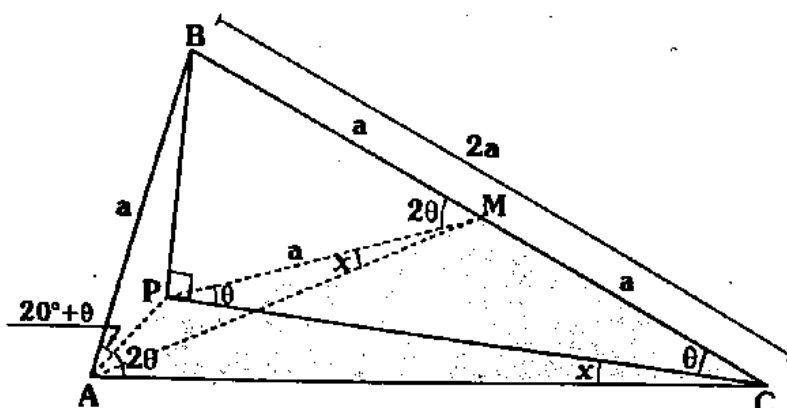


Nos piden $\frac{a}{b}$.

- Por dato $AB = BC$
 $\rightarrow m\angle TAB = m\angle ABE = \omega$
 $\rightarrow TE \parallel AB$
- Sea $m\angle AKE = \alpha$
 $\rightarrow m\angle FET = \alpha = m\angle FTA = \alpha$
 $\rightarrow \triangle KAFT$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle ATK = \theta$
- $\triangle KAT \cong \triangle LBE \rightarrow a = b$

$$\therefore \frac{a}{b} = 1$$

Clave **D**

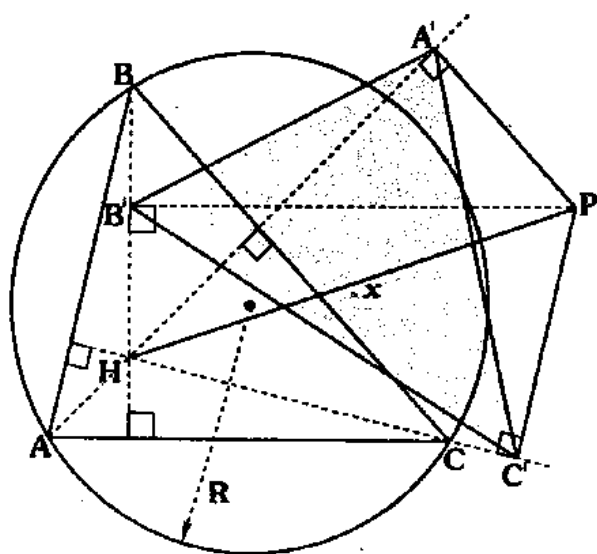
RESOLUCIÓN N° 249

Nos piden “x”.

- En $\triangle BPC$: se traza la mediana $\overline{PM} \rightarrow BM=MC=PM$
- Luego $m\angle PMB = 20^\circ \rightarrow \triangle APMC$ es inscriptible
 $\rightarrow m\angle PMA = x$ y $m\angle PAM = \theta$
- $\triangle ABM$: isósceles $\rightarrow x + 20^\circ = 20^\circ + 20^\circ$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 250

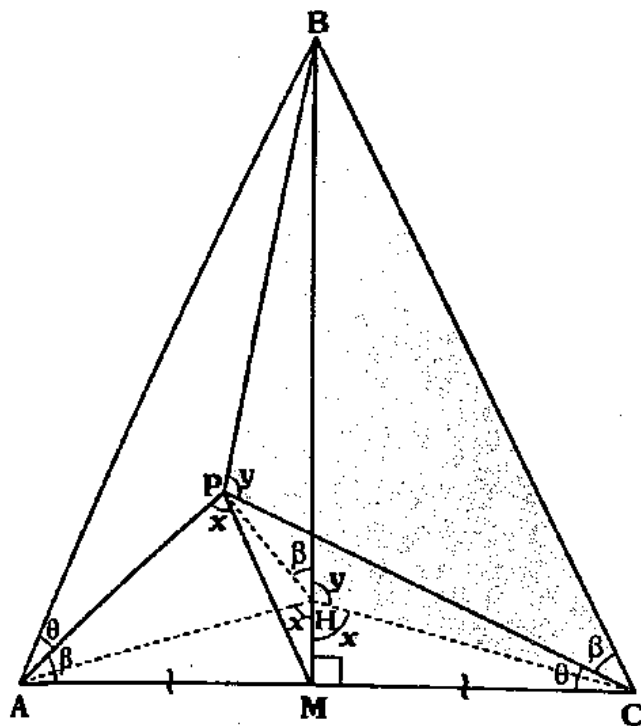
Nos piden HP.

- Notemos que H, B', A', P y C' son concíclicos, cuyo diámetro es $\overline{HP}$
- Como $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ entonces sus circunradios son iguales

$$\therefore \text{HP} = 2R$$

Clave  C

RESOLUCIÓN N° 251



Sea: $m\angle APM = x$ y $m\angle BPC = y$

Por demostrar: $x + y = 150^\circ$

- Se ubica H en $\overline{BM}$ tal que el $\triangle APHM$ inscriptible

$$\rightarrow m\angle PAM = m\angle PHB = \beta \text{ y}$$

$$m\angle AHM = x$$

- Como $\overline{BM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

$$\rightarrow m\angle MHC = x$$

- Como $m\angle PHB = m\angle PCB = \beta$

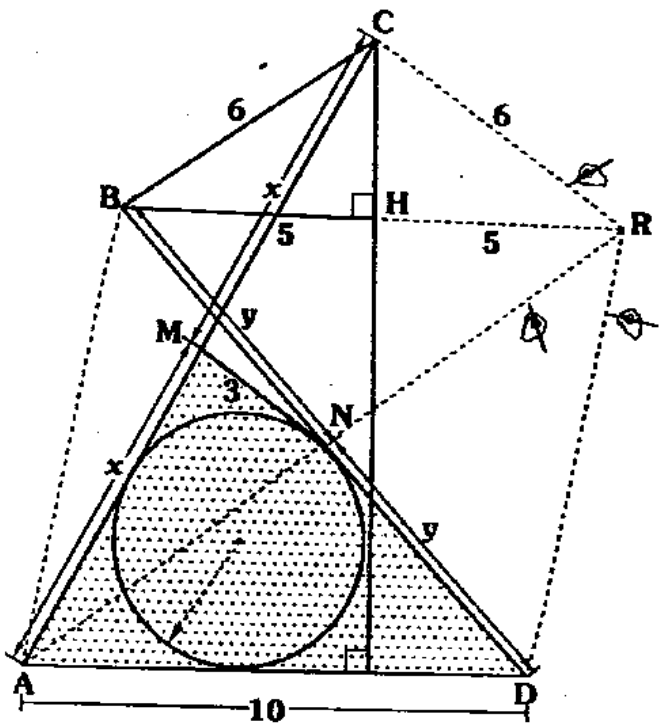
$$\rightarrow \triangle HPBC \text{ es inscriptible}$$

$$\rightarrow m\angle BHC = y$$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

Clave **B**

RESOLUCIÓN N° 252



Nos piden: $AC + BD$

- Sea $AC = 2x$ y $BD = 2y$

- Se prolonga $\overline{BH}$ hasta R tal que $HR = 5$
 $\rightarrow CR = 6$

- Como $BR = AD$ y $\overline{BR} \parallel \overline{AD} \rightarrow ABRD$ es paralelogramo

- Como $BN = ND \rightarrow N$ es centro del paralelogramo, entonces A, N y R son colineales

- $\triangle ACR : \overline{MN}$ es base media $\Rightarrow MN = 3$

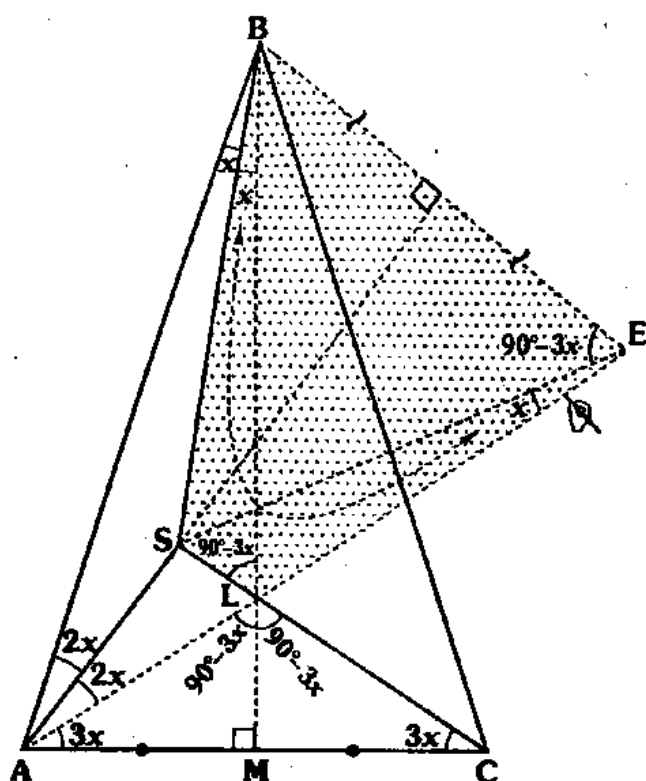
- En $\triangle AMND$: $x + y = 3 + 10$

$$x + y = 13$$

$$\therefore AC + BD = 2x + 2y = 26$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 253



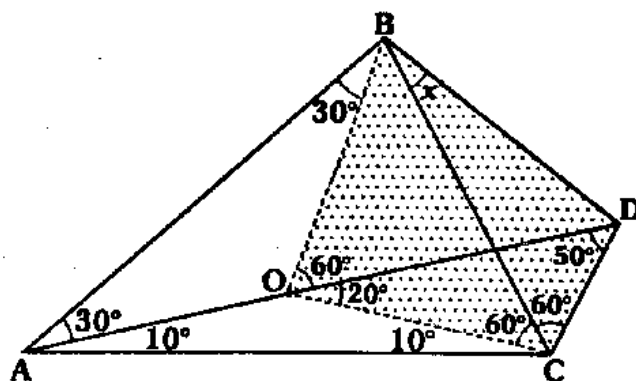
- Se traza la altura $\overline{BM}$ del $\triangle ABC$ entonces $AM=MC$, $\overline{BM} \cap \overline{SC} = \{L\}$.
- Por teorema de la mediatriz $LA=LC$
 $\Rightarrow m\angle LAC=3x$ y $m\angle SAL=2x$
- Se traza $\overline{BE} \perp \overline{AL}$ ($E \in \overline{AL}$)
 $\Rightarrow \triangle ABE$: isósceles
- Como:
 $m\angle ABS = m\angle SEA = x$
 $\Rightarrow m\angle SEB = 90 - 3x$
 $\Rightarrow \triangle LSBE$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle SBM = x$
- En $\triangle AMB$: $7x + 2x = 90^\circ$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 254

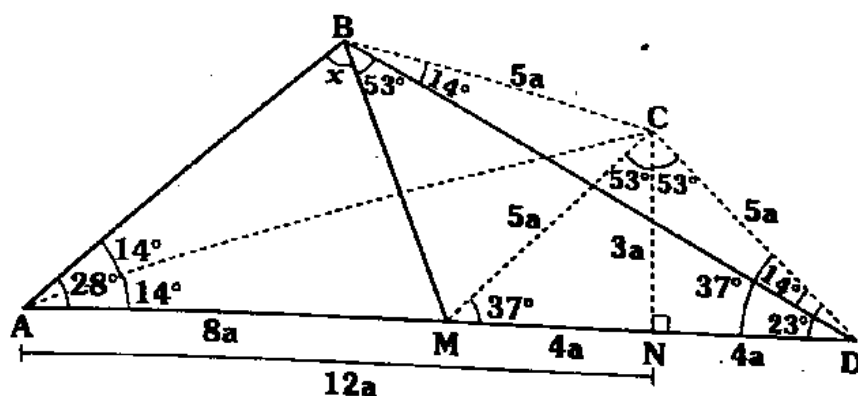
Nos piden "x".



- Ubicamos el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, la cual se encuentra en la línea BD entonces $AO=OB=OC$
 $\Rightarrow m\angle COD=20^\circ$ y $m\angle BOD=60^\circ$
- Notamos que el $\triangle BDCD$ es inscriptible $x = 20^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 255



Piden "x"

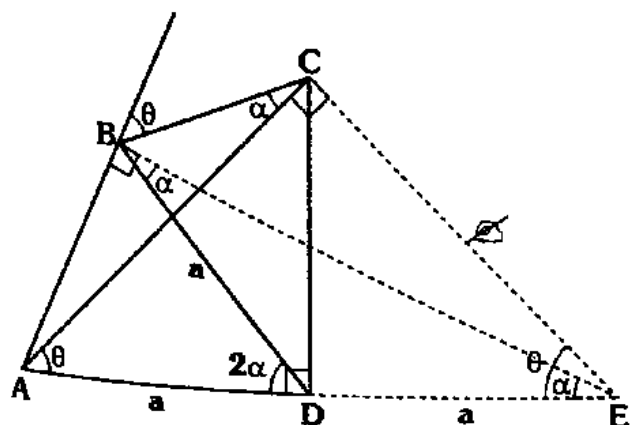
- Se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{CD}$ tal que $m\angle BAC = m\angle CAD = 14^\circ$ y $m\angle BDC = 14^\circ$ entonces $\triangle ABCD$ es inscriptible.
- $\triangle BCD$: isósceles con $BC = CD$
- En el $\triangle ACD$, se traza la altura CN entonces $\triangle CND$: $CN = 3a$, $ND = 4a$ y $CD = 5a$ y en el $\triangle ANC$: $AN = 12a$.
- Del dato $AM = MD$ entonces $MN = 4a \Rightarrow CM = 5a$
- Como $CB = CM = CD \Rightarrow m\angle MBD = 53^\circ$
- En $\triangle ABD$:

$$x + 53^\circ + 23^\circ + 28^\circ = 180$$

$$\therefore x = 76^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 256



Nos piden " θ ".

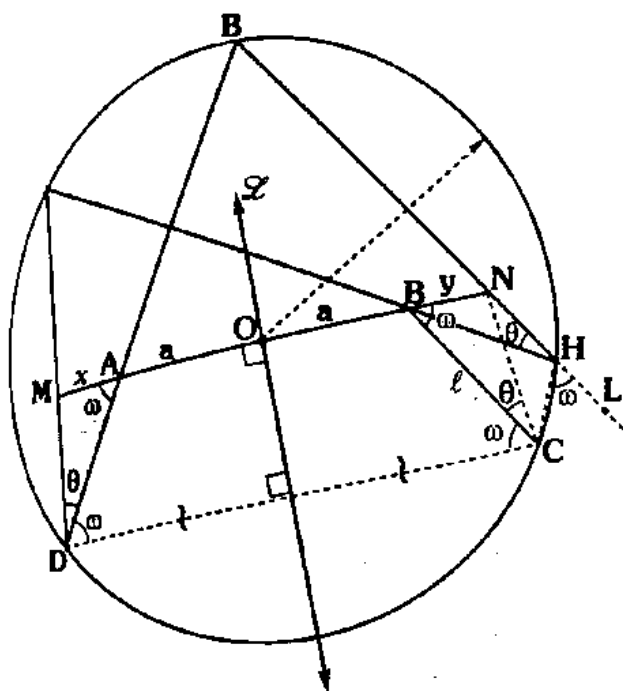
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta E talque
 $BD = DE \Rightarrow m\angle AEB = \alpha$
- Notemos que el $\triangle ABCE$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle AEC = \theta \Rightarrow AD = DE$
- Como $AD = DB = DE$
 $\Rightarrow m\angle ABE = 90^\circ \Rightarrow m\angle AC = 90^\circ$
- En el $\triangle ACE$:

$$\theta = 45^\circ$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 259

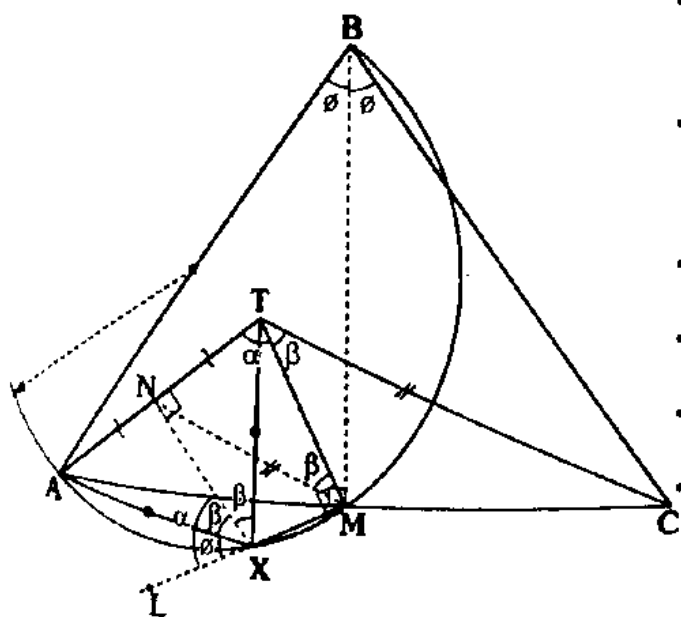
(Caso particular del teorema de Pápolon)



Por demostrar que $x=y$.

- Se traza la recta $\overline{L} \perp \overline{AB}$ en O entonces $\overline{L}$: eje de simetría
- Se traza $\overline{DC} \perp \overline{L} \rightarrow BC=AD$
- Sea $m\angle ADC = \omega$
 $\rightarrow m\angle DCB = m\angle CBN = \omega$
- En $\triangle DRHC$: $m\angle CHL = \omega$
- $\triangle CBNH$: inscriptible
 $\rightarrow m\angle BCN = \theta$
- $\triangle ADM \cong \triangle BCN$ (ALA)
 $\therefore x=y$

RESOLUCIÓN N° 260

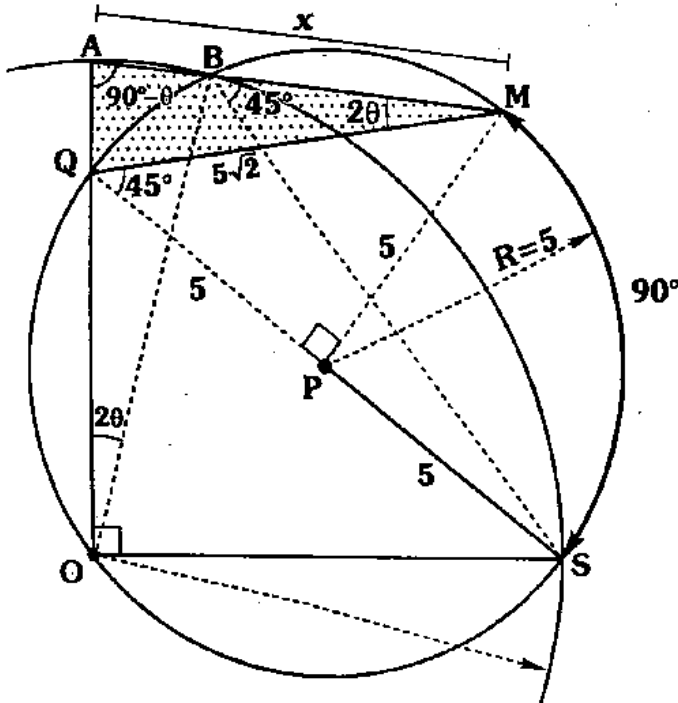


Nos piden $\alpha - \beta$ en función de ϕ .

- En $\triangle AXN$ se traza la altura $\overline{XT}$
 $\rightarrow AN=NT$
- $\triangle ATC$: $\overline{MN}$ es base media $\rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{TC}$
 $\rightarrow m\angle NMT = \beta$
- $\triangle XNTM$: inscriptible $\rightarrow m\angle NXT = \beta$
- $\triangle AXN$: isósceles $\rightarrow m\angle AXN = \beta$
- $\triangle AXMB$: inscriptible $\rightarrow m\angle AXL = \phi$
- $\triangle XNTM$: $\frac{m\angle NXL}{\beta + \phi} = \alpha$
 $\therefore \phi = \alpha - \beta$

Clave A

Piden "x" .



- Como $m\angle QOS = 90^\circ \Rightarrow \overline{QS}$ es diámetro.
- En el cuadrante: $m\angle MBS = 45^\circ$
 $\Rightarrow m\widehat{MS} = 90^\circ$
 $\Rightarrow m\angle MPS = 90^\circ$
- En $\triangle QPM$: $QM = 5\sqrt{2}$
- Sea: $m\angle QOB = 2\theta$
 $\Rightarrow m\angle QMB = 2\theta$
- $\triangle OAB$: isósceles entonces:
 $m\angle OAB = 90^\circ - \theta$
- $\triangle AQM$: isósceles
 $\therefore x = 5\sqrt{2}$

Clave B

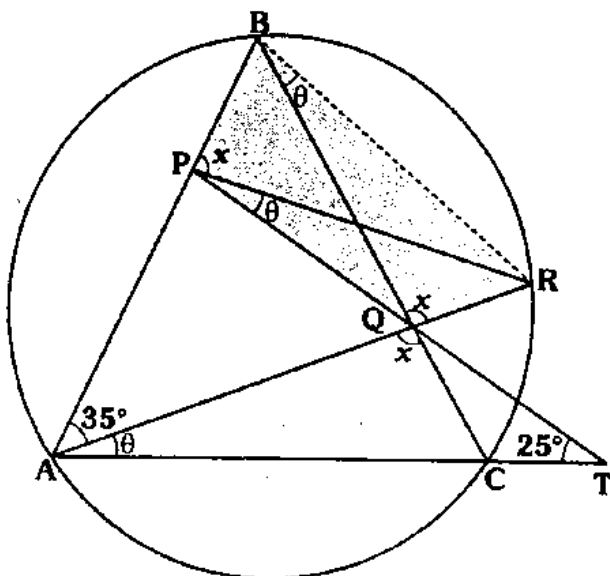
- Nos piden "x".
- Notemos que el cuadrilátero PBRQ es inscriptible entonces:

$$m \angle QPR = m \angle QBR = \theta$$

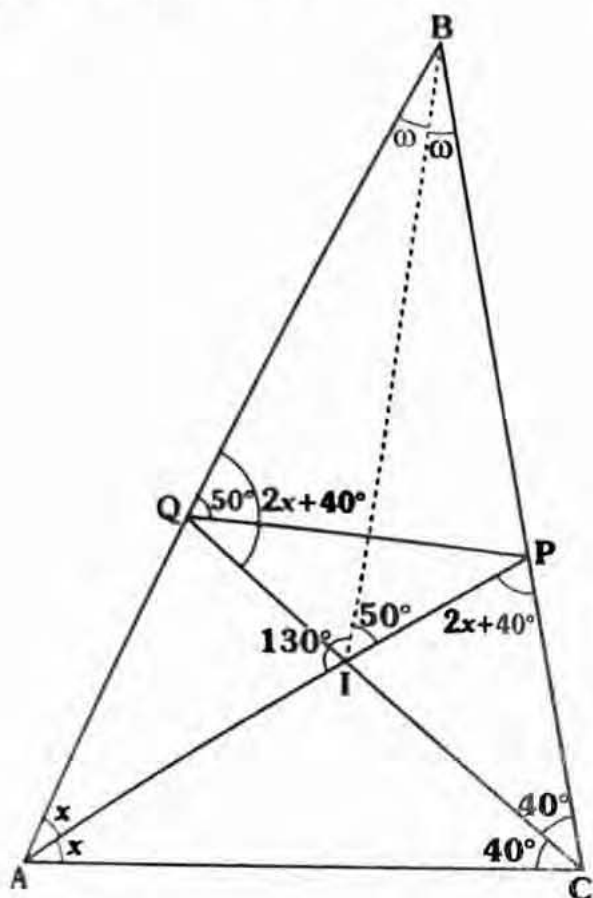
- Por ángulo inscrito: $m\angle RAC = \theta$
- En el $\triangle APT$: $x + \theta = 35^\circ + \theta + 25^\circ$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave A



RESOLUCIÓN N° 263



Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\angle AIC = 90^\circ + \frac{80^\circ}{2} = 130^\circ$$

$$\rightarrow m\angle BIP = 50^\circ$$

- $\triangle IQBP$: inscriptible

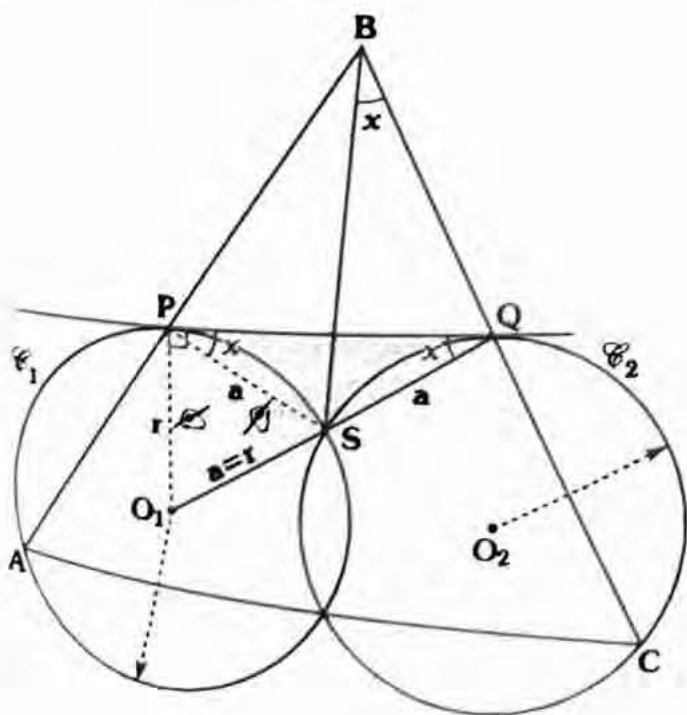
$$\rightarrow m\angle IQB = m\angle IPC = 2x + 40^\circ$$

- $\triangle APC$: $3x + 120^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 264



- $\triangle PBQS$: inscriptible

$$\rightarrow m\angle PQS = x$$

- Como $C_1 \cong C_2 \rightarrow m\widehat{PS} = m\widehat{SQ}$

$$\rightarrow m\angle PQS = x$$

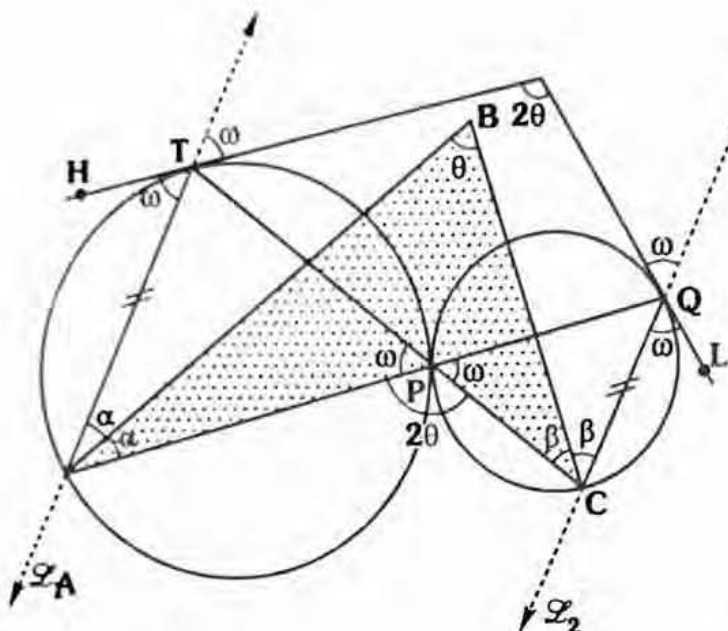
- En $\triangle O_1PQ$: $\overline{PS}$ es mediana

$$\rightarrow QS = SO_1 = a = r$$

- $\triangle O_1PQ$: notable de 30°

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **E**

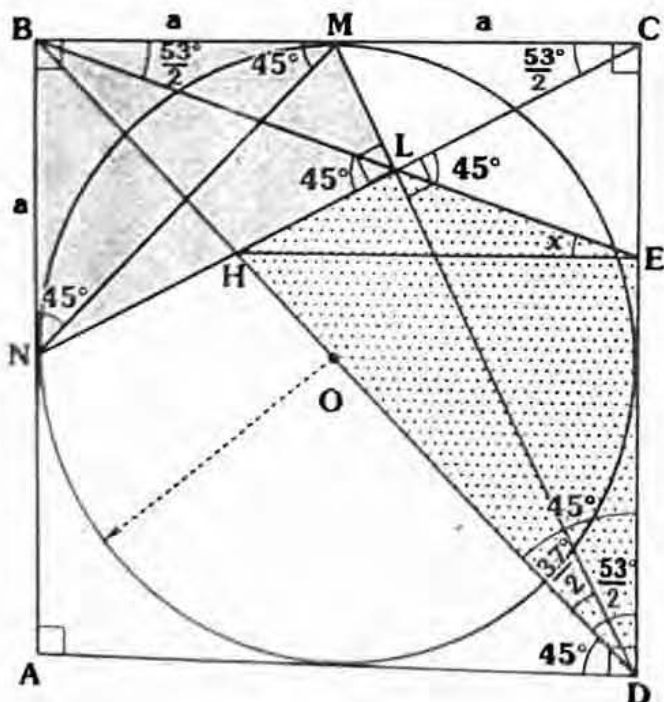
RESOLUCIÓN N° 265

Piden θ .

- Sea $m\angle CPQ = \omega$
 $\rightarrow m\angle LQC = m\angle ATH = \omega$
- Se sabe que: $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \rightarrow \omega + \omega = 2\theta$
 $\rightarrow \omega = \theta$
- Como $\overrightarrow{\mathcal{L}_1} \parallel \overrightarrow{\mathcal{L}_2} \rightarrow \theta = \alpha + \beta$
- En ABCP:

$$m\angle APC = \theta + \underbrace{\alpha + \beta}_{\theta}$$
 $\rightarrow m\angle APC = 2\theta$
- En P: $2\theta + \theta = 180^\circ$
 $\therefore \theta = 60^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 266

Nos piden "x".

- Notemos que $AN=NB=BM=MC$
 $\Rightarrow m\angle ACB = m\angle MDC = \frac{53^\circ}{2}$
 $\Rightarrow \overline{NC} \perp \overline{MD}$
- $\triangle NBL$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle NLB = 45^\circ$
- Como $m\angle HDC = m\angle HDE = 45^\circ$
 $\Rightarrow$ el $\triangle HLE$: inscriptible
 $\Rightarrow m\angle HEL = m\angle HDL = \frac{37^\circ}{2}$

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30'$$

Clave B

Nº 267



Sea $m \angle CO_1M = 2\theta \rightarrow m \angle MCS = \theta$

• Como $\overline{O_1C} \parallel \overline{SO_2}$ $\rightarrow m\angle SO_2O_1 = 2\theta$

$$\rightarrow m \angle SNO_2 = \theta$$

• $\Delta MCNS$: inscrito $\rightarrow m\angle MSC = a$

$$\rightarrow m_{\text{CSO}_1} = a + b = 32^\circ$$

- Como $\overrightarrow{SO_1}$ es bisectriz del ángulo CSA

$$\rightarrow m\angle O_1SA = 32^\circ$$

• 40,AS:

$$x = 58^\circ$$

Clave  C

Nº 268



• Sea $m \triangleleft \text{MAP} = \theta$ y $m \triangleleft \text{MAQ} = \beta$

$$\rightarrow y = \theta + \beta \cdot$$

- Por ângulo semiinscrito:

$$m\angle MPQ = \theta \text{ y } m\angle MQP = \beta$$

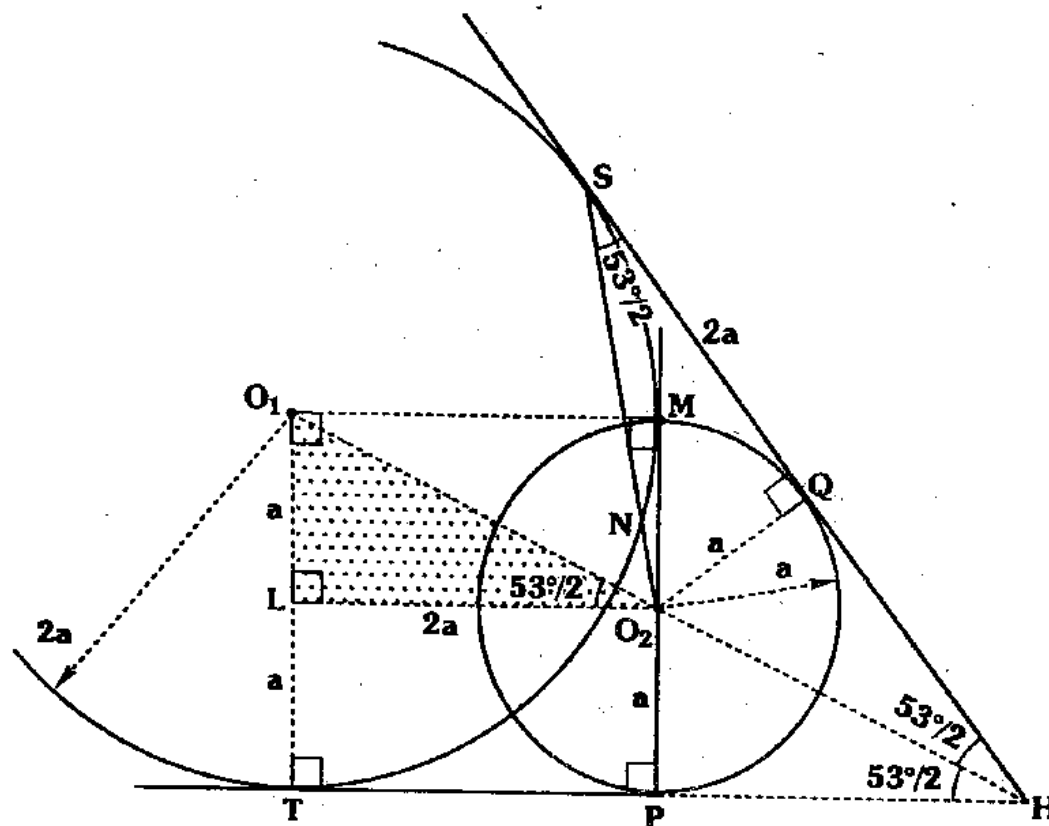
• En ΔPAB : $x = \omega + 0$

- En PAQ: $y + \underbrace{\theta + \beta}_y + \underbrace{\phi + \omega}_x = 180^\circ$

$$\therefore x = 180^\circ - 2y$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 269



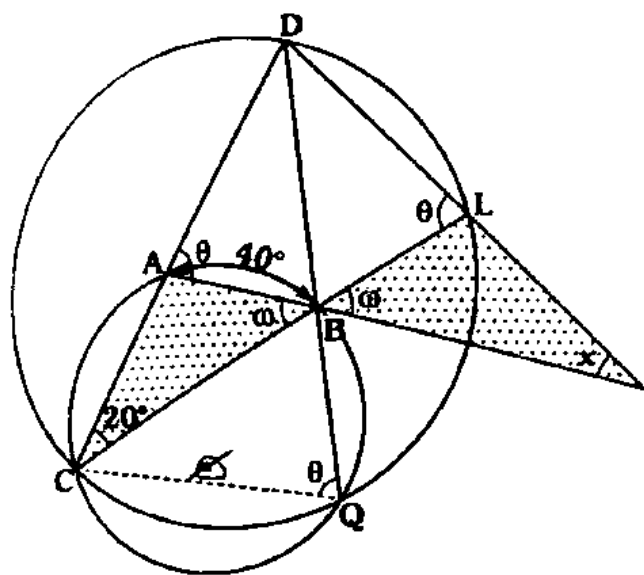
Nos piden: $m\widehat{PQ} - m\widehat{TN}$

- Se prolonga $\overline{TP}$ y $\overline{SQ}$ las cuales se cortan en H $\rightarrow O_1, O_2$ y H: colineales.
- Sea $O_2P = O_2M = a$ $\angle O_1LO_2$: notable $\rightarrow m\angle LO_2O_1 = \frac{53^\circ}{2} \rightarrow m\angle THS = 53^\circ$
- $\angle O_2QS$: notable de $53^\circ/2$
- Como: $m\widehat{PQ} + 53^\circ = 180^\circ \rightarrow m\widehat{PQ} = 127^\circ$
- Debido a que $m\widehat{SN} = 53^\circ$ y $m\widehat{SN} + m\widehat{TN} = 127^\circ \rightarrow m\widehat{TN} = 74^\circ$

$$\therefore m\widehat{PQ} - m\widehat{TN} = 53^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 270

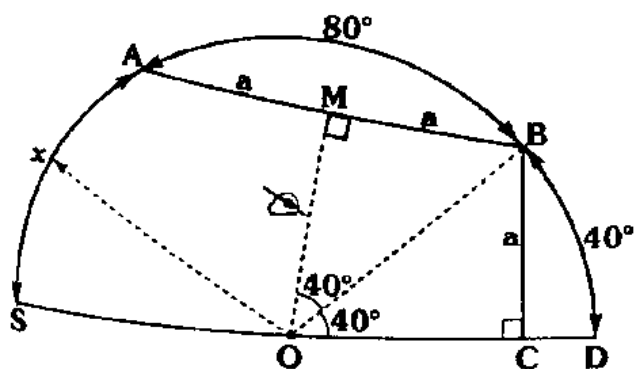


Dato $m\widehat{AB} = 40^\circ$

- $$\theta = x + \omega = 20^\circ + \omega$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 271

- Como $AB=2(BC)$ entonces se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB} \rightarrow AM=MB$

- Debido a que $MB=BC \rightarrow \overline{OB}$ es bisectriz del

$$m \angle MOC \rightarrow m \angle BOC = 40^\circ$$

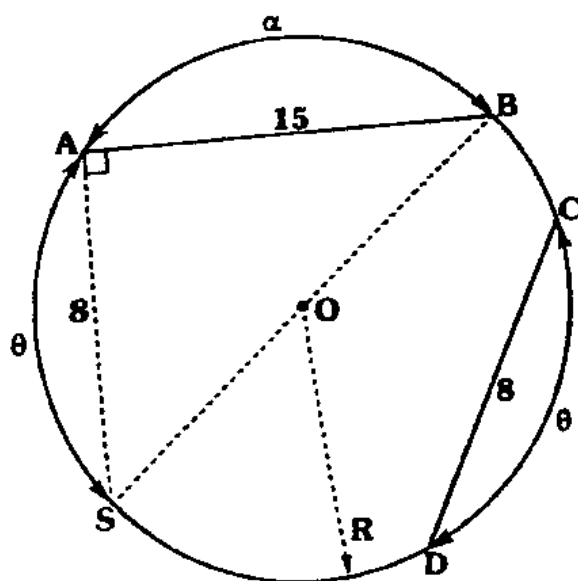
$$\rightarrow m\widehat{BD} = 40^\circ$$

- Finalmente:

$$x + 80 + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 272

❖ Nos piden R.

- ❖ Se traza el diámetro $\overline{BS}$, como
- ❖ $\alpha + \theta = 180^\circ \rightarrow m\widehat{AS} = \theta$

- Como:

$$m\widehat{AS} = m\widehat{CD} \rightarrow AS = CD = 8$$

• En $\triangle SAB$:

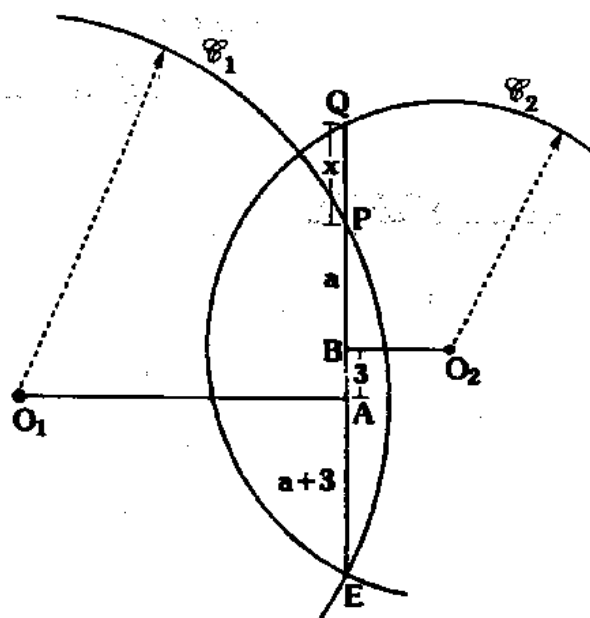
$$(SB)^2 = 8^2 + 15^2$$

$$\rightarrow \frac{SB}{2R} = 17$$

$$\therefore R = 8,5$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 273



Piden "x".

- Sea $PB = a$
- Por propiedad en $\mathcal{C}_1$: $PA = AE = a + 3$

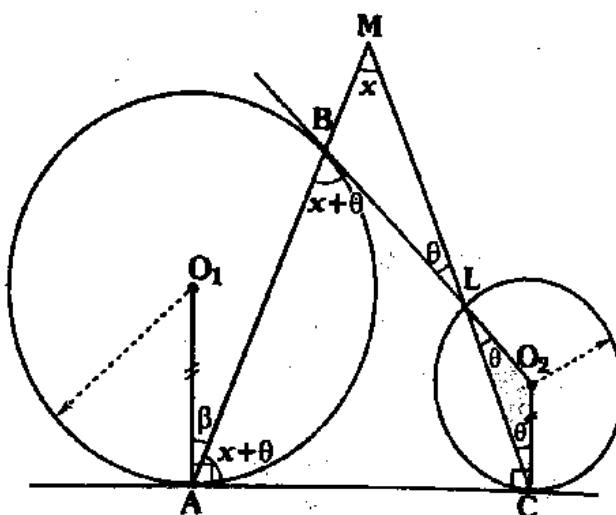
$$\text{en } \mathcal{C}_2: \underline{QB} = BE$$

$$\angle A + x = \angle A + 6$$

$$\therefore x = 6$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 274



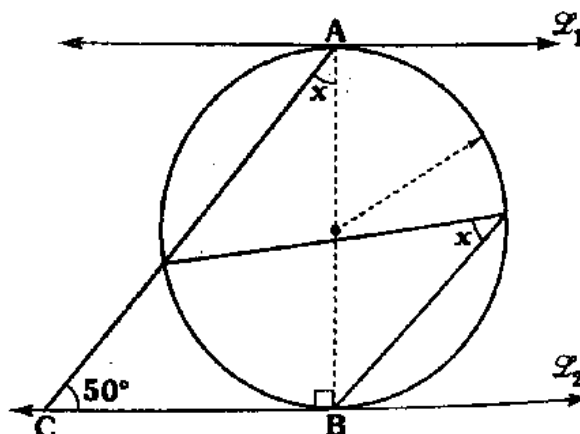
Piden "x".

- $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2C} \rightarrow x = \theta + \beta$
- $\triangle LO_2C$: isósceles
- $\triangle LMB$: $m\angle ABL = x + \theta$
- $m\angle ABL = m\angle BAC$ (propiedad)
- En A: $x + \underbrace{\beta + \theta}_x = 90^\circ$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 275



Piden "x".

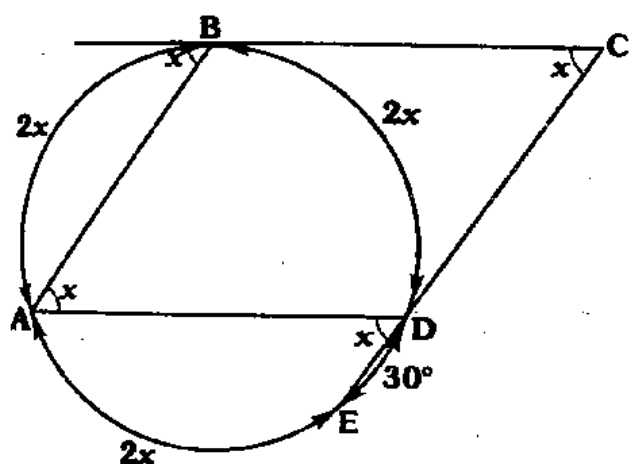
- $$m\angle BAC = x$$

• En $\triangle ABC$:

$$x + 50^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 276

Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

$$\rightarrow m\angle BAD = x$$

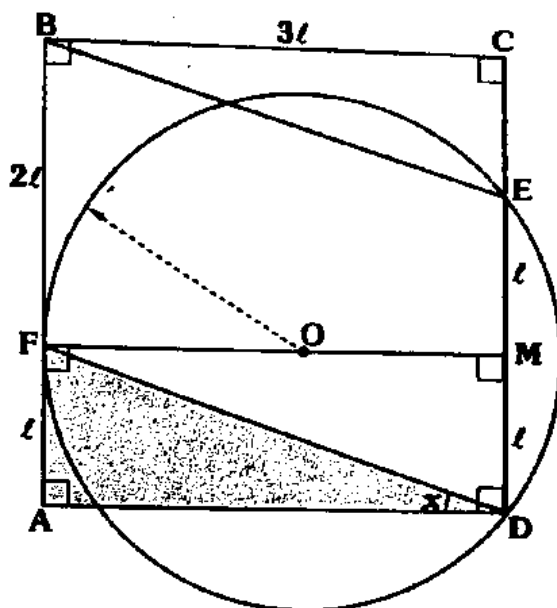
$$\rightarrow m\widehat{BD} = 2x$$

$$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{AE} = 2x$$

$$2x + 2x + 2x + 30^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 55^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 277

Piden "x".

- Como $\overline{OF} \perp \overline{AB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{ED}$

$$\rightarrow EM = MD = l$$

- FBED: paralelogramo $\rightarrow FB = 2\ell$

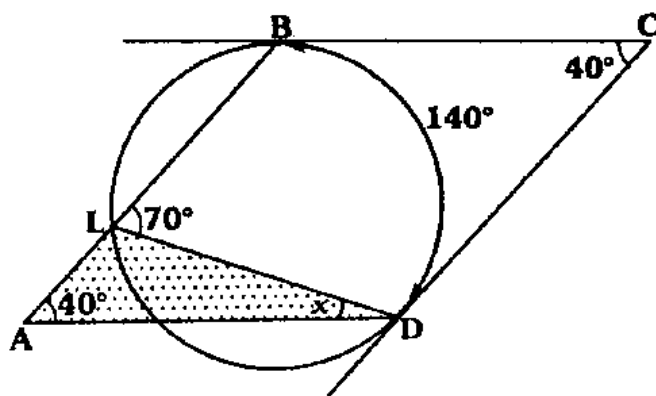
- AFMD: rectángulo $\rightarrow AF = \ell$

- ABCD: cuadrado $\rightarrow AD = 3\ell$

- Δ FAD: notable

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 278

Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

$$\rightarrow m\angle BAD = 40^\circ$$

- Por propiedad: $m\widehat{BD} = 140^\circ$

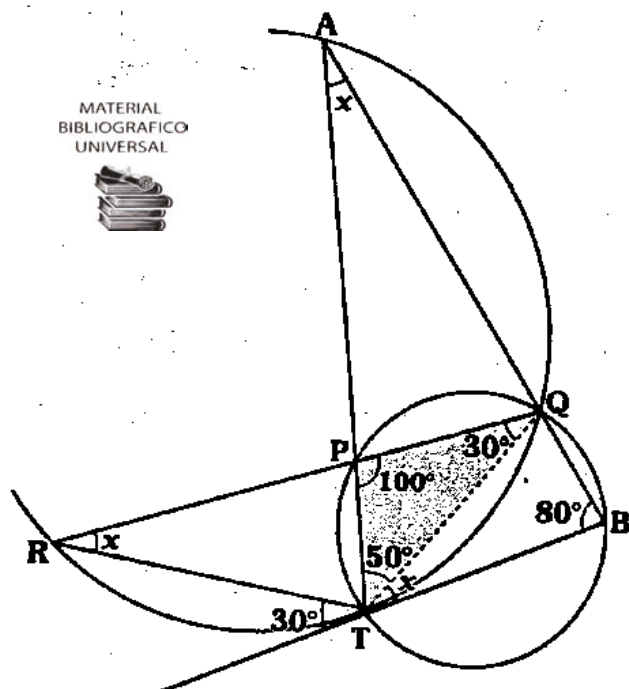
- En $\triangle ALD$: $x + 40^\circ = 70^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 279

MATERIAL
BIBLIOGRÁFICO
UNIVERSAL



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito $m\angle TAQ = x$

- Por ángulo semi-inscrito:

$$- m\angle QTB = x$$

$$- m\widehat{RT} = 60^\circ$$

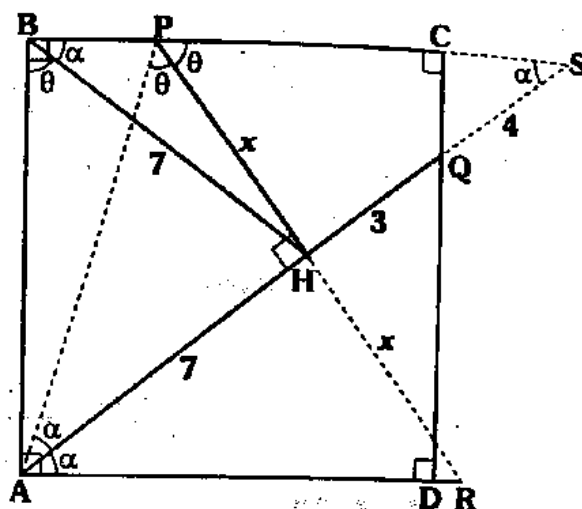
- En $\triangle TPQ$: $m\angle PTQ = 60^\circ$

- $\triangle TBA$: $x + x + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 25^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 280



Nos piden "x".

- $\triangle ABPH$: inscriptible $\rightarrow m\angle APH = \theta$
- Se prolonga $\overline{AQ}$ la cual corta a $\overline{BC}$ en S.
- $\triangle APS$: isósceles $\rightarrow AH = HS$
- En $\triangle ABS$: $AH = HS = BH = 7$
- Al prolongar $\overline{PH}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en R
- De la observación:

$$\overline{PR} = \overline{AQ}$$

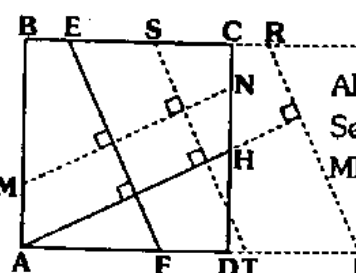
$$2x = 10$$

$$\therefore x = 5$$

Clave B



Observación

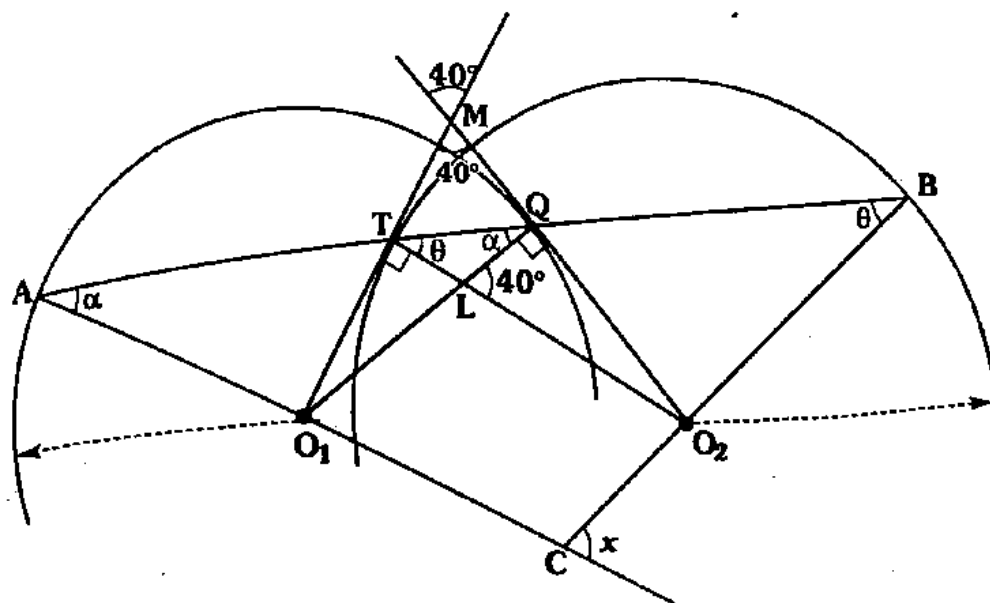


ABCD: cuadrado

Se cumple:

$$MN = AH = EF = ST = RI$$

RESOLUCIÓN N° 281



Piden "x".

- $\triangle AO_1Q$ y $\triangle O_2TB$: isósceles

$$\rightarrow m\angle O_1AQ = m\angle O_1QA = \alpha \quad \text{y} \quad m\angle O_2TB = m\angle O_2BT = \theta$$

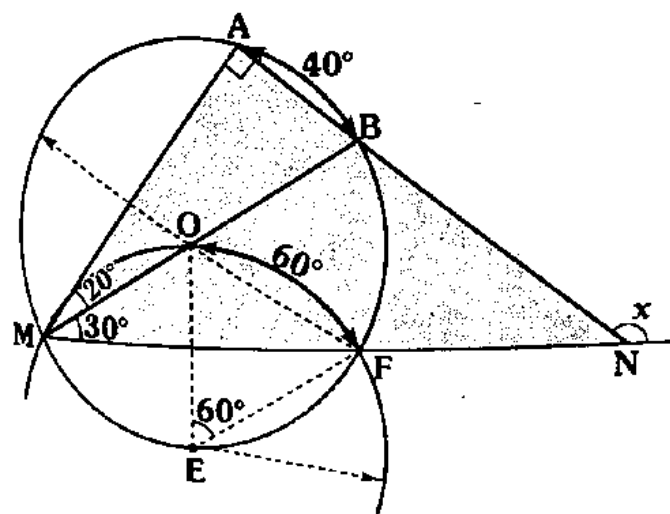
- $\triangle LTMQ$: inscriptible $\rightarrow m\angle O_2LQ = 40^\circ$

- En $\triangle ABC$: $x = \alpha + \theta$

$$\therefore x = 40^\circ$$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 282



Nos piden "x".

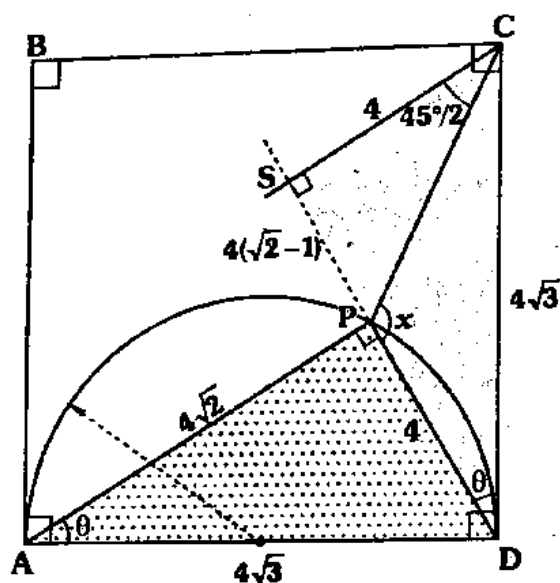
- Como $\overline{MB}$ es diámetro
 $\rightarrow m\angle MAB = 90^\circ$ y $m\angle AMB = 20^\circ$
- $\triangle EFO$: equilátero
 $\rightarrow m\angle OFE = 60^\circ$
- $\triangle MAN$:

$$x = 90^\circ + 50^\circ$$

$$\therefore x = 140^\circ$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 283



Nos piden "x".

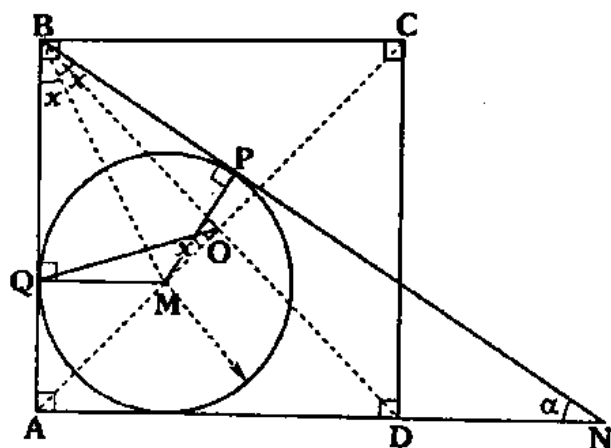
- Se prolonga $\overline{DP}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overline{DP}$
- $\angle DPA \cong \angle CSD$
 $\rightarrow CS = PD = 4$
 $\rightarrow SP = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$
- $\angle PSC$: notable de $45^\circ/2$

$$x = 90^\circ + \frac{45^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 112^\circ 30'$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 284



• Nos piden "x".

- Sea M el centro de la circunferencia inscrita en el $\triangle BAN$.
- Notemos que $\triangle MQBO$ y $\triangle MQPB$: inscriptibles

$$\rightarrow m\angle MBQ = m\angle MBN = x$$

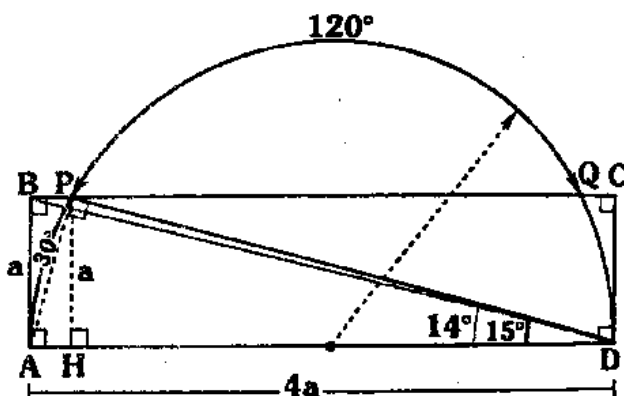
- Finalmente en $\triangle ANB$:

$$2x + \alpha = 90^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 285



Nos piden: $m\angle BDP$

- Como $m\widehat{PQ} = 120 \rightarrow m\widehat{NP} = 30^\circ$

$$\rightarrow m\angle ADP = 15^\circ$$

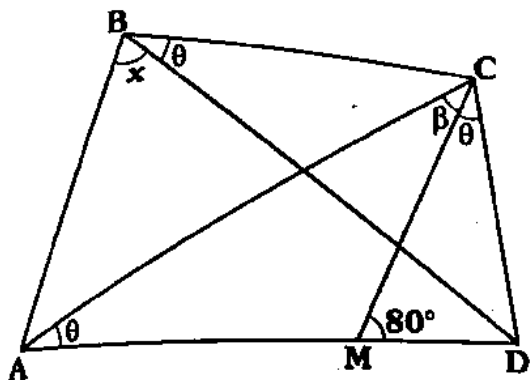
- En $\triangle APD$: por propiedad

$$AD = 4(PH)$$

- $\triangle BAN$: notable de 14°

$$\therefore m\angle BDP = 1^\circ$$

Clave A

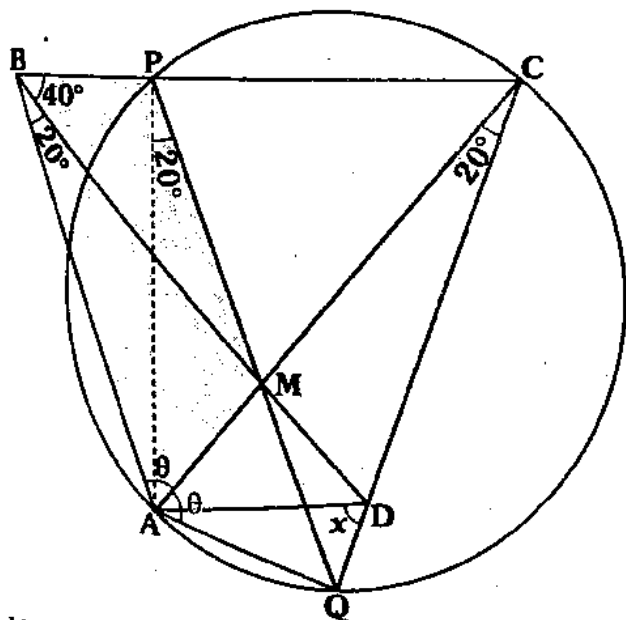
RESOLUCIÓN Nº 286

• $\triangle ABCD$: inscriptible $\rightarrow x = \theta + \beta$

- $\Delta AMC: \theta + \beta = 80^\circ$

$$\therefore x = 80^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 287

Nos piden "x".

- Por ângulo inscrito:

$$m_{\text{QPC}} = 0$$

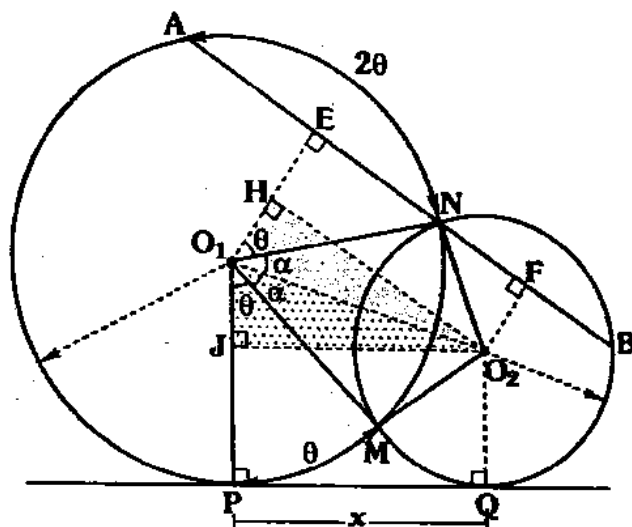
$$m\angle APQ = 20^\circ$$

- $\square$ ABPM: inscriptible $\rightarrow m\angle ABM = 20^\circ$

- $\triangle ABCD$: inscriptible

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 288

Nos piden: $\frac{PQ}{AB}$

- Del dato: $m\widehat{AN} = 20$ y $m\widehat{PM} = 0$

• $\triangle \text{MO}_1\text{NO}_2$: trapezoide simétrico

$$\rightarrow m \angle NO_1O_2 = m \angle O_2O_1$$

• Se traza $\overline{O_1E} \perp \overline{AN} \rightarrow m\angle EO_1N = \theta$

$$\cdot \quad \Delta O_1JO_2 \equiv \Delta O_1HO_2$$

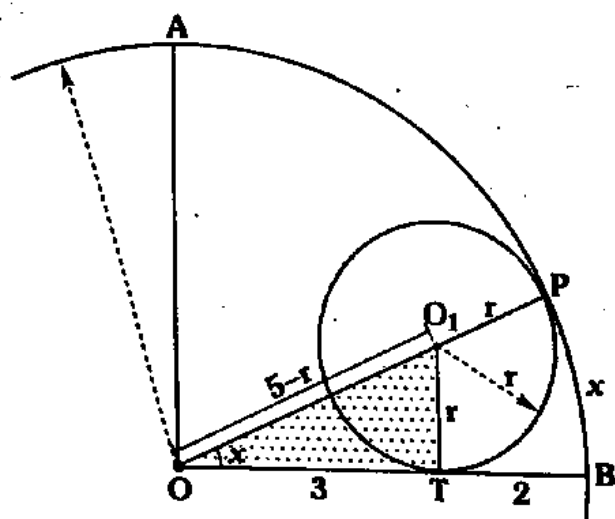
$$\rightarrow \text{JO}_2 = \text{HO}_2$$

$$2x = \frac{AB}{2} \rightarrow AB = 2x$$

$$\therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 289



Nos piden "x".

- O, O₁ y O: colineales
- Del dato: OT=3 y TB=2 → OO₁=5T
- En ΔOTO₁:

$$(5-r)^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{8}{5}$$

- De la conservación:

$$\frac{O_1T}{TO} = \frac{8}{15}$$

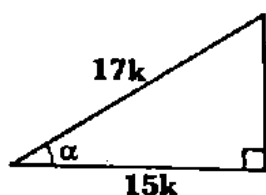
$$\therefore x = 28^\circ$$

Clave E



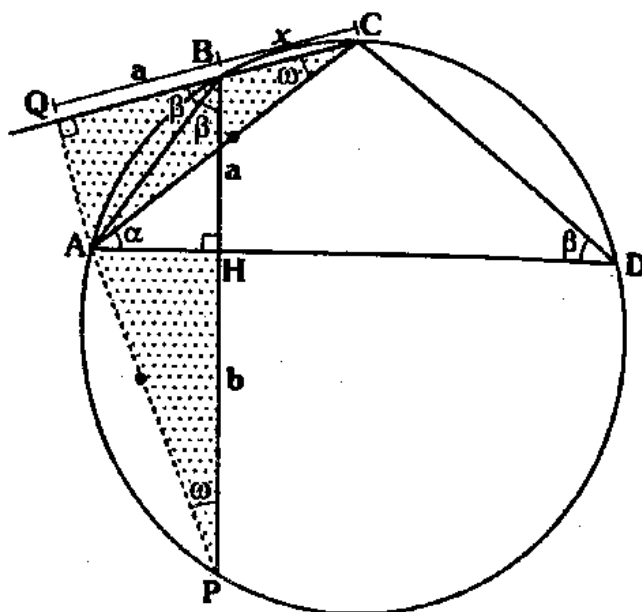
Recordar

(Libro 3 - congruencia de triángulos)



Se cumple:
 $x = 28^\circ$

RESOLUCIÓN N° 290

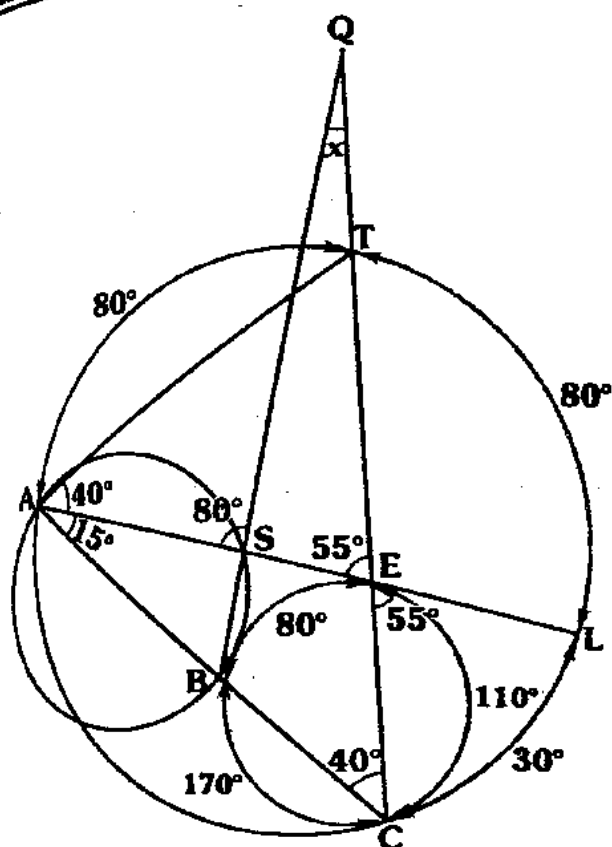


Piden x, función de "a" y "b".

- Del dato: $\alpha + \beta = 90^\circ$
→ $m\angle ABP = \beta$
- Como $m\widehat{AP} = m\widehat{ABC}$
→ $AP = AC$
- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AQ} \perp \overline{CB}$
- Como $m\angle HBA = m\angle ABQ = \beta$
→ $BH = BQ = a$
- $\triangle AQC \cong \triangle AHP$
→ $x + a = b$
∴ $x = b - a$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 291



Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\widehat{AT} = m\widehat{TL} = 80^\circ$$

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{LC} = 30^\circ$

- por ángulo interior:

$$m\angle AET = \frac{80^\circ + 30^\circ}{2} = 55^\circ$$

- Como $m\widehat{BC} = m\widehat{ASB} = 170^\circ$

$$\rightarrow m\angle ASQ = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$

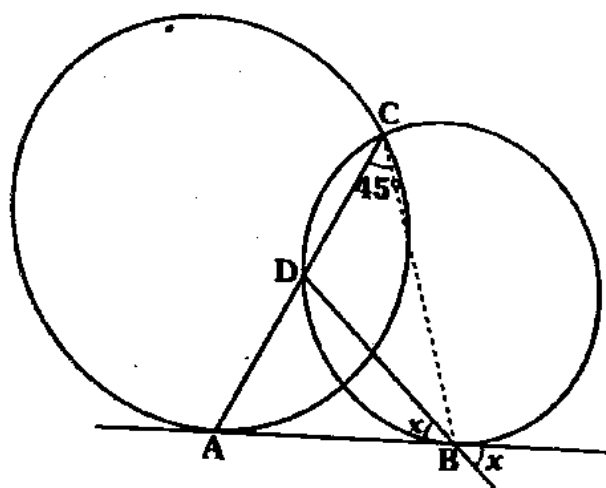
- En $\triangle SQE$:

$$x + 55^\circ = 85^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 292



Nos piden "x".

- Por propiedad de circunferencias ortogonales.

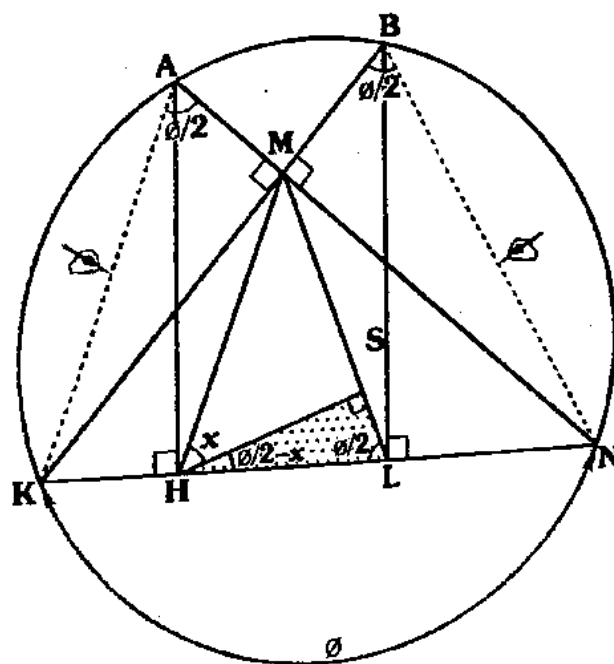
$$m\angle ACB = 45^\circ$$

- Por ángulo semiinscrita

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 293



Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\angle NAK = m\angle NBK = \frac{\theta}{2}$$

• $\triangle LMBN$ y $\triangle AMHK$: inscriptibles

$$\rightarrow m\angle MLH = \frac{\theta}{2} \text{ y } m\angle MHL = \frac{\theta}{2}$$

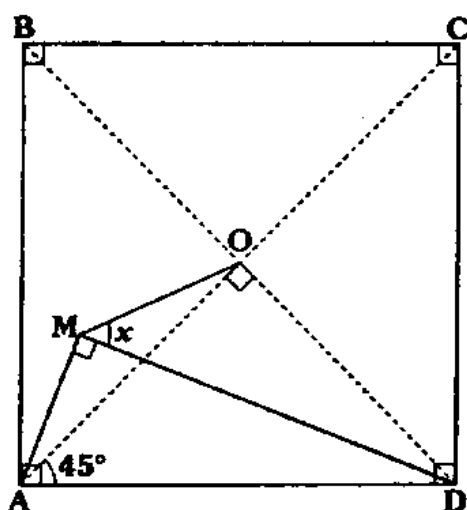
$$\rightarrow m\angle SHL = \frac{\theta}{2} - x$$

$$\angle HSL: \frac{\theta}{2} - x + \frac{\theta}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore x = \theta - 90^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 294



Nos piden "x".

• Como $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

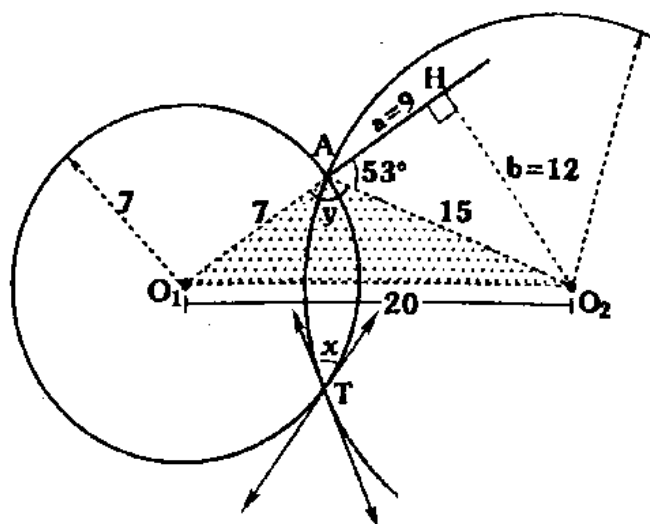
$$\rightarrow m\angle AOD = 90^\circ$$

• $\triangle ADOM$: inscriptible

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 295



Nos piden "x".

• En $\triangle O_1HO_2$ y $\triangle AHO_2$:

$$a=9 \text{ y } b=12$$

• Luego: $y=127^\circ$

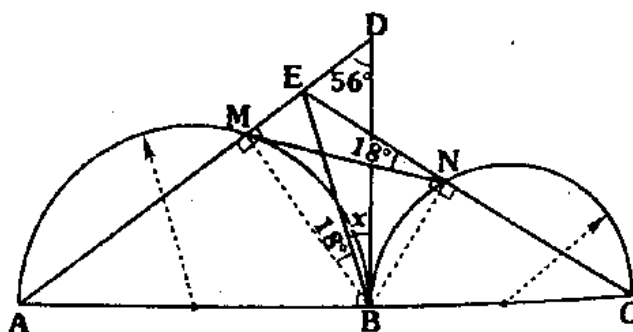
• Por propiedad:

$$x + y = 180^\circ$$

$$\therefore x = 53^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 296



Nos piden "x".

• Como $m\angle AMB = m\angle BNC = 90^\circ$

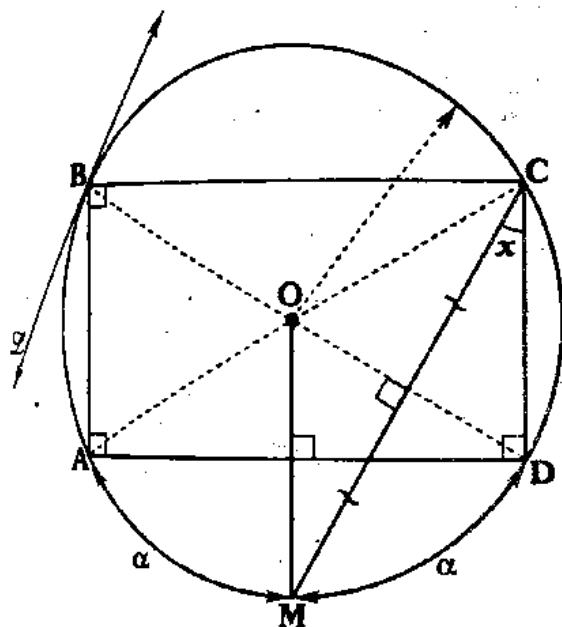
→ $\triangle BMEN$: inscriptible

$\rightarrow m\angle MBE = 18^\circ$

En ΔBMD :

$$x + 18^\circ + 56^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 16^\circ$$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 297**

Nos piden "x"

• Como $\overline{D} \parallel \overline{CM} \rightarrow \overline{BD} \perp \overline{CM}$.

$$\rightarrow m\widehat{CD} = m\widehat{MD} = \alpha$$

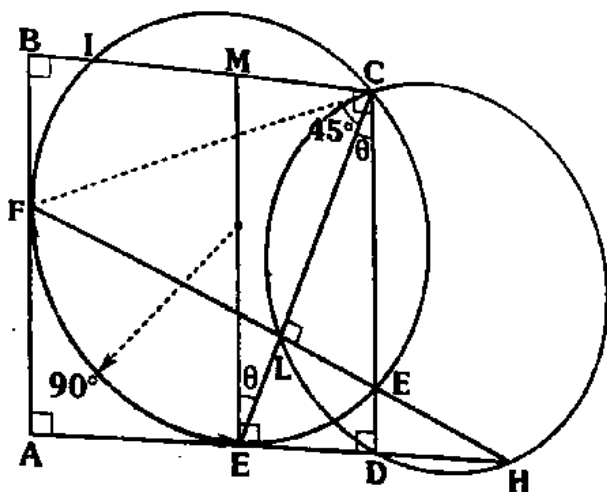
• $\overline{AC}$: diámetro $\rightarrow 3\alpha = 180^\circ$

$$\rightarrow \alpha = 60^\circ$$

• Por ángulo inscrito: $x = 30^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 298



❖ Nos piden: $m\hat{I}C$

• Como: $m\angle CDH = 90^\circ$

$$\rightarrow m \angle CLH = 90^\circ$$

- $m\widehat{EF} = 90^\circ \rightarrow m\angle FCE = 45^\circ$

- $\triangle FCE$: isósceles

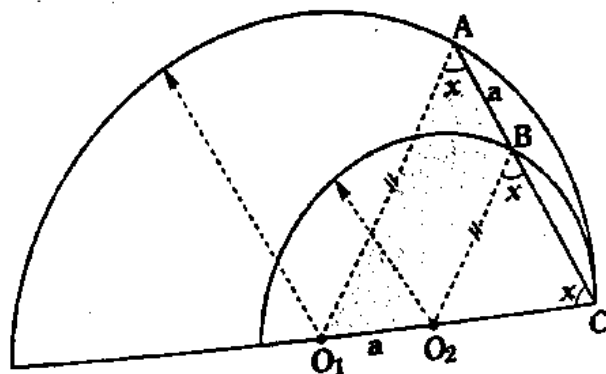
$$\rightarrow m\angle FEC = m\angle FCE = 45^\circ + \theta$$

• $\triangle CLE$: $45^\circ + 2\theta = 90^\circ \rightarrow 2\theta = 45^\circ$

- Como $m\widehat{IC} = 40$

$$\therefore \widehat{m\angle C} = 90^\circ$$

Clave

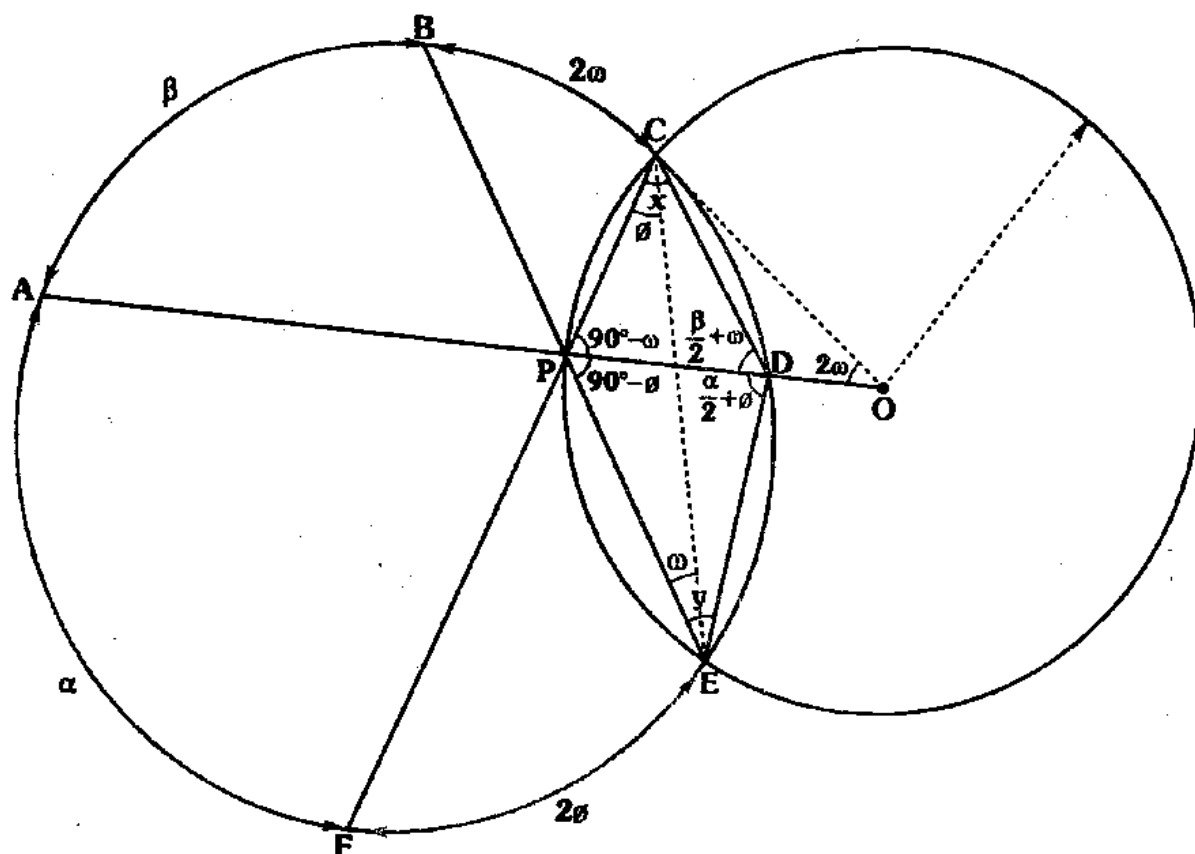
RESOLUCIÓN N° 299

Nos piden "x".

- ΔO_2BC y ΔO_1AC : isósceles $\rightarrow m\angle O_2BC = m\angle O_1AC = x$
- O_1ABO_2 : trapezio isósceles $\rightarrow m\angle AO_1C = x$
- En ΔABC : $x = 60^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 300



Piden: $x - y$

- Sea $m\angle PEC = \omega$ y $m\angle PCE = \phi$ $\rightarrow m\widehat{PC} = 2\omega$
- ΔPOC : isósceles $\rightarrow m\angle OPC = 90^\circ - \omega$
- Por ángulo inscrito: $m\angle PDC = \frac{\beta}{2} + \omega$
- Análogamente: $m\angle EPD = 90^\circ - \phi$ y $m\angle PDE = \frac{\alpha}{2} + \phi$
- En ΔPCD y ΔPDE : $x + 90^\circ - \omega + \frac{\beta}{2} + \omega = y + 90^\circ - \phi + \frac{\alpha}{2} + \phi$

$$\therefore x - y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Clave C

Geometría

ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

CIRCUNFERENCIA

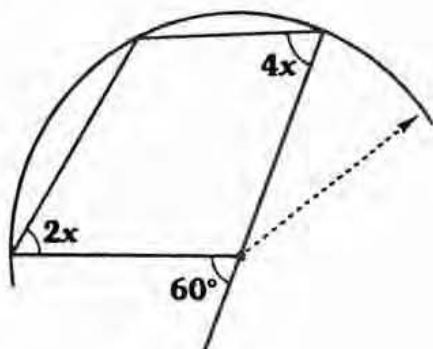


Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

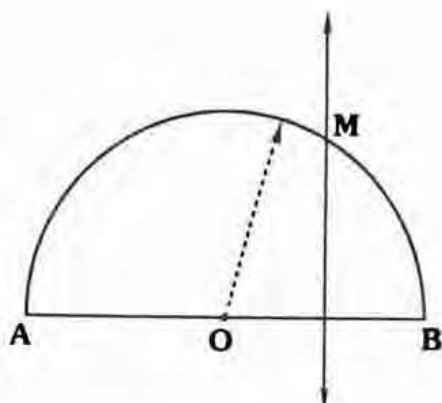
En el gráfico, calcule " x ".



- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA N° 2

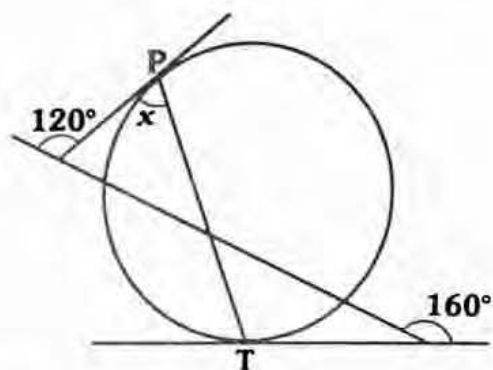
En el gráfico, $\widehat{L}$ es mediatriz de $\overline{OB}$, calcule $m\widehat{AM}$.



- A) 90° B) 120°
C) 135° D) 127°
E) 143°

PROBLEMA N° 3

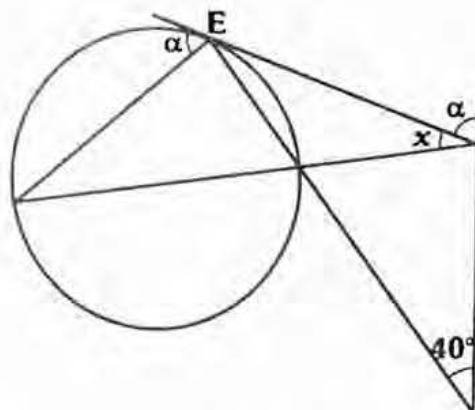
En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Calcule " x ".



- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 75° E) 85°

PROBLEMA N° 4

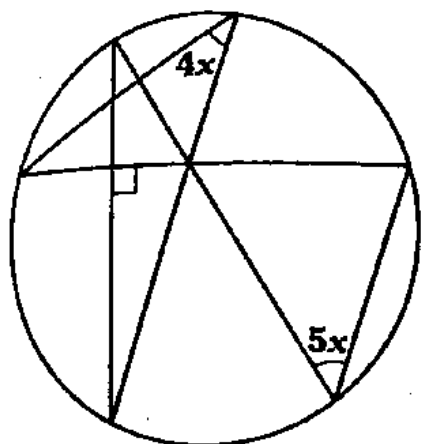
Si E es punto de tangencia. Calcule " x ".



- A) 20° B) 30°
C) 40° D) 50°
E) 60°

PROBLEMA N° 5

Calcule "x", en:

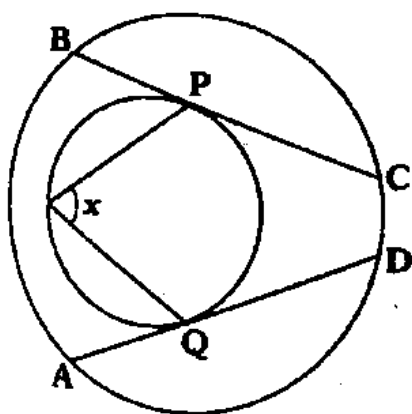


- A) 20° B) 25° C) 30°
D) 10° E) 18°

PROBLEMA N° 6

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB} - m\widehat{CD} = 80^\circ$.

Calcule "x".

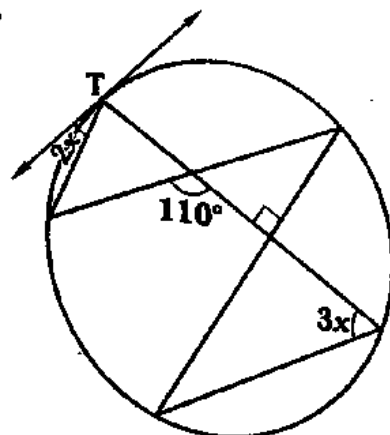


- A) 50° B) 100° C) 80°
D) 40° E) 70°

PROBLEMA N° 7

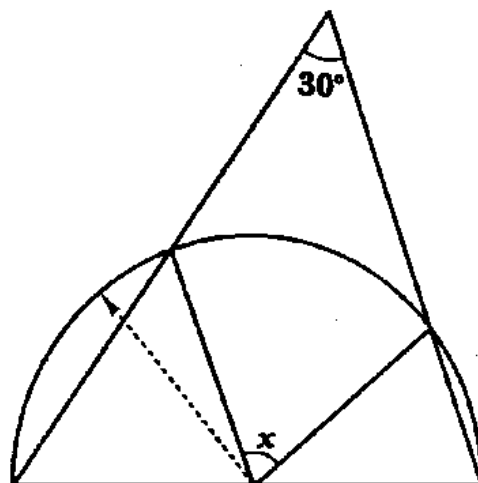
En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule "x".

- A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 35°



PROBLEMA N° 8

Del gráfico, calcule "x".



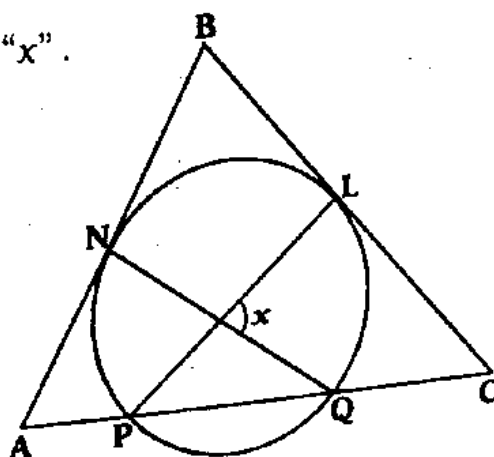
- A) 70° B) 120° C) 110°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA N° 9

N y L son puntos de tangencia, $m\widehat{PQ} = 40^\circ$ y $m\angle BAC + m\angle BCA = 100^\circ$.

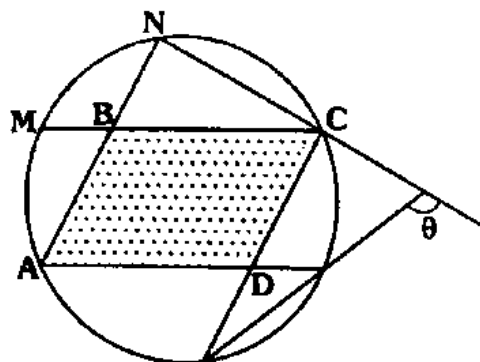
Calcule "x".

- A) 70°
B) 140°
C) 110°
D) 40°
E) 80°



PROBLEMA N° 10

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Calcule $m\widehat{MNC}$.

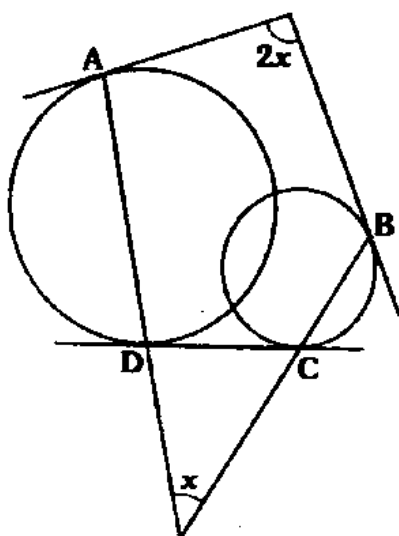


- A) θ B) $360^\circ - 2\theta$
 C) $90^\circ + \theta$ D) $90^\circ - \theta$
 E) $180^\circ - \theta$

PROBLEMA N° 11

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Calcule "x".



- A) 30° B) 36° C) 45°
 D) 54° E) 60°

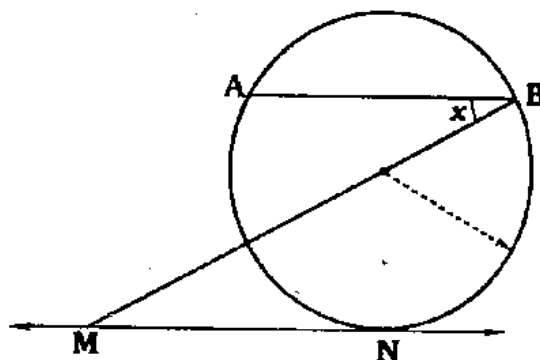
PROBLEMA N° 12

En la semicircunferencia de diámetro AB se ubica M, luego en el triángulo AMB se inscribe la circunferencia de centro O, en $\widehat{MB}$. Se ubica P talque $MP=PB$ y $m\angle MOP=90^\circ$. Calcule $m\widehat{MB}$.

- A) 105° B) 74° C) 53°
 D) 90° E) 106°

PROBLEMA N° 13

N es punto de tangencia, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ y $AB=MN$. Calcule "x".



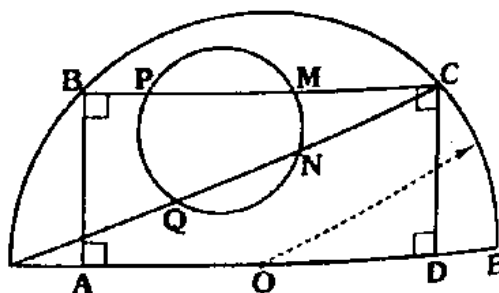
- A) 30° B) 45° C) $\frac{53^\circ}{2}$
 D) $\frac{37^\circ}{2}$ E) 8°

PROBLEMA N° 14

En el gráfico, $2(DO)=3(DE)$ y $m\widehat{PQ}=80^\circ$.

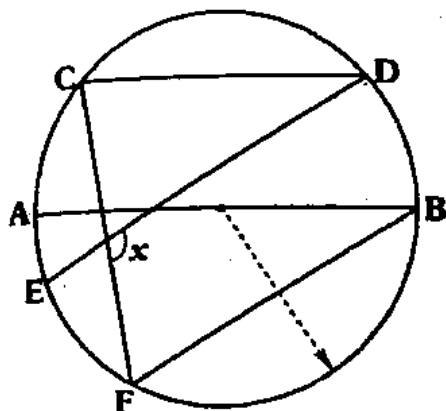
Calcule $m\widehat{MN}$.

- A) 27°
 B) 28°
 C) 16°
 D) 20°
 E) 14°



PROBLEMA N° 15

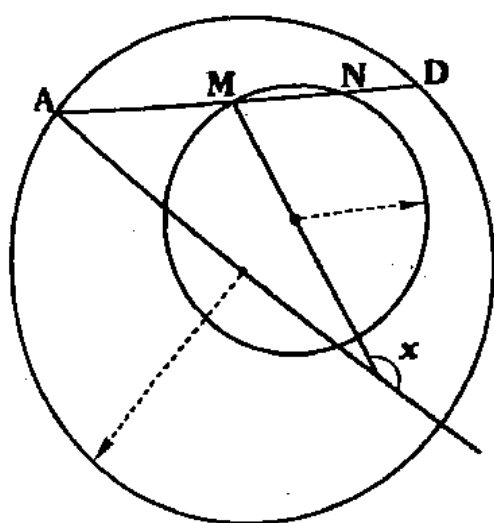
Si $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{ED} \parallel \overline{FB}$ y $m\widehat{EF} = 50^\circ$.
Calcule "x".



- A) 130° B) 100°
C) 110° D) 120°
E) 115°

PROBLEMA N° 16

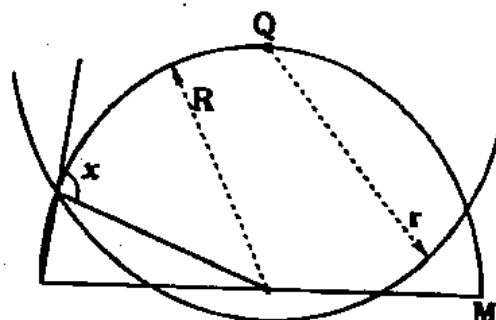
En el gráfico, $m\widehat{AD} - m\widehat{MN} = 40^\circ$.
Calcule "x".



- A) 140° B) 120°
C) 160° D) 165°
E) 170°

PROBLEMA N° 17

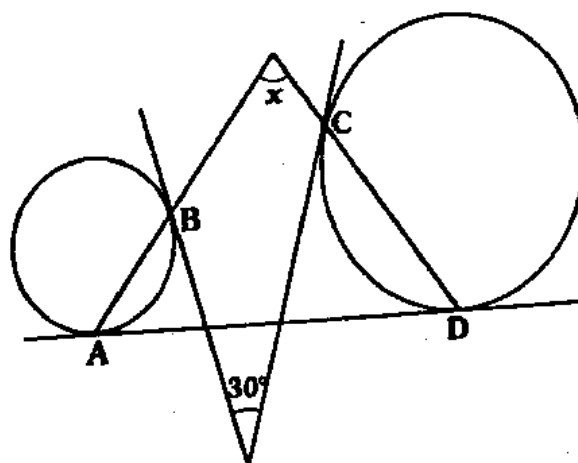
En el gráfico, $m\widehat{QM} = 90^\circ$ y $\frac{R}{r} = \frac{5}{6}$.
Calcule "x".



- A) 98° B) 95° C) 100°
D) 104° E) 105°

PROBLEMA N° 18

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

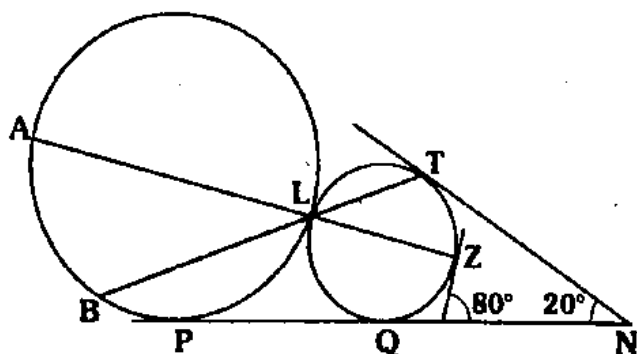


- A) 105° B) 75° C) 120°
D) 60° E) 90°

PROBLEMA N° 19

P, L, T, Z y Q son puntos de tangencia.

Calcule $m\widehat{AB} - m\widehat{BP}$.

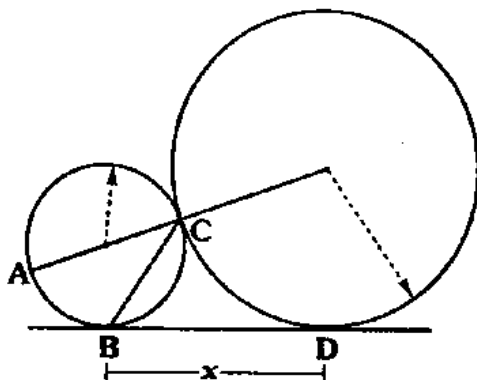


- A) 80° B) 50° C) 60°
D) 40° E) 90°

PROBLEMA N° 20

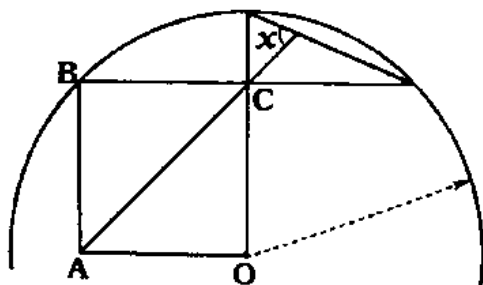
Si $m\widehat{AB} = 60^\circ$ y $BC = a$, B y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

- A) $a\sqrt{3}$
B) $2a$
C) a
D) $a\sqrt{2}$
E) $a\sqrt{5}$



PROBLEMA N° 21

En el gráfico, ABCO es un cuadrado. Calcule "x".

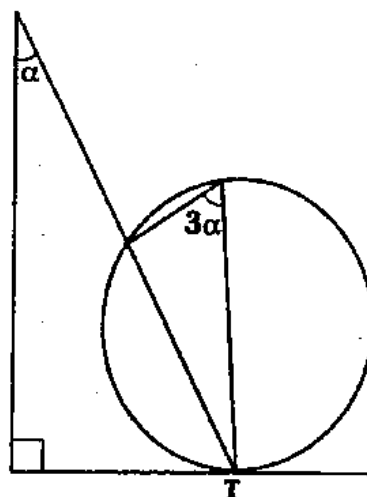


- A) 53° B) 60° C) 45°
D) $\frac{135^\circ}{2}$ E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 22

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Calcule "x".

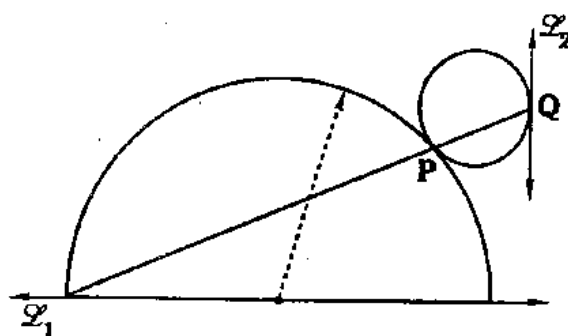


- A) $22^\circ 30'$ B) $26^\circ 30'$ C) 30°
D) 45° E) 23°

PROBLEMA N° 23

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia.

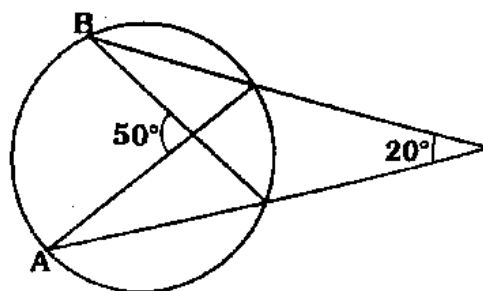
Demostrar $\overline{\mathcal{L}}_1 \perp \overline{\mathcal{L}}_2$.



PROBLEMA N° 24

Calcule $m\widehat{AB}$

- A) 80°
B) 35°
C) 70°
D) 55°
E) 45°

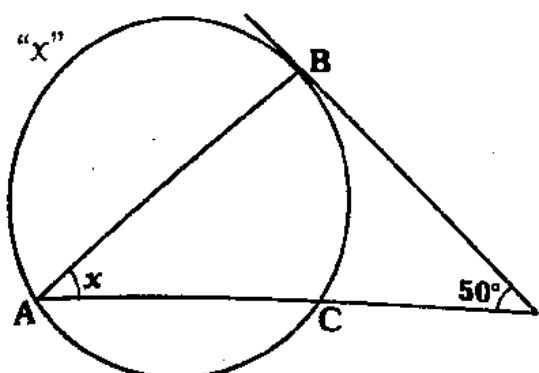


PROBLEMA N° 25

Si $m\widehat{AC} = 120^\circ$ y B es punto de tangencia.

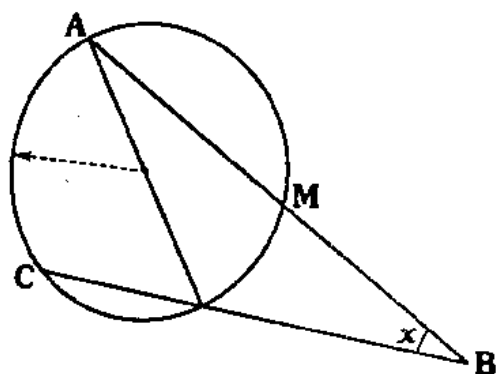
Calcule "x".

- A) 55°
- B) 45°
- C) 35°
- D) 40°
- E) 80°



PROBLEMA N° 26

Si $m\widehat{AC} = 100^\circ$ y $AM = MB$. Calcule "x".

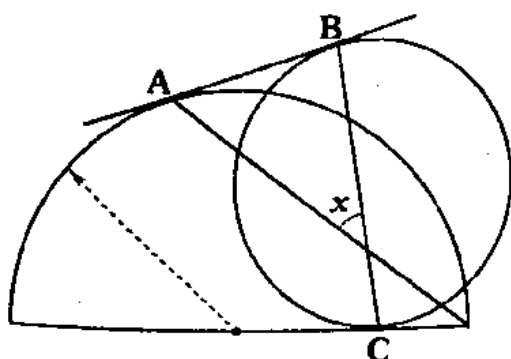


- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 35°

PROBLEMA N° 27

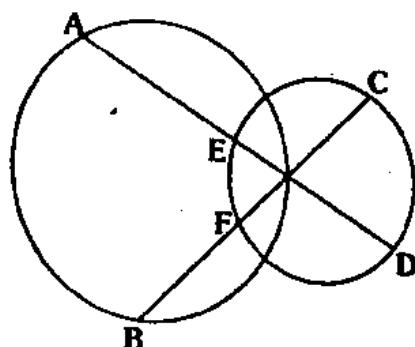
Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".

- A) 30°
- B) 60°
- C) 36°
- D) 72°
- E) 45°



PROBLEMA N° 28

Si $m\widehat{AB} = 160^\circ$ y $m\widehat{CD} = 90^\circ$. Calcule $m\widehat{EF}$.

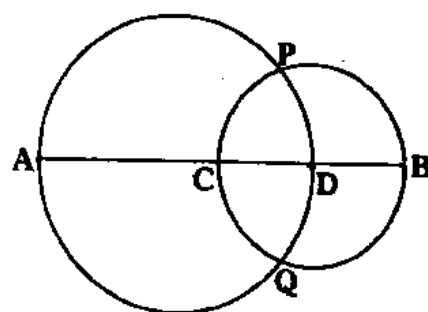


- A) 50°
- B) 80°
- C) 40°
- D) 60°
- E) 70°

PROBLEMA N° 29

Si $m\widehat{AP} + m\widehat{PB} = 280^\circ$. Calcule $m\widehat{CQ} + m\widehat{DQ}$.

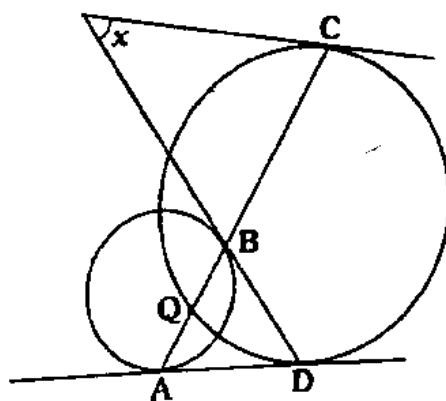
- A) 100°
- B) 140°
- C) 80°
- D) 70°
- E) 105°



PROBLEMA N° 30

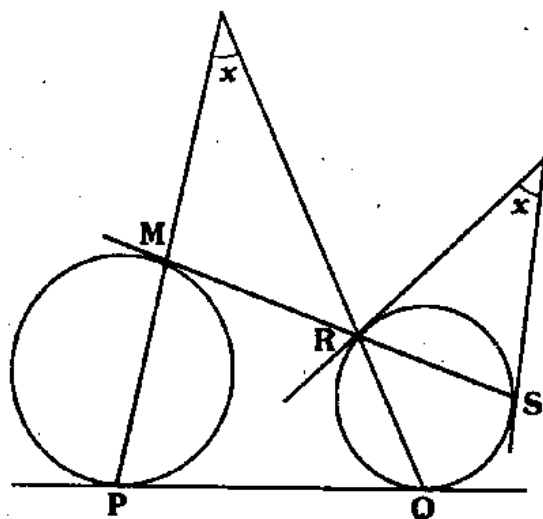
Si $m\widehat{DQ} = 40^\circ$; A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

- A) 50°
- B) 20°
- C) 40°
- D) 30°
- E) 10°



PROBLEMA N° 31

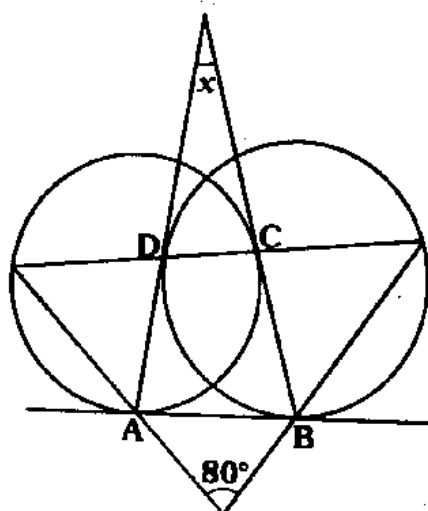
Si P, Q, R, S y M son puntos de tangencia.
Calcule "x".



- A) 36° B) 45° C) 54°
D) 60° E) 30°

PROBLEMA N° 32

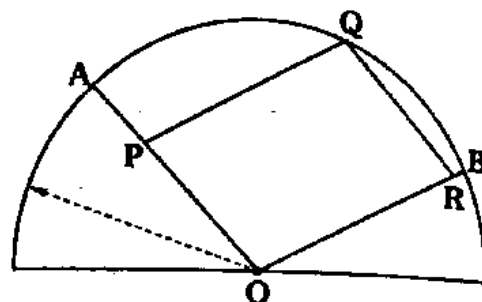
Si A, B, C y D son puntos de tangencia.
Calcule "x".



- A) 40° B) 20° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA N° 33

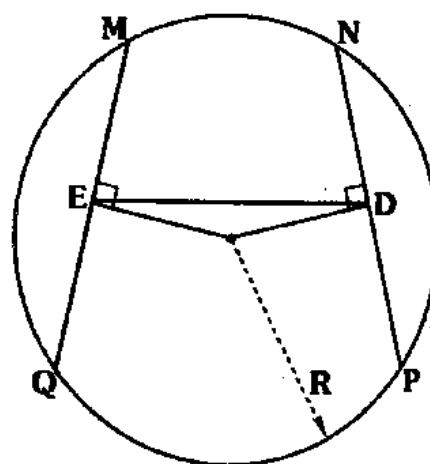
Si OPQR es un paralelogramo. Calcule el máximo valor entero que puede tomar $m\widehat{AB}$.



- A) 179° B) 134° C) 89°
D) 119° E) 59°

PROBLEMA N° 34

En el gráfico, $R=2$, $m\widehat{MN}=60^\circ$ y $m\widehat{QM}=m\widehat{NP}=105^\circ$.
Calcule ED.

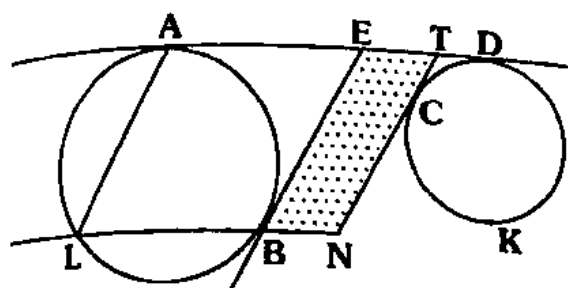


- A) 2,5 B) 2,8 C) 3
D) 3,5 E) $\sqrt{2}+1$

PROBLEMA N° 35

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $3(m\widehat{CD})=2(m\angle ALB)$ y NBET es un paralelogramo.

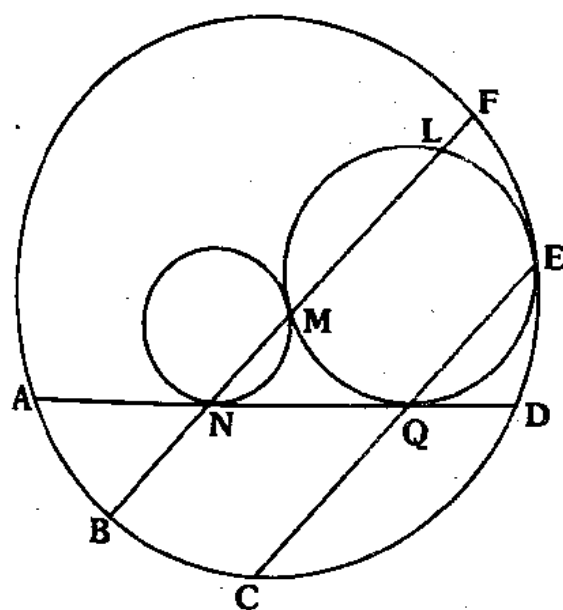
Calcule $m\angle BNC$.



- A) 115° B) 116° C) 118°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 36

En el gráfico, N, M, Q y E son puntos de tangencia. Si $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$ y $m\widehat{CDE} = 112^\circ$. Calcule $m\widehat{EL}$.



- A) 56° B) 68° C) 34°
D) 38° E) 66°

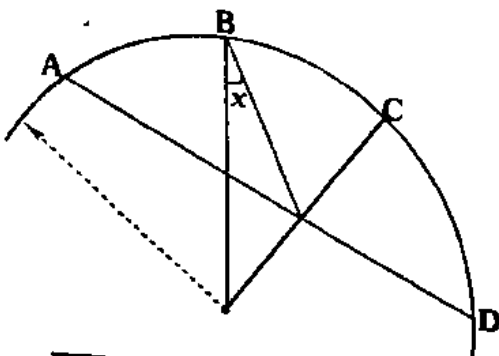
PROBLEMA N° 37

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 40^\circ$.

Calcule "x".

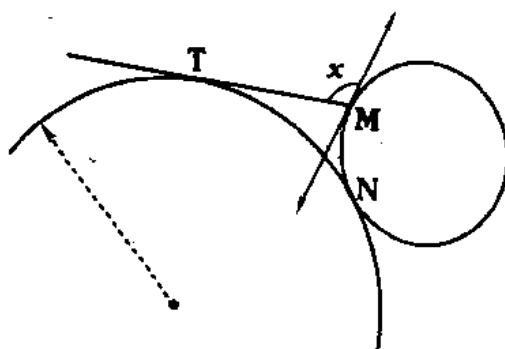
CIRCUNFERENCIA

- ❖ A) 20°
❖ B) 30°
❖ C) 40°
❖ D) 50°
❖ E) 36°



PROBLEMA N° 38

En el gráfico, M, N, T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TN} + m\widehat{NM} = 140^\circ$. Calcule "x".

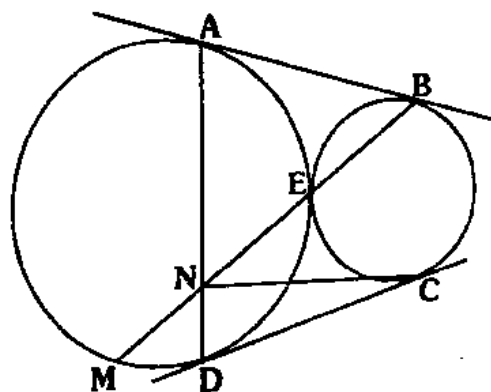


- ❖ A) 70° B) 110° C) 140°
❖ D) 120° E) 100°

PROBLEMA N° 39

En el gráfico, A, B, C, D y E son puntos de tangencia.

Si $m\widehat{DM} = 50^\circ$, calcule $m\angle DCN$.

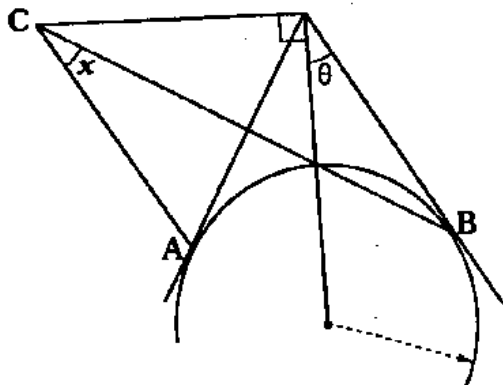


- ❖ A) 15° B) 20° C) $22^\circ 5'$
❖ D) 24° E) 25°

PROBLEMA N° 40

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.

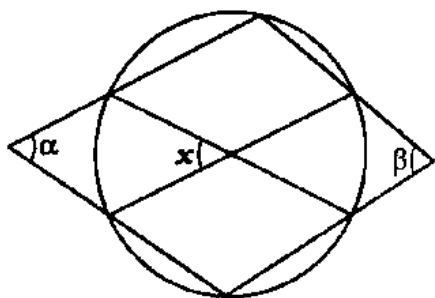
Calcule $m\angle ACB$.



- A) θ B) 2θ
C) $45^\circ - \theta$ D) $45^\circ - 2\theta$
E) $90^\circ - 2\theta$

PROBLEMA N° 41

Si $\alpha + \beta = 150^\circ$. Calcule "x".



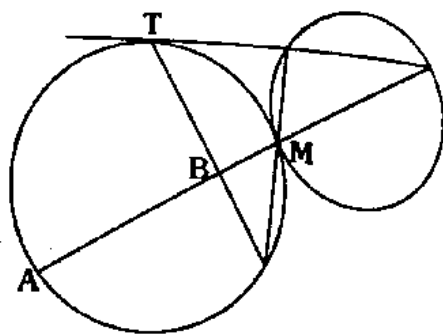
- A) 30° B) 75° C) 105°
D) 45° E) 15°

PROBLEMA N° 42

En el gráfico, M y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AT} = 110^\circ$ y $m\angle TBA = 80^\circ$.

Calcule $m\widehat{TM}$.

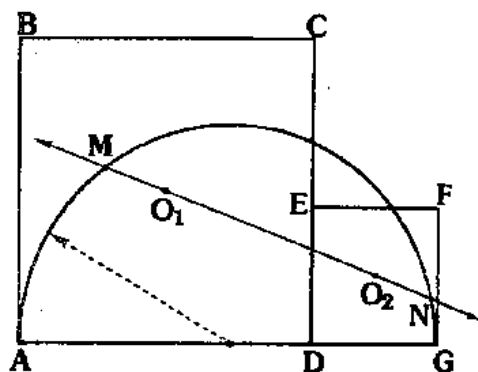
- A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 30°



PROBLEMA N° 43

En el gráfico, O_1 y O_2 son centros de los cuadrados ABCD y DEFG. Si $AD = 3(DG)$.

Calcule $m\widehat{AM} - m\widehat{NG}$



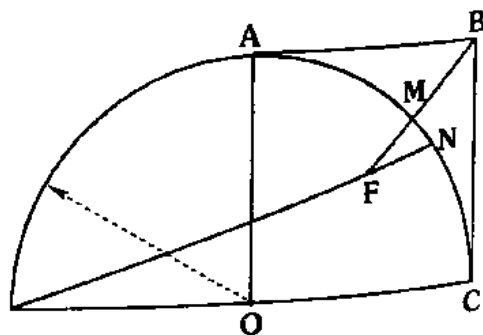
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) $\frac{53^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 44

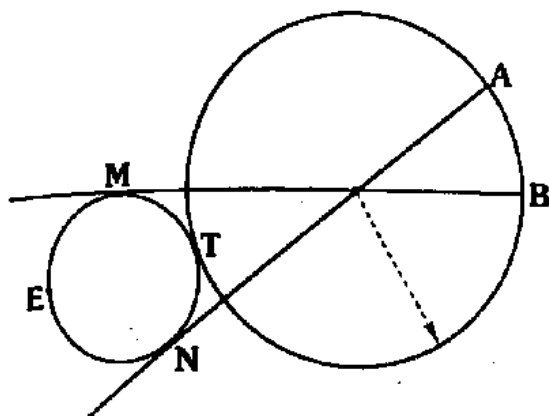
En el gráfico, F es centro del cuadrado OABC.

Calcule $m\widehat{MN}$.

- A) 30°
B) 15°
C) 8°
D) 4°
E) 16°

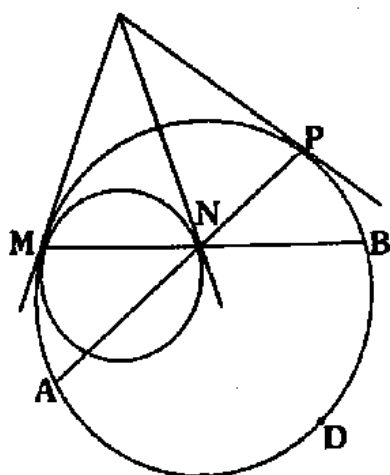


En el gráfico, M, N y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MEN} = 6(m\widehat{AB})$, calcule $m\widehat{AB}$.



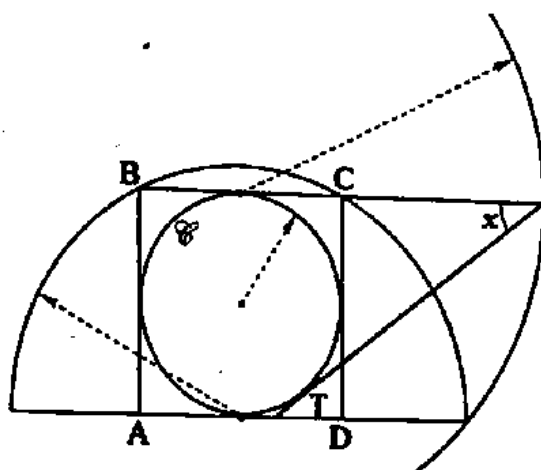
- A) 30° B) 32° C) 36°
D) 40° E) 45°

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ADB}$.



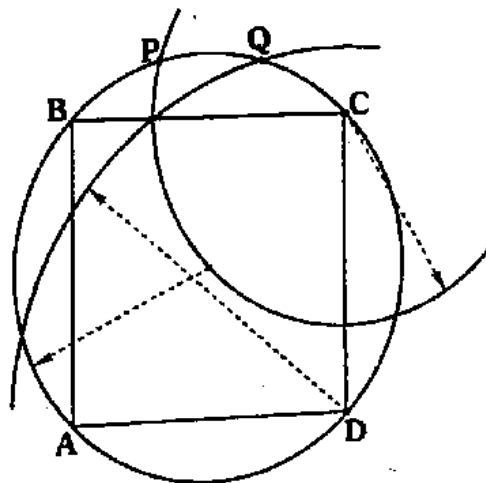
- A) 90° B) 135° C) 120°
D) 180° E) 205°

En el gráfico, ABCD es un cuadrado circunscrito respecto de $\odot$ y T es punto de tangencia.
Calcule "x".



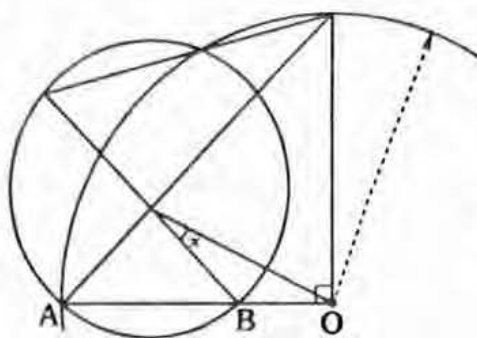
- A) 16° B) 30°
C) 37° D) 45°
E) 53°

En el gráfico, ABCD es un cuadrado.
Calcule $m\widehat{PQ}$.

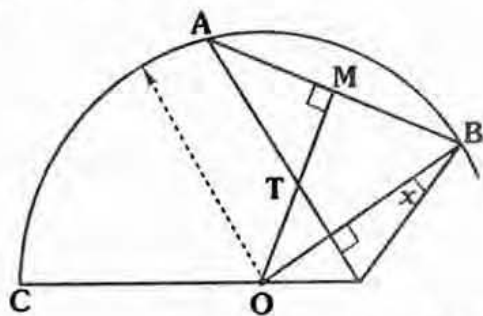


- A) 15°
B) 16°
C) 30°
D) $37^\circ/2$
E) $53^\circ/2$

- E) 14°

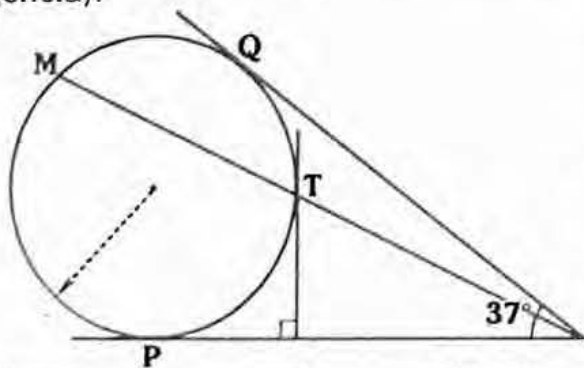


En el gráfico, $OT=MT$ y $m\widehat{CAB}=135^\circ$.
Calcule "x".



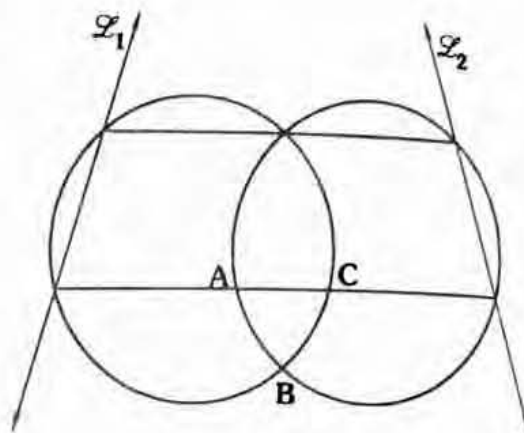
- A) 14° B) $18,5^\circ$ C) $26,5^\circ$
D) $22,5^\circ$ E) 30°

Calcule $m\widehat{MP}$ (T, P y Q son puntos de tangencia).



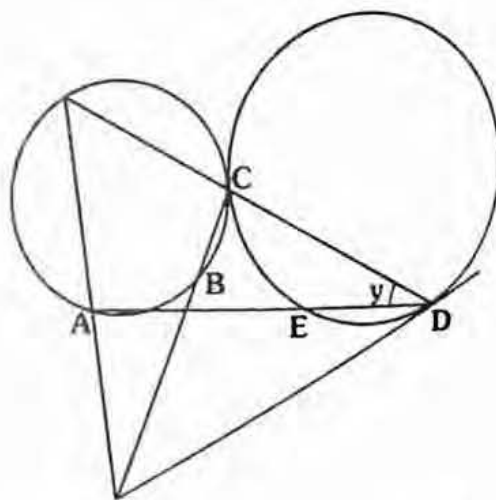
- A) 90° B) 106° C) 104°
D) 127° E) 143°

❖ Calcule $m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$.



- ❖ A) 40° B) 80° C) 60°
❖ D) 30° E) 20°

- * C y D son puntos de tangencia. Si
- * $m\widehat{CED} - m\widehat{AB} = 50^\circ$, calcule y



- ❖ A) 25° B) 50° C) 20°
❖ D) 40° E) 30°

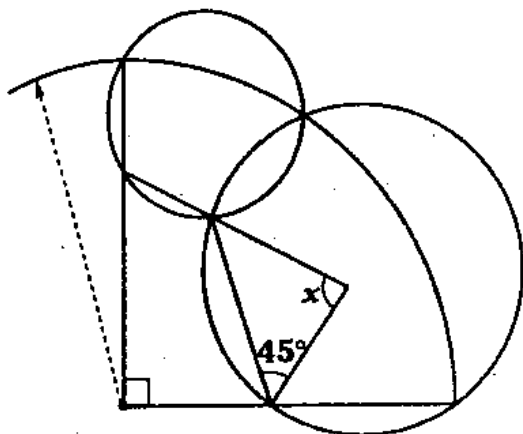
PROBLEMA N° 54

Desde el punto A exterior a una circunferencia se trazan la tangente AT (T es punto de tangencia) y la secante ABC, tal que $m\widehat{TC} = 2(m\widehat{BT})$ y AT es igual al radio de dicha circunferencia. Calcule $m\angle CAT$.

- A) 10° B) $12,5^\circ$ C) 15°
D) $17,5^\circ$ E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 55

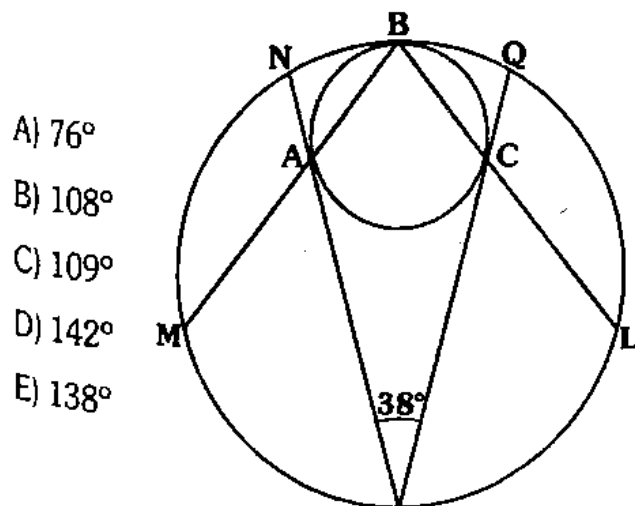
Calcule "x", en:



- A) 60° B) 90° C) 105°
D) 75° E) 120°

PROBLEMA N° 56

En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{MN} + m\widehat{QL}$.

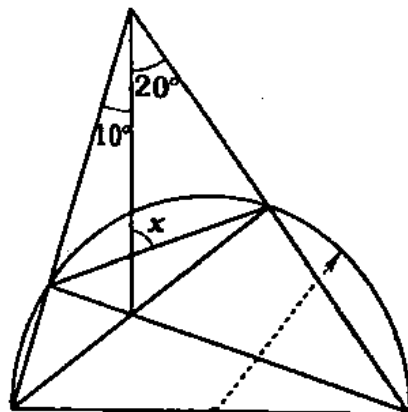


- A) 76°
B) 108°
C) 109°
D) 142°
E) 138°

PROBLEMA N° 57

En el gráfico, calcule "x".

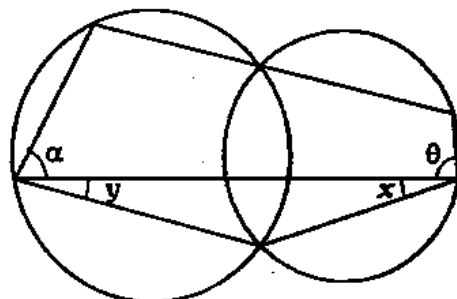
- A) 70°
B) 60°
C) 50°
D) 80°
E) 40°



PROBLEMA N° 58

En el gráfico, $\alpha + \theta = 140^\circ$.

Calcule $x + y$.

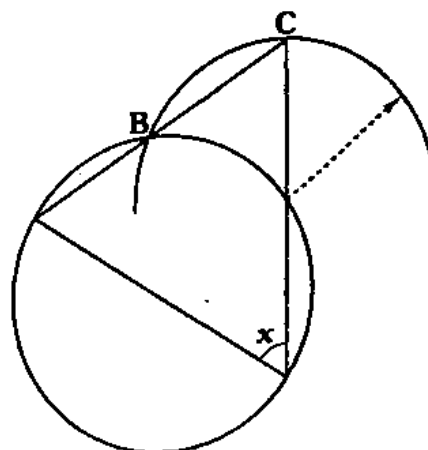


- A) 40° B) 20° C) 50°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA N° 59

Si $m\widehat{BC} = 50^\circ$. Calcule "x".

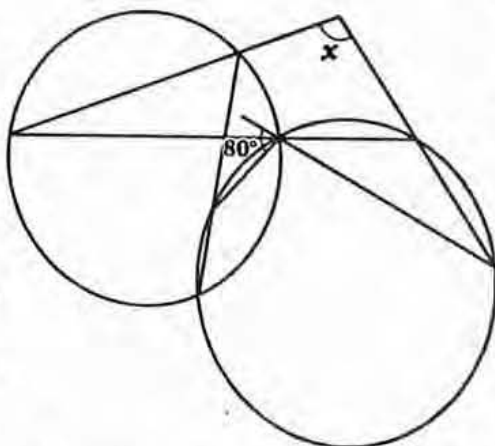
- A) 50°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 80°



PROBLEMA N° 60

En el gráfico, calcule "x".

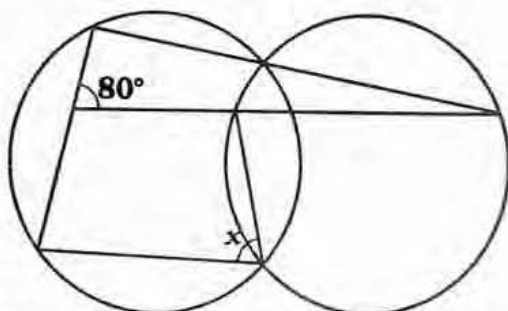
- A) 80°
- B) 160°
- C) 100°
- D) 140°
- E) 120°



PROBLEMA N° 61

Calcule "x", en:

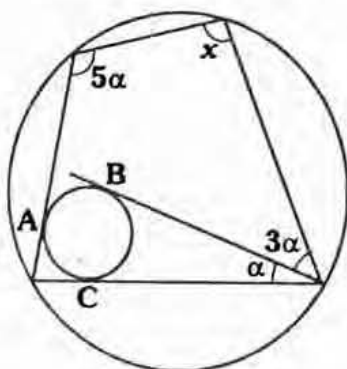
- A) 80°
- B) 100°
- C) 120°
- D) 140°
- E) 160°



PROBLEMA N° 62

A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} = 60^\circ$. Calcule "x".

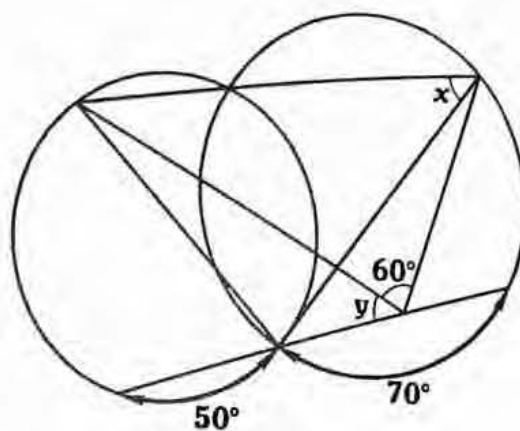
- A) 120°
- B) 130°
- C) 140°
- D) 150°
- E) 160°



PROBLEMA N° 63

Calcule x/y .

- A) 2
- B) $1/2$
- C) 1
- D) $2/3$
- E) $3/2$



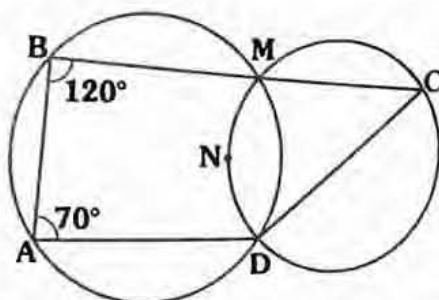
PROBLEMA N° 64

Desde el punto R exterior a una circunferencia de diámetro AB, se trazan las secantes RA y RB que intersecan a la circunferencia en P y Q respectivamente. Si $AP = PR$ y $m\widehat{QB} = 36^\circ$. Calcule $m\angle PQR$.

- A) 36°
- B) 54°
- C) 72°
- D) 45°
- E) 66°

PROBLEMA N° 65

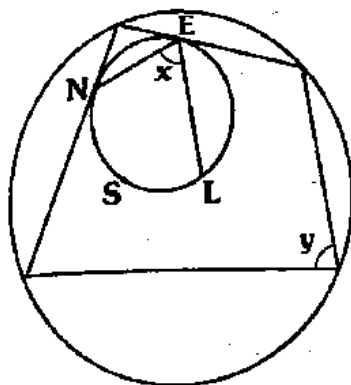
En el gráfico, $m\widehat{MND} = m\widehat{MC}$. Calcule $m\angle ADC$.



- A) 110°
- B) 115°
- C) 120°
- D) 100°
- E) 140°

PROBLEMA N° 66

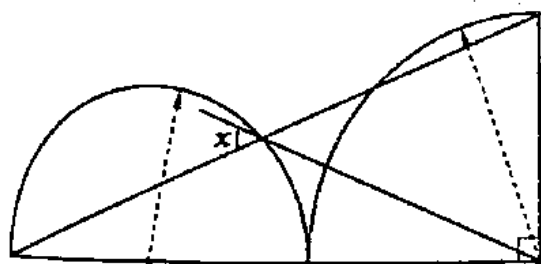
En el gráfico, N y E son puntos de tangencia. Si $x + y = 190^\circ$ y $3(m\widehat{NE}) = 4(m\widehat{EL})$. Calcule $m\widehat{NSL}$.



- A) 220° B) 230°
C) 240° D) 250°
E) 260°

PROBLEMA N° 67

Calcule "x" en:



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

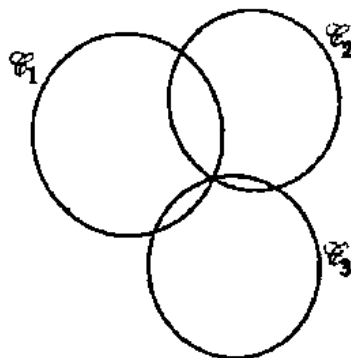
PROBLEMA N° 68

Dado el cuadrado ABCD, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M y en $\overline{AD}$ el punto N tal que $ND = 3(AN)$. Si $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ se cortan en P. Calcule $m\angle PBM$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 69

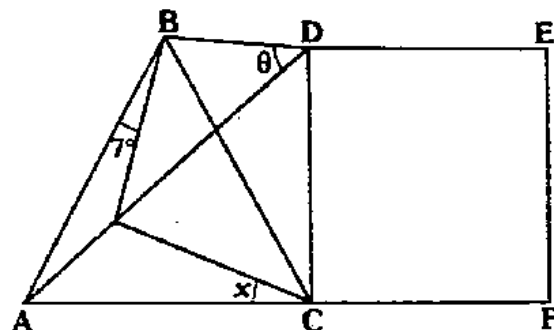
En el gráfico, indique el número de circunferencia tangentes a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$.



- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 70

En el gráfico, las regiones ABC y CDEF son regulares e isoperimétricas. Calcule x en función de "θ".



- A) $60^\circ - \theta$ B) $53^\circ - \theta$ C) $37^\circ - \theta$
D) $\frac{37^\circ}{2} - \theta$ E) $23^\circ - \theta$

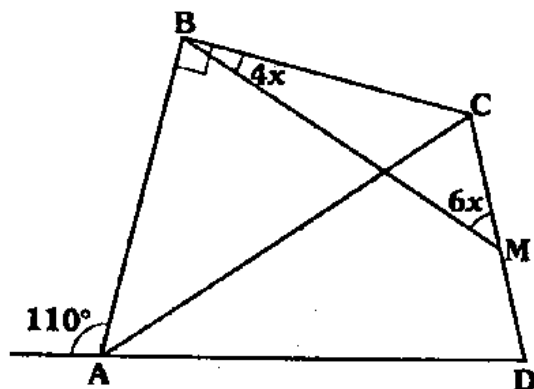
PROBLEMA N° 71

En la diagonal AC del cuadrado ABCD se ubica P, talque $m\angle CBP = 20^\circ$, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, de modo que $m\angle DCE = 25^\circ$. Calcule $m\angle PEC$.

- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 28°

PROBLEMA N° 72

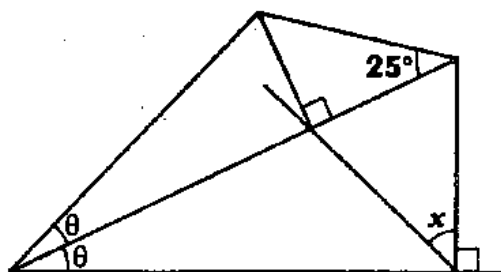
Si $AC=AD$ y $CM=MD$. Calcule "x".



- A) $2,5^\circ$ B) 2° C) 5°
D) $7,5^\circ$ E) 10°

PROBLEMA N° 73

En el gráfico, calcule "x".



- A) 20° B) 40° C) 25°
D) 65° E) 50°

PROBLEMA N° 74

En un cuadrilátero inscriptible tres de sus ángulos interiores consecutivos miden x, $2x$ y $4x$.

Calcule la medida el mayor de los ángulos de dicho cuadrilátero.

- A) 120° B) 150° C) 144°
D) 140° E) 108°

PROBLEMA N° 75

La circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD es tangente a $\overline{BC}$ en P y a $\overline{CD}$ en M. Se traza $\overline{MQ} \perp \overline{AP}$ (Q en $\overline{AP}$).

Calcule $m\angle QDM$.

- A) 37° B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) 30°
D) $\frac{45^\circ}{2}$ E) $\frac{53^\circ}{2}$

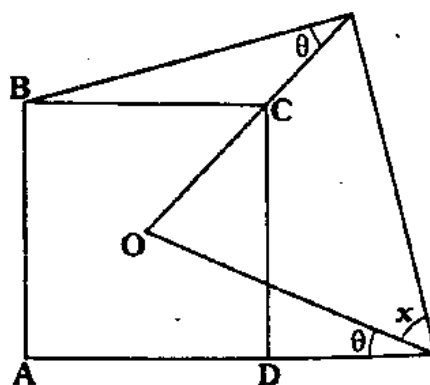
PROBLEMA N° 76

ABCD es un cuadrado de centro O, M es exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que $m\angle BMC = 90^\circ$. Calcule $m\angle OMC$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 37°

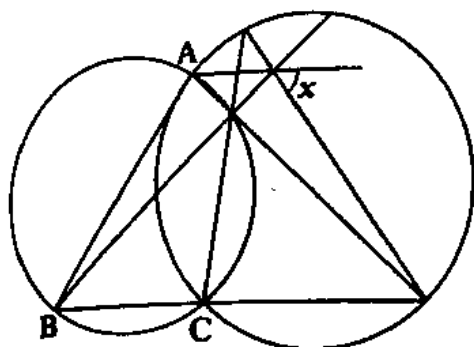
PROBLEMA N° 77

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule "x".



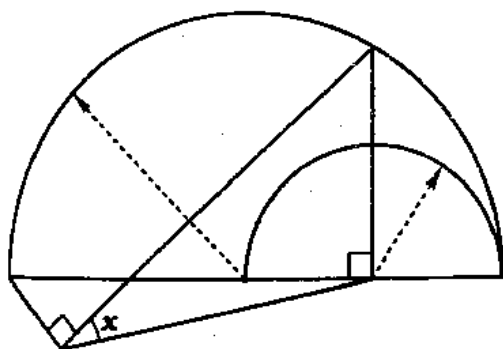
- A) 45° B) 60°
C) 2θ D) $45^\circ + \theta$
E) $90^\circ - \theta$

Si $m\widehat{ABC} = 220^\circ$, calcule "x".



- A) 140° B) 70° C) 110°
D) 55° E) 65°

Calcule "x", en:



- ❖ A) 30° B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) $\frac{37^\circ}{2}$
❖ D) $\frac{45^\circ}{2}$ E) $\frac{75^\circ}{2}$

❖ PROBLEMA Nº 80

- ❖ En una circunferencia de diámetros $\overline{AB}$ y
- ❖ $\overline{CD}$ perpendiculares. En las prolongacio-
- ❖ nes de $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ se ubican los puntos P y
- ❖ Q, respectivamente, de modo que
- ❖ $m\angle APQ = 90^\circ$ y $\overline{AQ}$ interseca a la circun-
- ❖ ferencia en F. Si $m\widehat{FB} = 30^\circ$, calcule la
- ❖ medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$.

- ❖ A) 75° B) 60° C) 45°
❖ D) 72° E) 90°



Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA N° 81

En un triángulo ABC acutángulo, K es el circuncentro y O es el ortocentro; por B trazamos la bisectriz que intercepta a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en E.

Si $m\angle ABC = 60^\circ$ y $m\angle OKA = 12^\circ$, halle $m\angle BEK$.

- A) 18° B) 24° C) 30°
D) 36° E) 48°

PROBLEMA N° 82

En un triángulo ABC, se ubica un punto F en la altura $\overline{BH}$ al que $m\angle FAC = 3m\angle BCF = m\angle BCA$ y $\overline{AB} \cong \overline{FC}$. Halle $m\angle HBC$.

- A) 30° B) 36° C) 40°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 83

En una recta se ubican los puntos A, M, B y N consecutivos. Se construyen una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ de centro M y el cuadrante BNP con centro en N. Una tangente exterior común determina los puntos de tangencia E en la semicircunferencia y F en el cuadrante. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{AE}$ y $\overline{PF}$.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N° 84

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recot en B) y se ubica un punto interior M. Si $MC = 8$; $m\angle BCM = m\angle MAC$, $AB = BC$ y $m\angle AMB = 3m\angle ACB$, halle MB.

- A) 4 B) 4,5 C) 5
D) 5,5 E) 6

PROBLEMA N° 85

En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$ de manera que $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si $m\angle A = 80^\circ$ y $m\angle BQA = 30^\circ$, halle $m\angle C$.

- A) 20° B) 25° C) 30°
D) 36° E) 45°

PROBLEMA N° 86

En el rectángulo ABCD, M y N son puntos medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Calcule el perímetro de MNC, si el perímetro de ABCD es $2p$ y la suma de las medidas de los inradios de AMN, MBC y NCD es S.

- A) $p + s$ B) $p - s$
C) $2(p - s)$ D) $\frac{p + s}{2}$
E) $\frac{3}{2}(p - s)$

PROBLEMA N° 87

ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{AB} = \overline{CD}$, $BC < AD$). Si M y N son puntos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

tales que $MBCN$ y $AMND$ son circunscriptibles, la mediana del trapecio mide "m u y" $AB = \ell$, calcule la longitud de MN .

- A) $\ell - m$ B) $\ell + m$ C) $\frac{\ell + m}{2}$
D) $\frac{\ell - m}{2}$ E) $2(\ell - m)$

PROBLEMA N° 88

La circunferencia inscrita al triángulo ABC con centro en R , es tangente a $\overline{AB}$ en P y la circunferencia exinscrita relativa al lado AB es tangente a ese lado en E . Si $BC=6$, $AC=9$, $DR=4$, halle la distancia de R a E .

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 4,5 E) 6

PROBLEMA N° 89

En el triángulo ABC rectángulo (recto en B) se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ y los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EH}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ (F y H en $\overline{AC}$). Si $FH = \ell$, calcule el inradio del triángulo ABC .

- A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) ℓ
D) $\frac{2\ell}{3}$ E) $\frac{\ell}{4}$

PROBLEMA N° 90

Demostrar que la longitud del exradio relativo a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los exradios relativos a los catetos y del inradio.

PROBLEMA N° 91

Las circunferencias C_1 y C_2 son exteriores, AB y CD son sus tangentes comunes exteriores (A y C en C_1 , B y D en C_2). La tangente común interior EF (E en C_1 , F en C_2), intercepta a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en M y N . Si $AB + EF = \ell$, calcule $BM + CN$.

- A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{3\ell}{2}$
D) 2ℓ E) $\frac{2\ell}{3}$

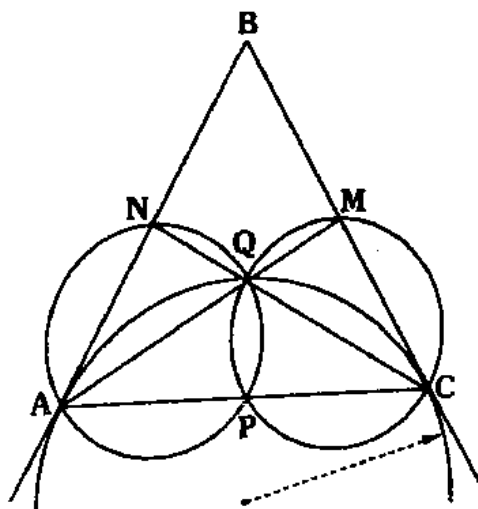
PROBLEMA N° 92

Desde F se trazan $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$ tangente a una circunferencia en A y B tales que $m\angle AFB = 90^\circ$. Por F se traza la secante que intercepta a la circunferencia en E y M tal que $m\widehat{AM} = 2m\widehat{AE}$. Calcule $m\angle AFE$.

- A) 18° B) $22,5^\circ$ C) 27°
D) 15° E) 30°

PROBLEMA N° 93

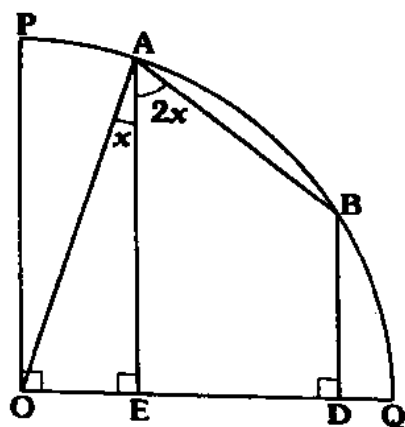
En la figura BA y BC son tangentes. Calcule la medida del ángulo AQN .



- A) 60° B) 75° C) 45°
D) 53° E) $67,5^\circ$

PROBLEMA N° 94

En la figura $AB=2BD$ y POQ es un cuadrante. Calcule "x".



- A) 20° B) 25°
C) 30° D) $22,5^\circ$
E) 15°

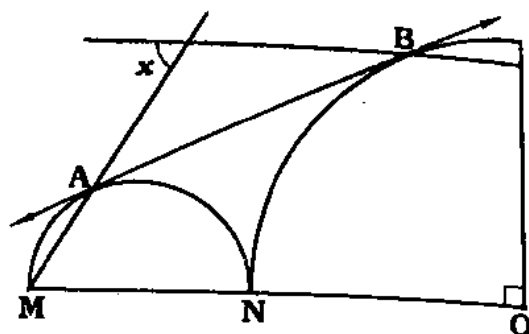
PROBLEMA N° 95

Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores en F. Se trazan las secantes AFB y CFH, A y C en C_1 y B y H en C_2 . Si la $m\widehat{AC}=140^\circ$, calcule el ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos CAB y CHB.

- A) 45° B) 40°
C) 50° D) 60°
E) 55°

PROBLEMA N° 96

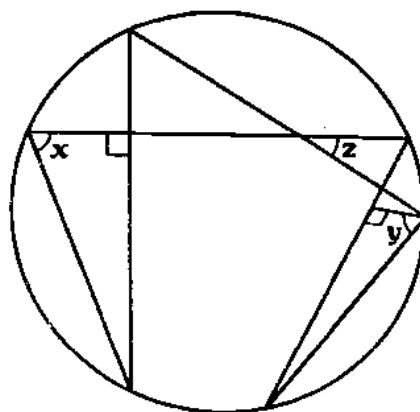
En la figura $\widehat{MAN}$ es semicircunferencia y OCN un cuadrante A y B son puntos de tangencia. Halle "x".



- A) 45° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA N° 97

En la figura, halle $x+y+z$



- A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 180°

PROBLEMA N° 98

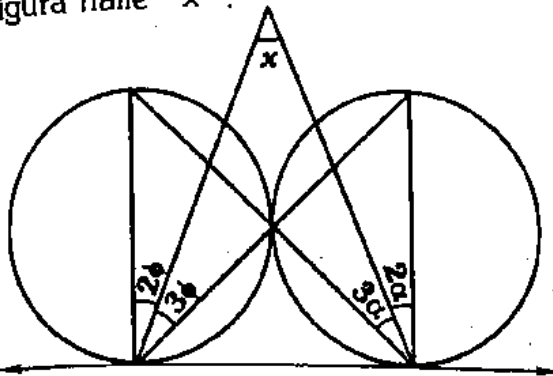
Dos circunferencias de centros O y O_1 son tangentes interiores en C (O_1 de radio menor) y las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ ($B \in \widehat{AC}$) de la circunferencia O se interceptan en E (punto de O_1) que es el punto de tangencia de $\overline{BD}$ con O_1 . Si $m\widehat{AB}=52^\circ$ y $m\widehat{BC}=72^\circ$, calcule $m\angle ACD$.

- A) 26° B) 25° C) 28°
D) 29° E) 30°

PROBLEMA N° 99

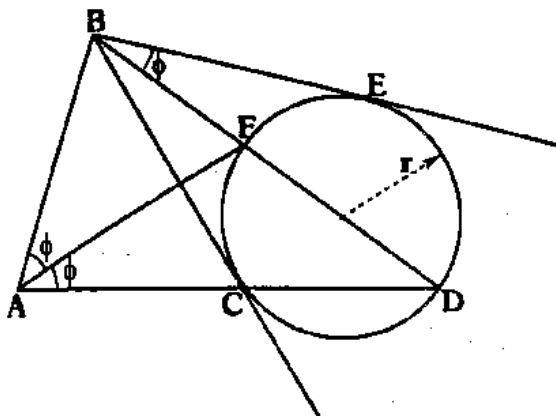
En la figura halle "x".

- A) 36°
- B) 42°
- C) 24°
- D) 30°
- E) 32°



PROBLEMA N° 100

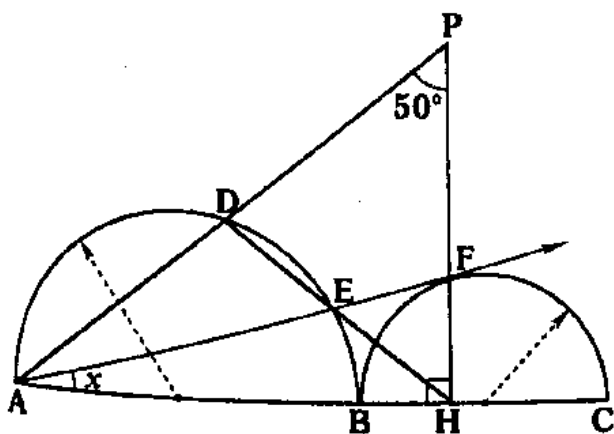
En la figura, calcule AB, si $r=3u$.



- A) $2\sqrt{3}$
- B) $3\sqrt{2}$
- C) $\sqrt{2}+1$
- D) $\sqrt{3}+1$
- E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 101

En la figura, halle "x".



- A) 15°
- B) 10°
- C) 5°
- D) 20°
- E) 25°

PROBLEMA N° 102

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y luego $\overline{HN} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HM} \perp \overline{BC}$. Si $m\angle MAC = 39^\circ$, calcule $m\angle MNC$.

- A) 36°
- B) 40°
- C) 39°
- D) 51°
- E) 42°

PROBLEMA N° 103

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$. Calcule la medida del ángulo que determinan los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{BK}$, siendo K el circuncentro del triángulo ABC.

- A) 60°
- B) 75°
- C) 90°
- D) 120°
- E) ED

PROBLEMA N° 104

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CP}$. Si $m\angle BAC = \alpha$, $m\angle ABC = \beta$ y $m\angle BCA = \gamma$, entonces demostrar que:

- A) $m\angle PQF = 180^\circ - 2\alpha$
- B) $m\angle PFQ = 180^\circ - 2\beta$
- C) $m\angle QPF = 180^\circ - 2\gamma$

PROBLEMA N° 105

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica R punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{BR}$ ($F \in \overline{BR}$), calcule la distancia del centro del cuadrado al segmento BR.

- A) $\frac{1}{3}AF$
- B) $\frac{1}{4}AF$
- C) $\frac{2}{3}AF$
- D) $\frac{1}{2}AF$
- E) $\frac{3}{4}AF$

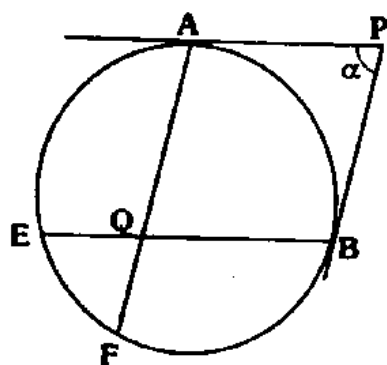
PROBLEMA N° 106

Dadas dos circunferencias ortogonales de centros O_1 y O_2 que se interceptan en B y P, se trazan las tangentes común. AC más distante de B que de P. Halle la $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 45° C) 50°
D) 60° E) 71°

PROBLEMA N° 107

En la figura A y B son puntos de tangencia, $\overline{EB} \parallel \overline{AP}$, $\overline{AF} \parallel \overline{PB}$ sea: $m\angle APB = \alpha$, halle $m\widehat{EF}$.



- A) $90^\circ - \alpha$ B) $3\alpha - 180^\circ$
C) $2\alpha - 90^\circ$ D) $\frac{\alpha}{2}$
E) α

PROBLEMA N° 108

¿Es verdad?

- I. En una circunferencia, a arcos congruentes le corresponden cuerdas congruentes.
- II. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda, es perpendicular a dicha cuerda.
- III. En una circunferencia, si las distancias del centro a dos cuerdas de la circunferencia son iguales, entonces

dichas cuerdas son paralelas.

- A) sólo I B) sólo II
C) sólo III D) I, II y III
E) sólo I y II

PROBLEMA N° 109

Se tiene el rectángulo ABCD, en $\overline{AD}$ se ubica un punto F de manera que en el cuadrilátero ABCF se encuentra inscrita una circunferencia de diámetro $2R$, en el triángulo FDC se inscribe la circunferencia de diámetro $2r$. Calcule $2R - r$.

- A) $\frac{1}{2}AF$ B) $\frac{3}{4}AF$ C) $\frac{4}{5}AF$
D) AF E) $\frac{3}{2}AF$

PROBLEMA N° 110

Se tiene el pentágono ABCDE inscrito en una circunferencia, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, $m\widehat{AB} = 100^\circ$. Calcule: $m\angle CED$.

- A) 20° B) 25° C) 40°
D) 50° E) 75°

PROBLEMA N° 111

En una circunferencia se trazan dos cuerdas AB y CD perpendiculares entre sí. Las tangentes trazadas a la circunferencia en B y C se intersectan en F; $m\angle BFC = \theta$, calcule: $m\angle ABD$.

- A) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ B) $180^\circ - \theta$ C) $\frac{\theta}{2}$
D) $\theta - 90^\circ$ E) θ

PROBLEMA N° 112

ABCD es un cuadrilátero convexo de perímetro $2p$ circunscrito a una circunferencia. Se construyen los triángulos rectángulos BFC y AGD rectos en F y G, respectivamente, y exteriores al cuadrilátero; si $BF+FC+AG+GD=K$, calcule la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos.

- A) $\frac{K-p}{2}$ B) $K-p$
C) $\frac{K+p}{2}$ D) $p-\frac{K}{2}$
E) $K+\frac{p}{2}$

PROBLEMA N° 113

En un triángulo ABC, se traza la circunferencia $\mathcal{C}$ que contiene los puntos medios de los tres lados. Si $B \in \mathcal{C}$, entonces la $m\angle ABC$ es:

- A) 75° B) 90°
C) Depende de las medidas de los ángulos del triángulo
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 114

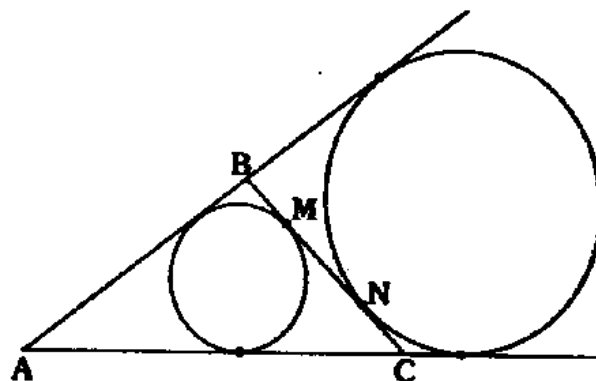
En un triángulo ABC recto en B, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ ($\overline{AM} \equiv \overline{MC}$). Si $m\angle BCA = 15^\circ$ y $AC = (\sqrt{3}+1)u$ entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo BHM es:

- A) 0,45 B) 0,75 C) 0,15
D) 0,35 E) 0,25

PROBLEMA N° 115

En el gráfico, Si $AC=b$ y $AB=c$.

Entonces: $\frac{BM}{NC} + MN$ es:



- A) $2+c-b$ B) $1+b-c$
C) $1+\frac{b-c}{2}$ D) $1+2B-C$
E) $1+b-2c$

PROBLEMA N° 116

Desde el punto P que pertenece a la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{SQ}$ interseca a la prolongación de AB en T, entonces la $m\angle PTA$ es:

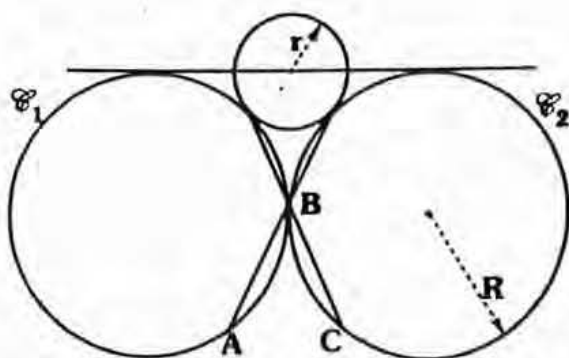
- A) 30° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 100°

PROBLEMA N° 117

$\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son congruentes y tangentes, una circunferencia tiene su centro en la recta tangente común L.

Calcule:

- a) $m\angle ABC$ b) $\frac{r}{R}$



- A) 60° ; $\frac{1}{2}$ B) 45° ; $\sqrt{2}-1$
 C) 30° ; $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ D) 53° ; $\frac{3}{8}$
 E) 37° ; $\frac{4}{9}$

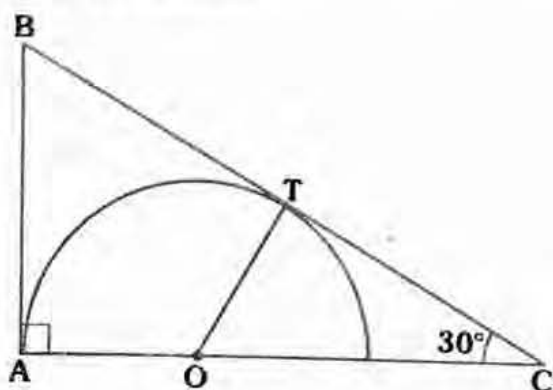
PROBLEMA N° 118

La circunferencia exinscrita de un triángulo ABC relativa a $\overline{BC}$ es tangente a la prolongación de $\overline{AC}$ en E, O es el centro de la circunferencia, se traza $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{BO}$: $m\angle AEF = 2(m\angle BAC)$. Halle la medida del ángulo BAC.

- A) 18° B) 36° C) 37°
 D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 119

En el gráfico $OT = 5u$, calcule AB en "u" (O es centro).



- ❖ A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$
 ❖ C) $5\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$
 ❖ E) $7\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 120

En una circunferencia de centro O, se traza el diámetro AB y en su prolongación se ubica el punto F, tal que $AO = OB = BF$. Desde F, tal que $AO = OB = BF$. Desde F se traza la tangente a la circunferencia, siendo J el punto de tangencia. Halle la medida del ángulo OJA.

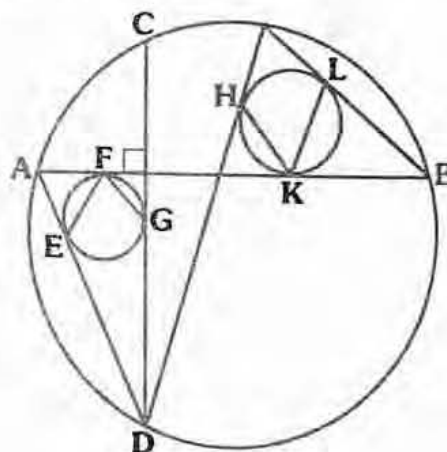
- ❖ A) 15° B) 30° C) 45°
 ❖ D) 60° E) 20°

MATERIAL
BIBLIOGRÁFICO
UNIVERSAL



PROBLEMA N° 121

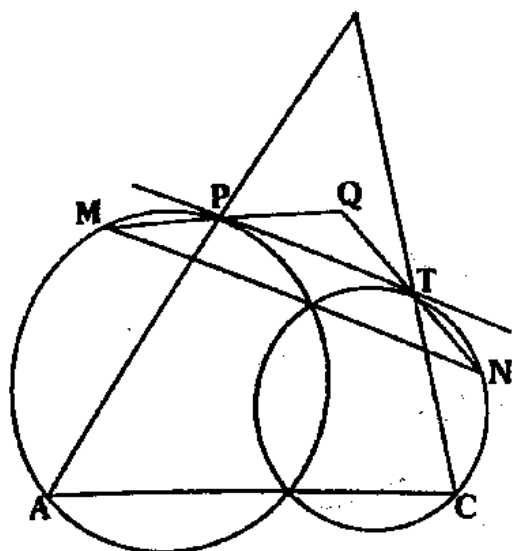
En el gráfico, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $m\angle EFG = 79^\circ$. Halle $m\angle HKL$. (E, F, G, H, K y L son puntos de tangencia).



- ❖ A) 50° B) 56° C) 58°
 ❖ D) 64° E) 72°

PROBLEMA N° 122

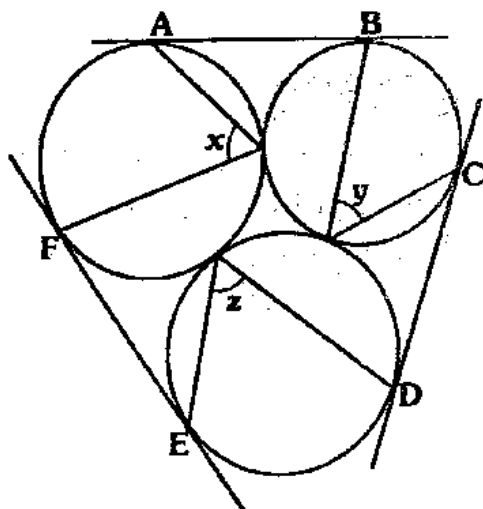
$\overline{PT}$ es la tangente común a las circunferencias. $m\angle ABC = 38^\circ$, halle $m\angle MQN$.



- A) 128° B) 138° C) 142°
D) 148° E) 152°

PROBLEMA N° 123

En la figura, A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Halle $x+y+z$.



- A) 90° B) 120° C) 180°
D) 240° E) 280°

PROBLEMA N° 124

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Sean las cuerdas AB y BC congruentes se ubican los puntos P y Q de manera

que $AP=CQ$, entonces $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{CA}$.

- II. Una circunferencia está inscrita en un triángulo ABC, tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P, Q y R respectivamente; entonces las cevianas $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ concurren.

- III. Sean las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no paralelas de una circunferencia. Entonces, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pasan por el centro de la circunferencia.

- IV. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.

- A) FV FV B) VF VF C) VV FF
D) VV FF E) FF VF

PROBLEMA N° 125

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. En una circunferencia, si el diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces divide a la cuerda y al arco que subtiende en partes congruentes respectivamente.

- II. En una circunferencia, si dos cuerdas son paralelas, entonces los arcos comprendidos entre las cuerdas, son congruentes.

- III. La circunferencia es un conjunto convexo.

- A) VF V B) VF V C) VV V
D) FF V E) FF F

PROBLEMA N° 126

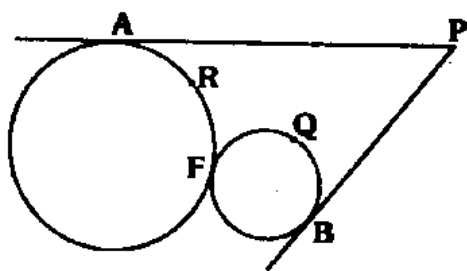
Dos circunferencias congruentes de centros O_1 y O_2 son tangentes exteriores, halle la medida del ángulo que forman las tangentes trazadas desde O_1 y O_2 a las circunferencias.

- A) 90° B) 98° C) 105°
D) 106° E) 120°

PROBLEMA N° 127

En la figura, A, F y B son puntos de tangencia, $m\widehat{ARF} = \alpha$ y $m\widehat{FQB} = \beta$.

Halle $m\angle APB$.

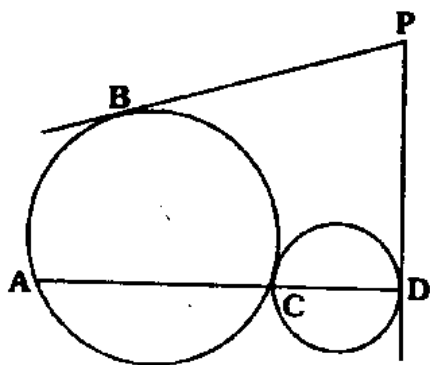


- A) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ B) $\alpha + \beta$
C) $\beta - \alpha$ D) $360^\circ - (\alpha + \beta)$
E) $360^\circ - 2\alpha - 2\beta$

PROBLEMA N° 128

En la figura mostrada B, C y D son puntos de tangencia. Si $m\angle BPD = 62^\circ$.

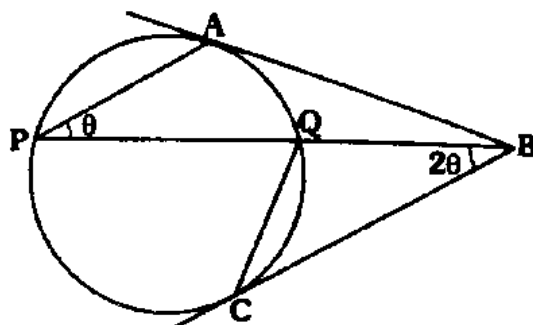
Halle $m\widehat{AB}$



- ❖ A) 30° B) 31°
❖ C) 45° D) 62°
❖ E) 75°

PROBLEMA N° 129

En la figura, A y C son puntos de tangencia. Si $AP = QC$, calcule la medida del ángulo ABC.



- ❖ A) 30° B) 45° C) 53°
❖ D) 60° E) 75°

PROBLEMA N° 130

Una circunferencia de centro O inscrita en un triángulo ABC determina los puntos de tangencia P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, la prolongación de $\overline{AO}$ intercepta a $\overline{QR}$ en T.

Si $m\angle ATR = \beta$, entonces la $m\angle ABC$ es:

- ❖ A) $45^\circ + \beta$ B) $60^\circ + \beta$
❖ C) β D) 2β
❖ E) $90^\circ - \beta$

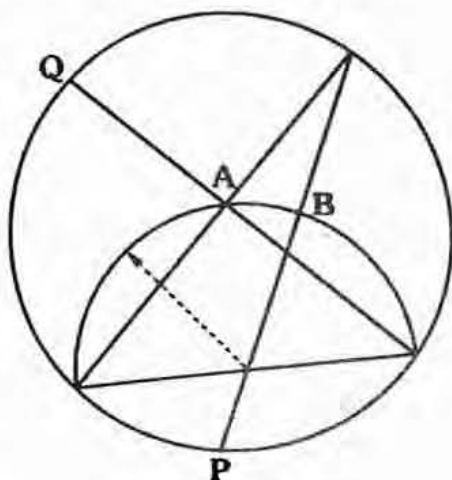


Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 131

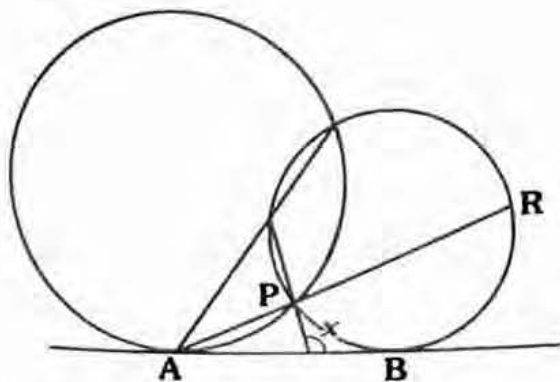
Si $m\widehat{AB} = 20^\circ$. Calcule $m\widehat{PQ}$.



- A) 100°
- B) 110°
- C) 120°
- D) 130°
- E) 140°

PROBLEMA N° 132

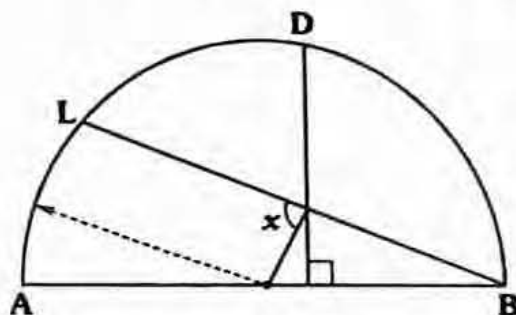
Si $m\widehat{PBR} = 160^\circ$; A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 80°
- B) 100°
- C) 40°
- D) 140°
- E) 70°

PROBLEMA N° 133

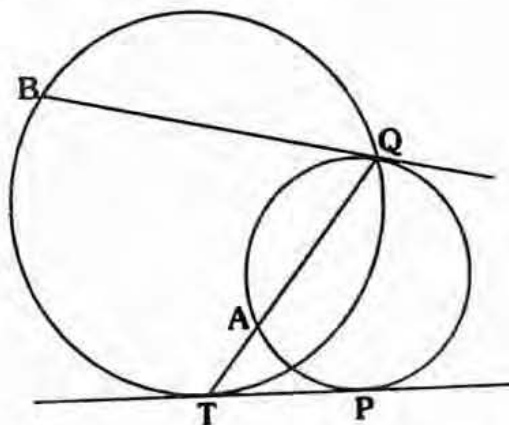
Si $m\widehat{DB} = 2(m\widehat{AL}) = 80^\circ$. Calcule "x".



- A) 50°
- B) 80°
- C) 40°
- D) 70°
- E) 25°

PROBLEMA N° 134

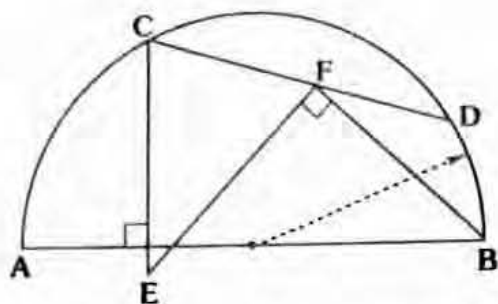
Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\widehat{AP} = 40^\circ$. Calcule $m\widehat{QB}$.



- A) 20°
- B) 40°
- C) 60°
- D) 70°
- E) 80°

PROBLEMA N° 135

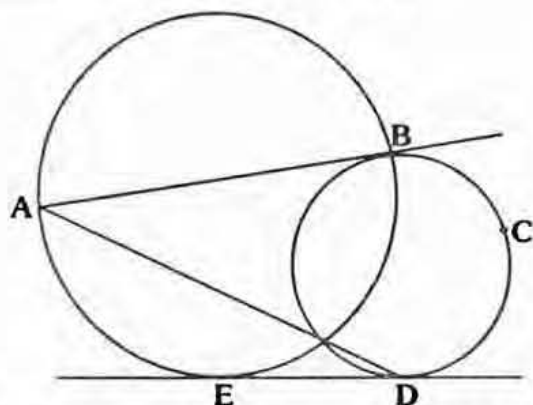
Si $CF = FD$ y $EF = FB$. Calcule $m\widehat{CD}$.



- A) 120° B) 150° C) 90°
D) 72° E) 135°

PROBLEMA N° 136

Si B, D y E son puntos de tangencia y $m\widehat{BCD} = 200^\circ$. Calcule $m\widehat{AE}$.

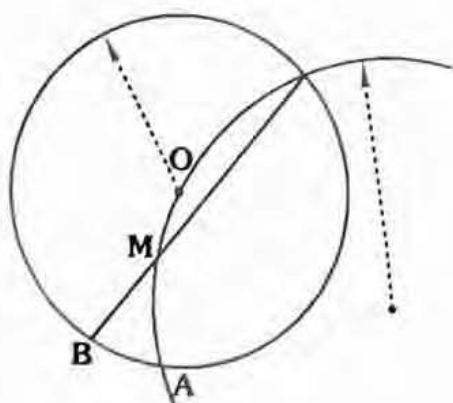


- A) 60° B) 50° C) 40°
D) 100° E) 80°

PROBLEMA N° 137

Del gráfico. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{MO}$.

- A) 135°
B) 60°
C) 90°
D) 150°
E) 72°



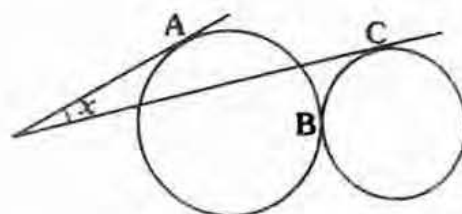
PROBLEMA N° 138

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las rectas tangentes perpendiculares $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia) y la secante PCD; $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$. Calcule $m\widehat{BD}$.

- A) 60° B) 53° C) 30°
D) 45° E) 36°

PROBLEMA N° 139

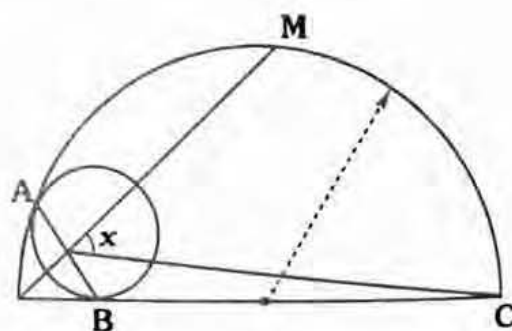
Si A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 200^\circ$. Calcule "x".



- A) 100° B) 90° C) 25°
D) 20° E) 35°

PROBLEMA N° 140

Si A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MC}$. Calcule "x".

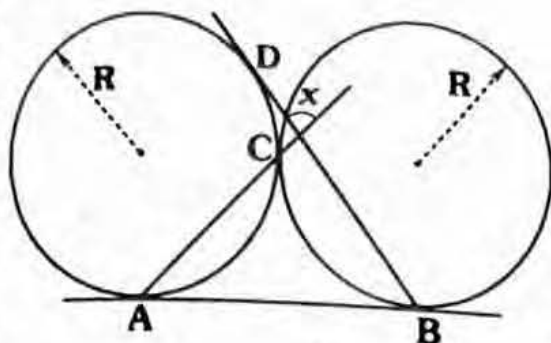


- A) 45° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 75°

PROBLEMA N° 141

Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

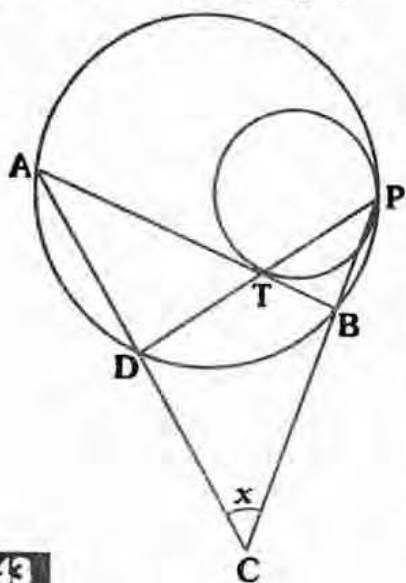
- A) 60°
- B) 75°
- C) 90°
- D) 98°
- E) 82°



PROBLEMA N° 142

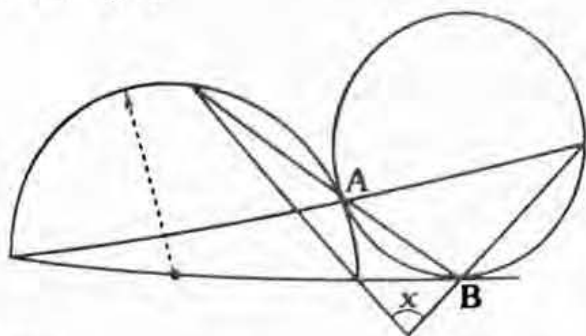
Si P y T son puntos de tangencia; $m\widehat{PB} = 40^\circ$ y $AD = DC$. Calcule "x".

- A) 40°
- B) 70°
- C) 55°
- D) 80°
- E) 35°



PROBLEMA N° 143

Si A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

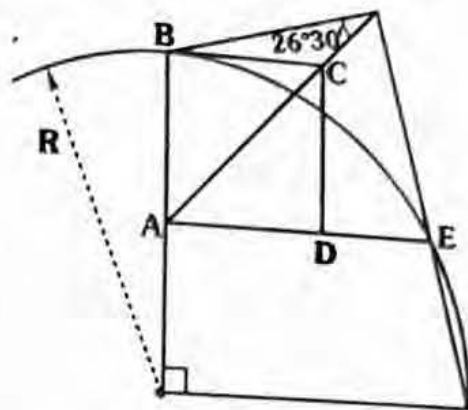


- A) 60°
- B) 120°
- C) 45°
- D) 90°
- E) 135°

PROBLEMA N° 144

ABCD es un cuadrado y $R=5$. Calcule DE.

- A) 3
- B) 2
- C) 1
- D) 2,5
- E) 1,5



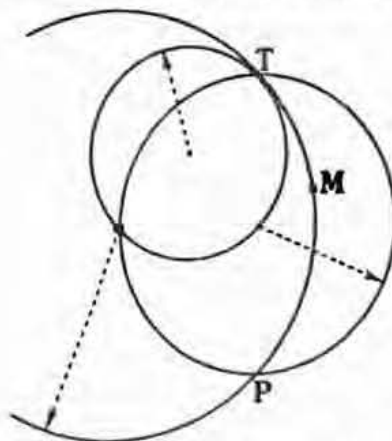
PROBLEMA N° 145

Se tienen las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de centros O_1 y O_2 , respectivamente secantes en P y Q una recta pasa por P y corta a las circunferencias en A y B. (A en $\mathcal{C}_1$ y B en $\mathcal{C}_2$), si $5(AB) = 8(O_1O_2)$. Calcule $m\widehat{APQ}$.

- A) 120°
- B) 135°
- C) 118°
- D) 106°
- E) 121°

PROBLEMA N° 146

T es punto de tangencia, calcule $m\widehat{TMP}$.

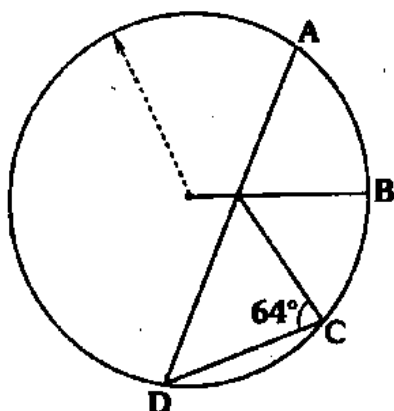


- A) 105°
- B) 90°
- C) 120°
- D) 180°
- E) 150°

PROBLEMA N° 147

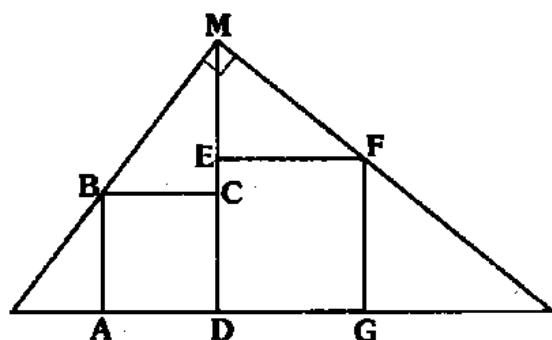
Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule $m\widehat{BCD}$.

- A) 96°
- B) 104°
- C) 124°
- D) 116°
- E) 126°



PROBLEMA N° 148

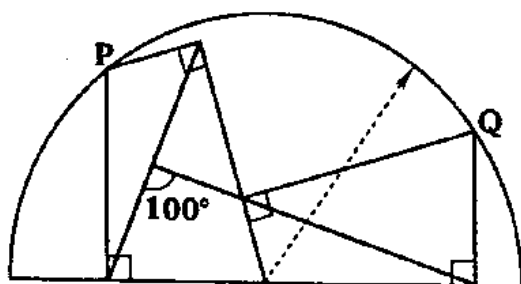
Si ABCD y DEFG son cuadrados. Calcule BM/MF .



- A) $\sqrt{2}$
- B) $\sqrt{3}$
- C) 1
- D) $1/2$
- E) 2

PROBLEMA N° 149

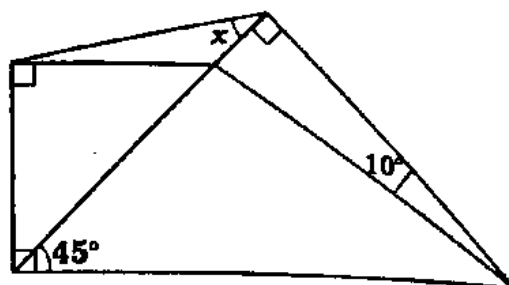
Calcule $m\widehat{PQ}$



- A) 125°
- B) 80°
- C) 140°
- D) 100°
- E) 50°

PROBLEMA N° 150

Calcule "x".

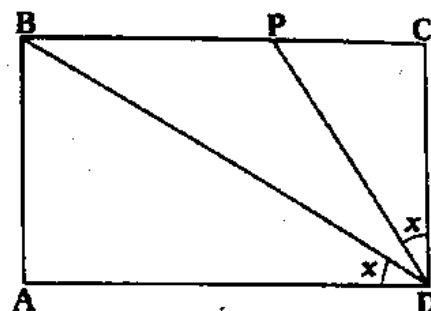


- A) 25°
- B) 30°
- C) 35°
- D) 40°
- E) 38°

PROBLEMA N° 151

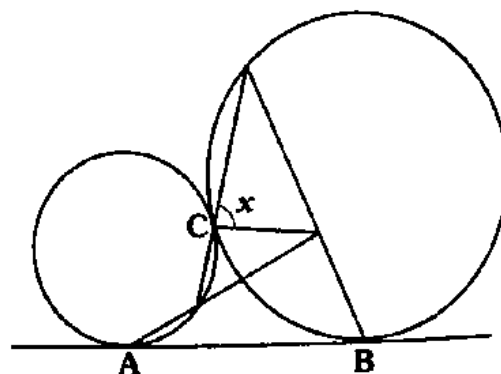
Si ABCD es un rectángulo; $AB=BP$. Calcule "x".

- A) $53^\circ/2$
- B) $37^\circ/2$
- C) $127^\circ/4$
- D) $143^\circ/2$
- E) $127^\circ/2$



PROBLEMA N° 152

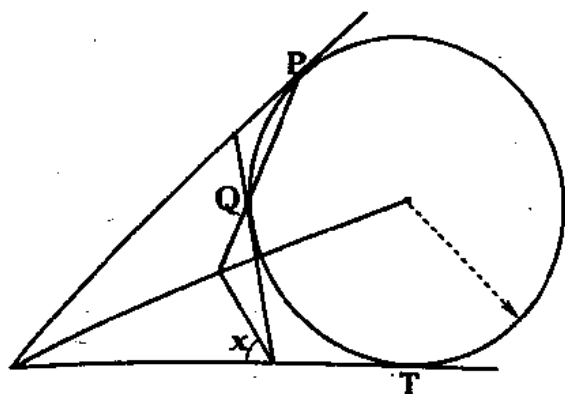
Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".



- A) 72°
- B) 60°
- C) 54°
- D) 90°
- E) 120°

PROBLEMA N° 153

Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\widehat{PQT} = 140^\circ$. Calcule "x".

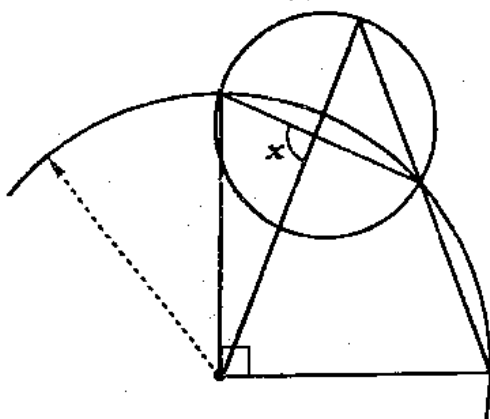


- A) 70° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 55°

PROBLEMA N° 154

Calcule "x", en:

- A) 60°
B) 75°
C) $67,5^\circ$
D) 135°
E) 90°



PROBLEMA N° 155

En la semicircunferencia S_1 , de diámetro $\overline{AB}$ se ubica P, se traza una circunferencia $\mathcal{C}_1$ tangente a $\overline{AB}$ en A y a la prolongación de $\overline{BP}$ en C.

Si $\overline{AP} \cap \mathcal{C}_1 = \{T\}$ y $\overline{CT} \cap \overline{AB} = \{H\}$.

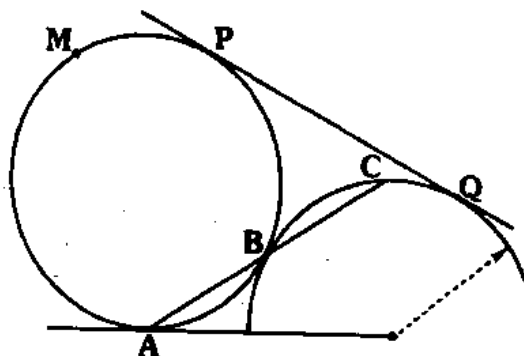
Si $m\widehat{CT} = x$ y $m\angle AHC = z$. Calcule x/z .

- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 2
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA N° 156

A, B, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AMP} = 220^\circ$.

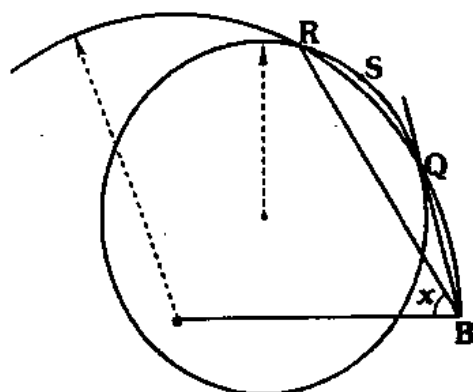
Calcule $m\widehat{CQ}$.



- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 20° E) 40°

PROBLEMA N° 157

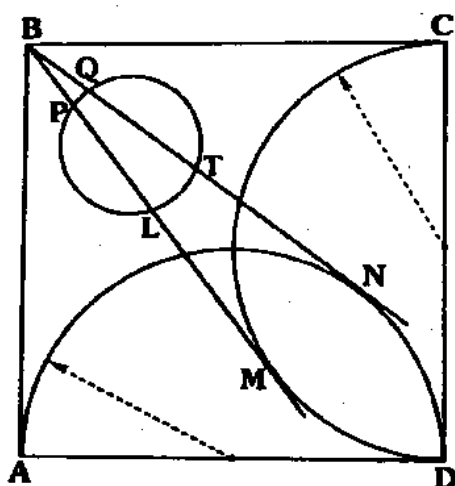
En el gráfico Q es un punto de tangencia $m\widehat{RSQ} = 50^\circ$, calcule "x".



- A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA N° 158

ABCD es un cuadrado, M y N son puntos de tangencia y $m\widehat{LT}$ toma su menor valor entero par. Calcule $m\widehat{PQ}$.



- A) 1° B) 2° C) 3°
D) 6° E) 7°

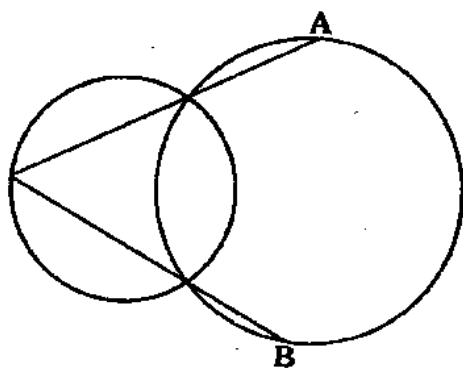
PROBLEMA N° 159

Se tienen dos circunferencias ortogonales y congruentes de radio R se intersectan en A y B . Si la línea de centros intersecta a dichas circunferencias en M y N , calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo MAN .

- A) $R/3$ B) $R/2$ C) $R/4$
D) $R/5$ E) $R/6$

PROBLEMA N° 160

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales, calcule $m\widehat{AB}$.

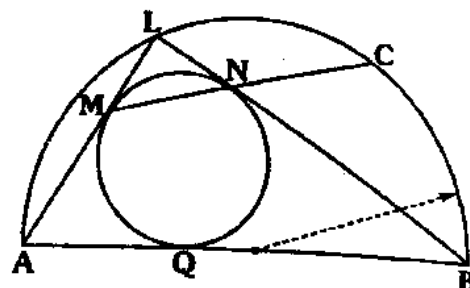


- A) 90° B) 135° C) 120°
D) 180° E) 225°

PROBLEMA N° 161

En el gráfico, M , N y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{LC} = 50^\circ$. Calcule $\widehat{ALC}$.

- A) 140°
B) 130°
C) 120°
D) 110°
E) 100°



PROBLEMA N° 162

Se tiene el cuadrilátero convexo $ABCD$, con $AB = BC$, $m\angle ACD = 2\alpha$, $m\angle ACB = 60^\circ - 4\alpha$ y $m\angle DAC = 30^\circ + 2\alpha$.

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

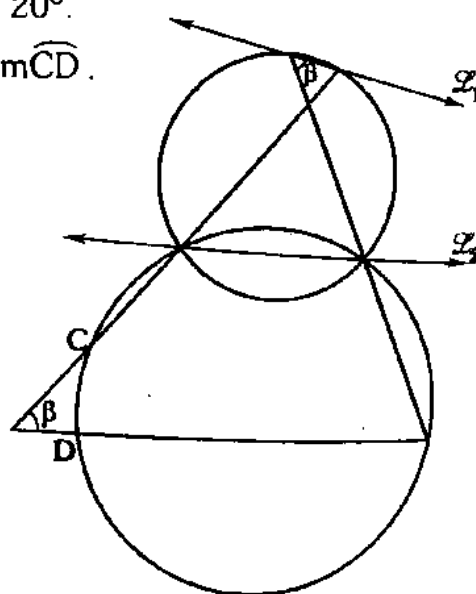
- A) 30° B) $80^\circ + \alpha$ C) $60 - \alpha$
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 163

La medida del menor ángulo entre $\overline{Z_1}$ y $\overline{Z_2}$ mide 20° .

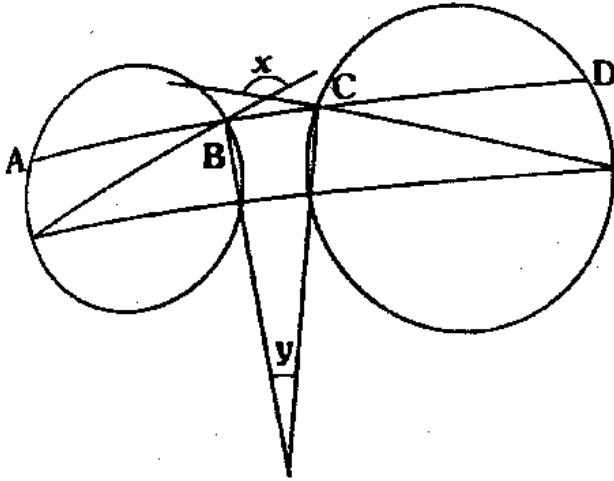
Calcule $m\widehat{CD}$.

- A) 10°
B) 30°
C) 20°
D) 40°
E) 50°



PROBLEMA N° 164

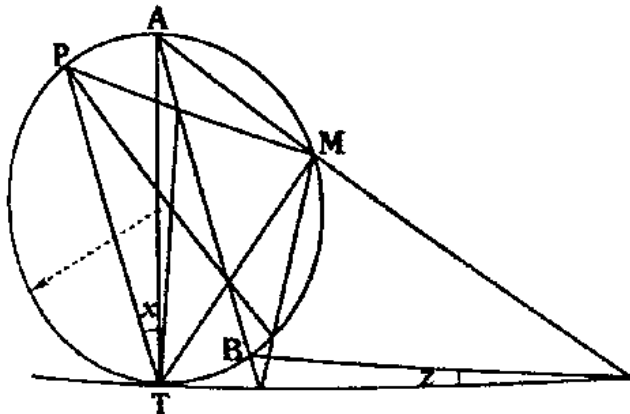
En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 80^\circ$.
Calcule $x - y$



- A) 40° B) 50°
C) 60° D) 80°
E) 70°

PROBLEMA N° 165

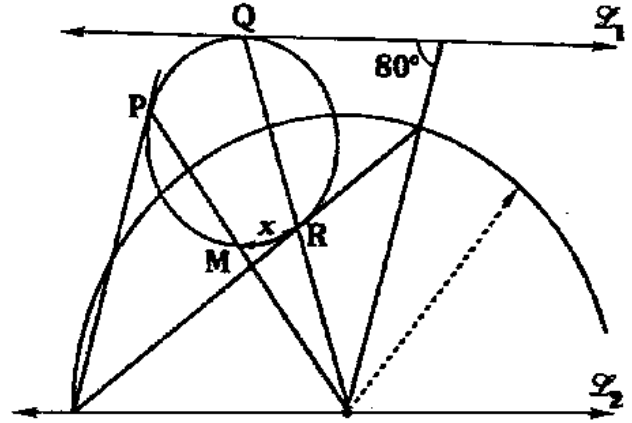
En el gráfico, T es punto de tangencia,
 $m\widehat{AP} = 6z$ y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Calcule " x ".



- A) $3z$ B) $4z$ C) $5z$
D) $6z$ E) $2z$

PROBLEMA N° 166

En el gráfico, $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$, P, Q y R son puntos de tangencia.
Calcule " x ".



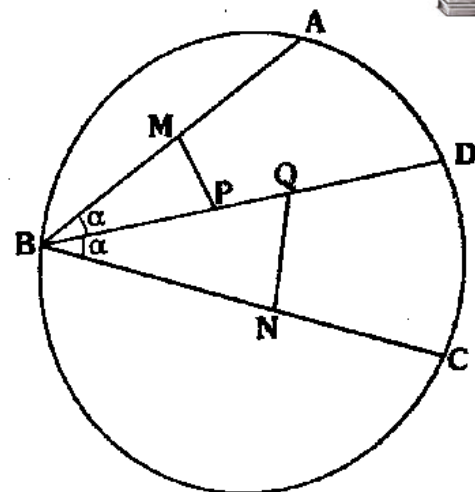
- A) 20° B) 70° C) 40°
D) 50° E) 35°

PROBLEMA N° 167

En el gráfico, $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule $\frac{BP}{QD}$.

MATERIAL
BIBLIOGRÁFICO
UNIVERSAL

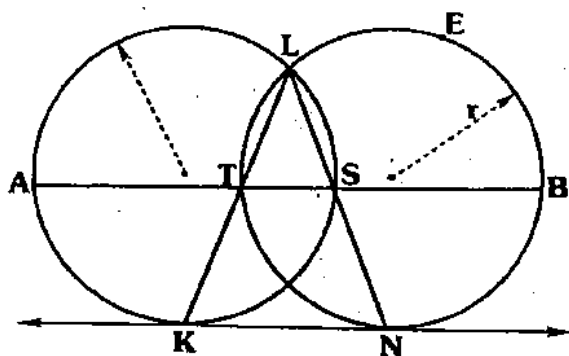


- A) $3/5$ B) $4/5$ C) $1/2$
D) 2 E) 1

PROBLEMA N° 168

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales, $m\widehat{AK} = m\widehat{EB}$ y $r = 16$.

Calcule EN.



- A) 16 B) $16\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{5}$ E) 32

PROBLEMA N° 169

Se tiene el cuadrado ABCD de centro G. P y F están en las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, tal que $FG = GP$ y $m\angle DCP = 26^\circ 30'$. Calcule $m\angle FGM$.

$$(\overline{PC} \cap \overline{BF}) = \{M\}$$

- A) $18^\circ 30'$ B) 15° C) 16°
D) $22^\circ 30'$ E) 8°

PROBLEMA N° 170

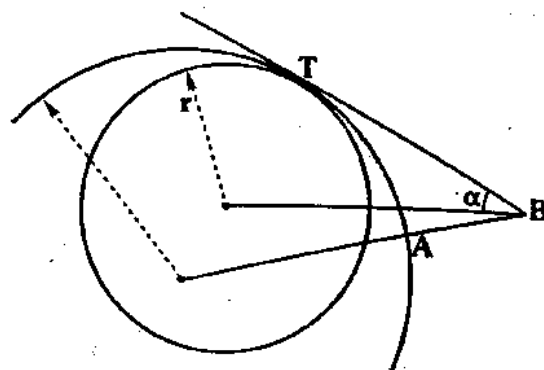
En la circunferencia de centro O se traza la cuerda AB en la cual se ubica M tal que $m\angle OMA = 45^\circ$; la prolongación de $\overline{MO}$ corta a la circunferencia en P.

Si $AB = (MP)\sqrt{2}$, calcule $m\widehat{AP}$.

- A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 171

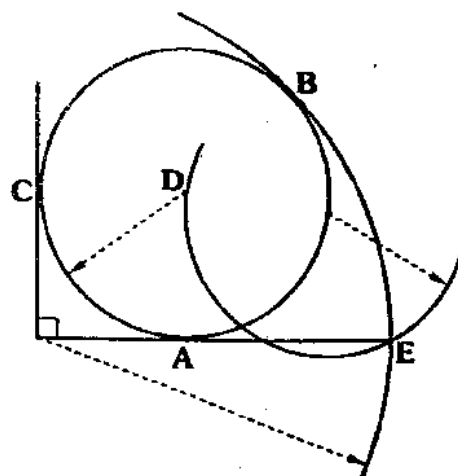
T es punto de tangencia y $m\widehat{AT} = 2\alpha$. Calcule AB.



- A) $\frac{r}{2}$ B) r C) 2r
D) $\frac{r}{3}$ E) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA N° 172

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ED}$.



- A) 90° B) 60°
C) 120° D) 135°
E) 106°

PROBLEMA N° 173

Se tiene el cuadrante AOB ($AO=OB$), se ubica E y P en el arco AB tal que E está en $\widehat{AP}$. Si $\overline{EP} \parallel \overline{AB}$ y $m\angle OPA = 65^\circ$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y $\overline{EB}$.

- A) 110° B) 150° C) 143°
D) 140° E) 120°

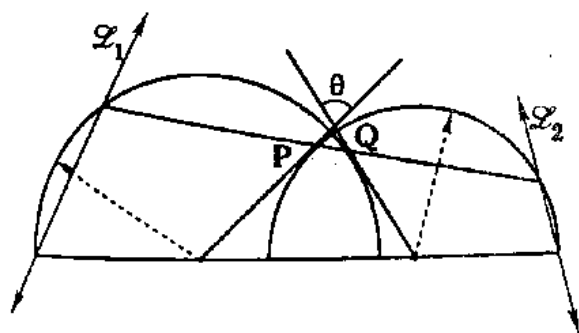
PROBLEMA N° 174

Se tiene el rectángulo ABCD, con diámetro AD se traza la semicircunferencia que corta a $\overline{BC}$ en P y Q ($P \in BQ$). Si $m\widehat{PQ} = 120^\circ$, calcule $m\angle PDB$.

- A) 1° B) 2° C) 3°
D) $7,5^\circ$ E) 7°

PROBLEMA N° 175

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Halle la medida del ángulo entre $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$.



- A) θ B) 2θ C) $45^\circ - \theta$
D) $\frac{\theta}{2}$ E) $45^\circ + \theta$

PROBLEMA N° 176

Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia, en $\widehat{AB}$ se ubica P y Q y en $\widehat{AB}$ están R y S tal que PQRS

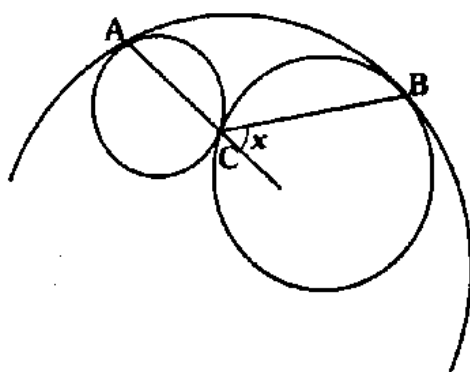
es un cuadrado.

Calcule $m\widehat{PQ}$.

- A) 15° B) 30° C) 32°
D) 16° E) 28°

PROBLEMA N° 177

A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} = 40^\circ$. Calcule "x".



- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA N° 178

En el cuadrilátero convexo ABCD, con $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si $m\angle BAC = 7^\circ$; $m\angle CBD = 37^\circ$ y $m\angle DAC = 23^\circ$. Calcula $m\angle BDC$.

- A) 21° B) 42° C) 63°
D) 69° E) 76°

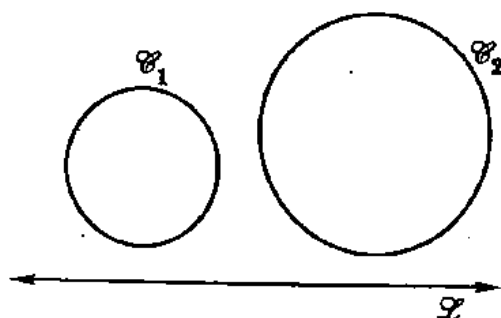
PROBLEMA N° 179

Se tienen tres circunferencias coplanares secantes dos a dos. Indique el número de circunferencias tangentes comunes a las tres circunferencias se pueden trazar.

- A) 1 B) 8 C) 2
D) 3 E) 5

PROBLEMA N° 180

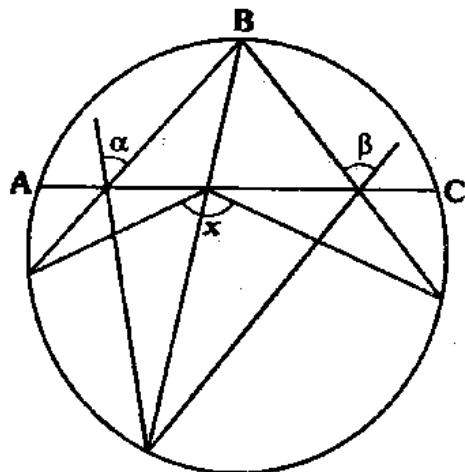
En el gráfico, ¿cuántas circunferencias se pueden trazar, tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{L}$?



- A) 5 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA N° 181

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule "x" en función de "α" y "β".

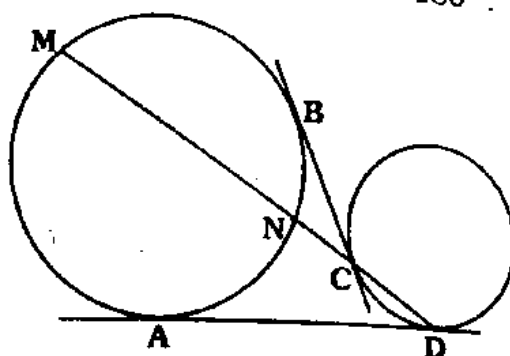


- A) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ B) $\alpha + \beta$
C) $2(\alpha + \beta)$ D) $90^\circ + (\alpha + \beta)$
E) $180^\circ - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$

PROBLEMA N° 182

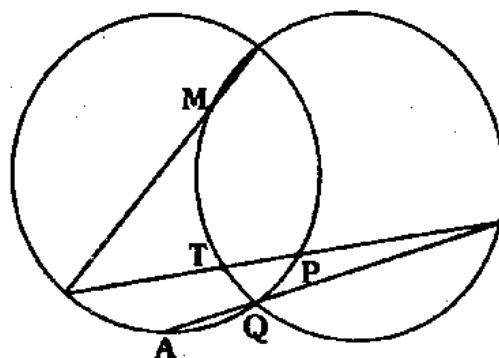
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demuestre que $m\widehat{MB} + m\widehat{AN} = 180^\circ$.



PROBLEMA N° 183

En el gráfico, $m\widehat{TM} = \alpha$, calcule $m\widehat{AQP}$.



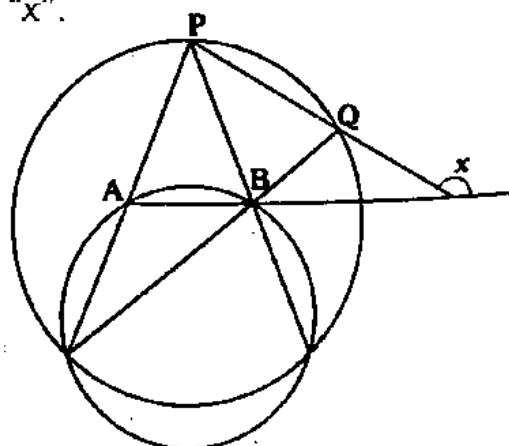
- A) α B) 2α C) $\frac{\alpha}{2}$
D) $90^\circ - \alpha$ E) $180^\circ - \alpha$

PROBLEMA N° 184

En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{PQ} = 80^\circ$.

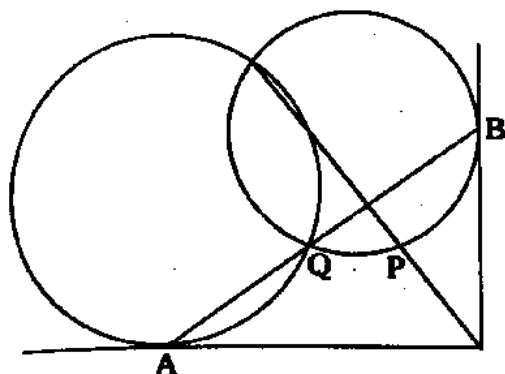
Calcule "x".

- A) 120°
B) 140°
C) 160°
D) 100°
E) 135°



PROBLEMA N° 185

A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AQ} = 50^\circ$. Calcule $m\widehat{PB}$.



- A) 40° B) 20° C) 25°
D) 50° E) 65°

PROBLEMA N° 186

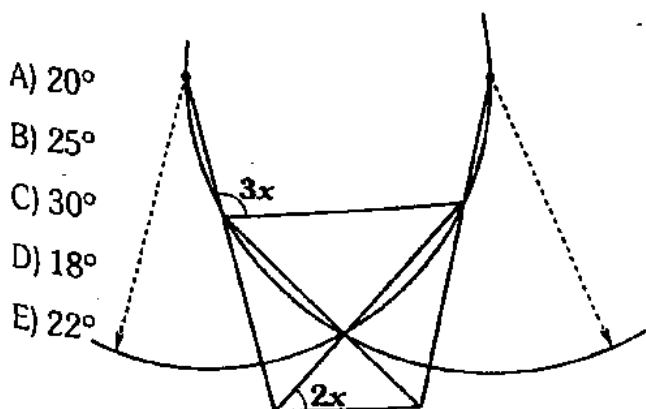
En la semicircunferencia de diámetro AB, se ubican los puntos P y Q, tal que $m\widehat{AP} = 90^\circ$ y $\overline{AQ}$ interseca a $\overline{PB}$ en M; luego en $\overline{AB}$ se ubica L, tal que $m\angle AQL = 45^\circ$ y $AM = 2(LB)$.

Calcule $m\angle PLQ$.

- A) 45° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA N° 187

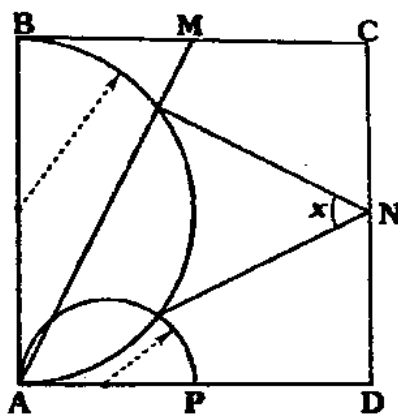
Del gráfico, calcule "x".



- A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 18°
E) 22°

PROBLEMA N° 188

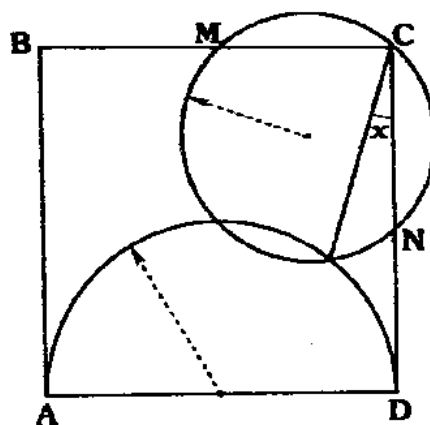
M, N y P son puntos medios y ABCD es un cuadrado. Calcule "x".



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 189

ABCD es un cuadrado y $BM = MC = CN$. Calcule "x".

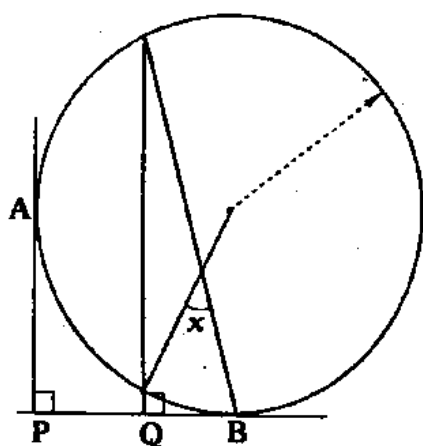


- A) 15° B) $18,5^\circ$ C) $22,5^\circ$
D) $26,5^\circ$ E) 30°

PROBLEMA N° 190

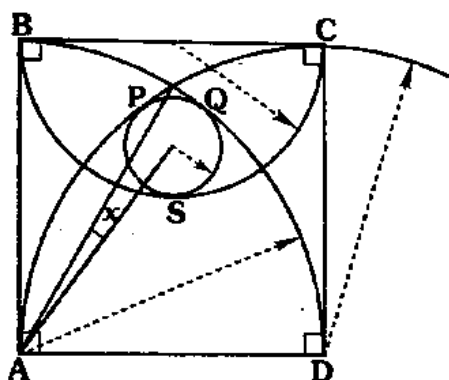
A y B son puntos de tangencia, si $PQ = QB$. Calcule "x".

- A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 37°
E) 53°



PROBLEMA N° 191

ABCD es cuadrado, calcule x . Si BQ y S son puntos de tangencia.

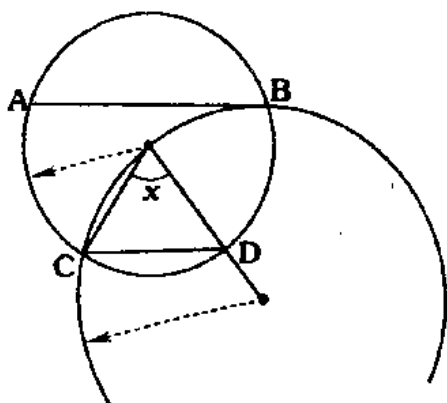


- A) 15° B) 8° C) $7,5^\circ$
D) 4° E) 10°

PROBLEMA N° 192

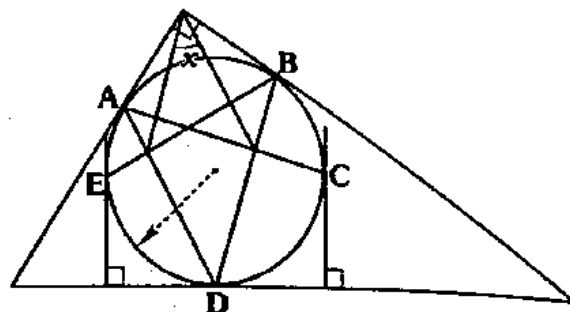
Si B es punto de tangencia y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Calcule " x ".

- A) 60°
B) 45°
C) 90°
D) 72°
E) 36°



PROBLEMA N° 193

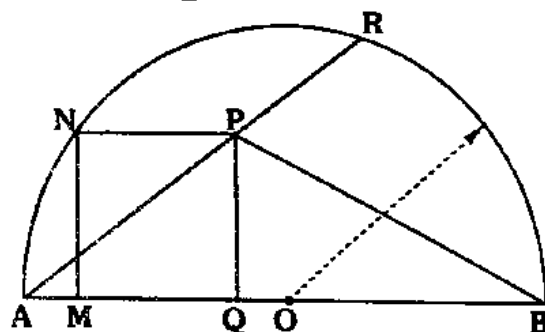
Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule " x ".



- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 53°

PROBLEMA N° 194

Calcule $m\widehat{NR}$. Si MNPQ es un cuadrado y $m\angle PBQ = \frac{53^\circ}{2}$.



- A) 60° B) 63° C) 69°
D) 37° E) 53°

PROBLEMA N° 195

Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores donde "P" es el punto de tangencia común. Luego se trazan las tangentes exteriores comunes determinando los puntos de tangencia A y B en una de ellas y en la otra los puntos C y D. Calcule $m\angle APB + m\angle DPC$

- A) 160° B) 170° C) 180°
D) 150° E) 140°

PROBLEMA N° 196

En un rectángulo ABCD "O" punto medio de $\overline{AC}$, en $\overline{BC}$ se ubica el punto P, luego se traza $\overline{PH} \perp \overline{BO}$ ($H \in \overline{BO}$).

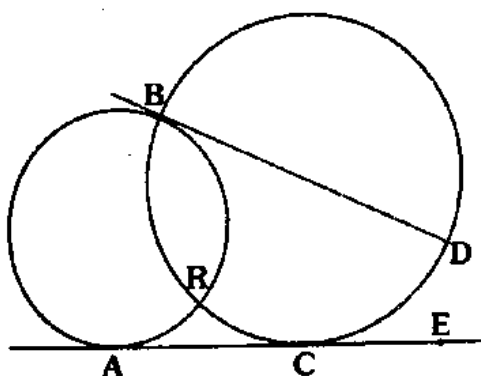
Si $\overline{AC} \cap \overline{PD} = \{T\}$, $m\angle PTC = 90^\circ$ y $HP = 3PT$. Calcule $m\angle HPT$.

- A) 53° B) 37° C) 45°
D) 30° E) 60°

PROBLEMA N° 197

Según el gráfico $m\frac{\widehat{ARB}}{5} = m\frac{\widehat{BRC}}{4} = m\frac{\widehat{CED}}{2}$.

Calcule $m\widehat{CED}$ siendo A, B y C puntos de tangencia.



- A) 53° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 198

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

Luego se traza $\overline{BH} \perp \overline{AP}$ ($H \in \overline{AP}$) que intersecta a la circunferencia en el punto T, calcule $m\widehat{AT}$ si $AH = HP$.

- A) 53° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 75°

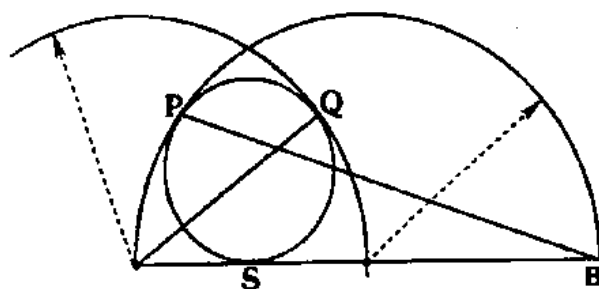
PROBLEMA N° 199

En una circunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ se ubica un punto C ($C \in \widehat{AB}$) y se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ ($H \in \overline{AB}$) tal que: $m\widehat{BC} = 80^\circ$. En el arco AC se ubica el punto P, calcule el menor valor entero de la $m\angle HCP$.

- A) 51° B) 61° C) 49°
D) 79° E) 81°

PROBLEMA N° 200

En el gráfico, P, Q y S son puntos de tangencia.



- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) $67,5^\circ$





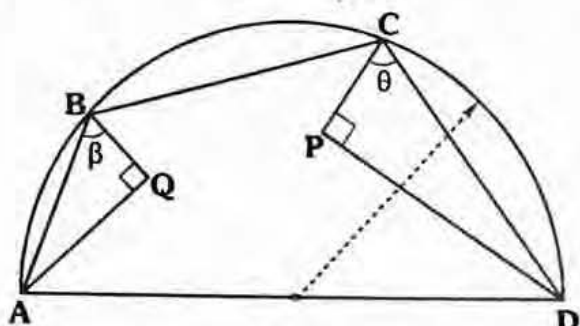
Problemas Propuestos

Ciclo

Semestral
Intensivo

PROBLEMA N° 201

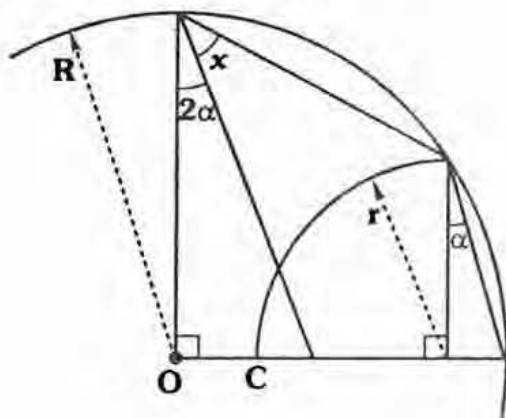
En el gráfico, $m\widehat{AC} = 2\beta$, $m\widehat{BD} = 2\theta$ y $AQ + PD = BC$. Calcule $m\widehat{BC}$.



- A) 90° B) 120° C) 127°
D) 106° E) 135°

PROBLEMA N° 202

Si $4R = 3(OC) + 7r$, calcule "x".



- A) 30° B) 37° C) 23°
D) 45° E) 53°

PROBLEMA N° 203

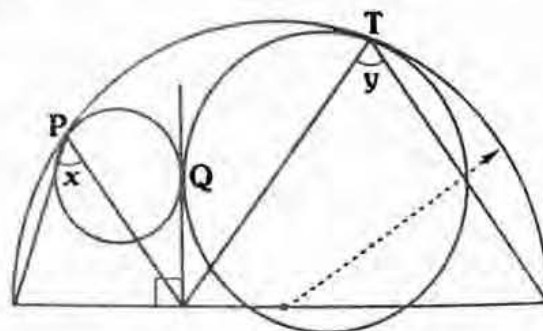
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos circunferencias son secantes y la suma de las medidas de los arcos a uno y otro lado de cuerda común es 180° , entonces dichas circunferencias son ortogonales.
- II. Las diagonales en un cuadrilátero bicentrico son perpendiculares.
- III. En un polígono inscrito de "n" lados, (n es par, $n \geq 4$) la suma de medidas de los ángulos internos alternadamente es $180^\circ(n-3)$.
- IV. Todo trapecioide simétrico convexo es un cuadrilátero inscriptible.

- A) VFVF B) FFFF
C) VVVF D) FVFF
E) FVVF

PROBLEMA N° 204

En el gráfico, $m\widehat{PT} = \alpha$, calcule $x + y$, si P, Q y T son puntos de tangencia.

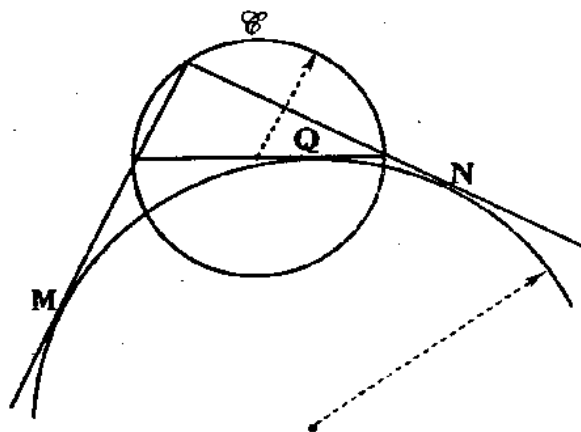


- A) $180^\circ - \alpha$ B) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$
C) $45^\circ + 2\alpha$ D) $180^\circ - 2\alpha$
E) 2α

Se tiene el cuadrilátero inscriptible ABCD las diagonales se cortan en Q. Si $m\angle CAD = 15^\circ$, $BC = CD$ y $AD = AB + BQ$. Calcule $m\angle ACD$.

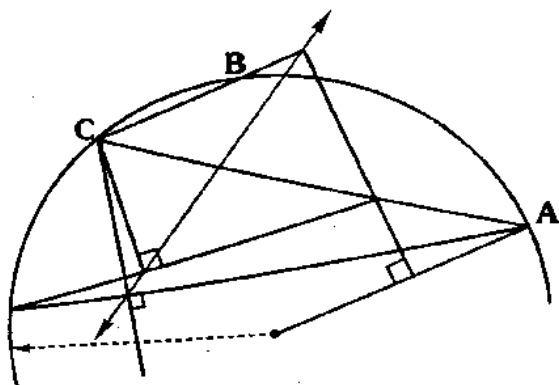
- A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 112°

En el gráfico, M, Q y N son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{C}$ y $\overline{MN}$.



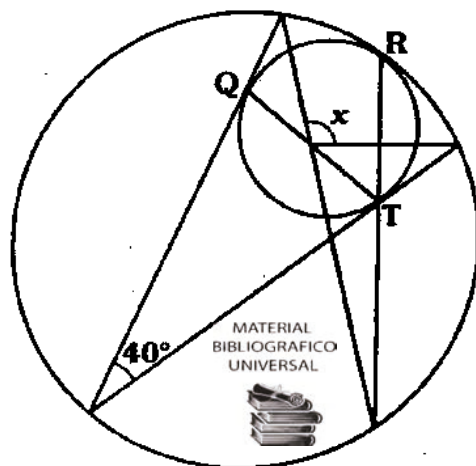
- A) 60° B) 45° C) 30°
D) 90° E) 0°

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 80^\circ$, calcule $m\widehat{BC}$.



- ❖ A) 10° B) 20° C) 50°
❖ D) 40° E) 30°

- ❖ En el gráfico T, Q y R son puntos de tangencia. Calcule "x".



- ❖ A) 90° B) 100° C) 110°
❖ D) 120° E) 130°

- ❖ Se tiene el triángulo ABC, en el cual se
- ❖ traza la circunferencia inscrita, la cual es
- ❖ tangente a $\overline{AB}$ en P, a $\overline{BC}$ en Q y T en
- ❖ $\overline{AC}$, se ubica H en $\widehat{PQ}$ tal que $\overline{HT} \perp \overline{AC}$,
- ❖ las rectas TP y QH se cortan en S.

- ❖ Si $m_{\angle HTP} = 20^\circ$, calcule $m_{\angle ABS}$.
- ❖ A) 10° B) 20° C) 30°
- ❖ D) 35° E) 40°

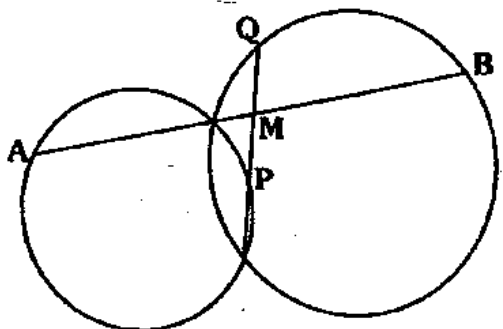
- ❖ En el triángulo rectángulo donde un ángulo agudo mide 37° . Calcule la medida del menor arco determinado por la mediatriz de la hipotenusa en la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

A) 45° B) 135° C) 60°

D) 120° E) 106°

PROBLEMA N° 211

En el gráfico, $AM=MB$. Demuestre que $PM=MQ$.



PROBLEMA N° 212

Se tiene el triángulo ABC , en el cual se traza la ceviana interior BL , en cuya prolongación se ubica H , tal que: $m\angle ABH = 120^\circ$, $m\angle HBC = 15^\circ$, $m\angle BHC = 90^\circ$ y $AB = 2(BH)$. Calcule $m\angle BAC$.

A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 213

Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de centros O_1 , O_2 y O_3 , radios r_1 , r_2 y r_3 . O es centro de la circunferencia mayor y tangente a las tres circunferencias anteriores. Calcular el valor entero, el radio de la circunferencia de centro O (O es interior al triángulo $O_1O_2O_3$), si $r_1 + r_2 + r_3 = 6$.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 214

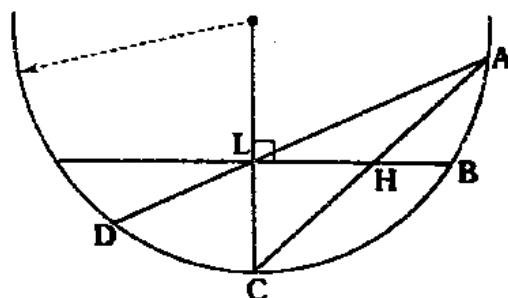
En la semicircunferencia de diámetro ED , se ubican en forma consecutiva A , B , C y D talque A está más cerca a E .
 $\overline{AD} \cap \overline{EC} = \{P\}$, $\overline{AC} \cap \overline{EB} = \{S\}$ y $\overline{PS} \cap \overline{CB} = \{M\}$.
 Si $m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$ y $m\widehat{ABD} = 8(m\angle AMP)$.
 Calcule $m\angle AMP$.

A) 5° B) 6° C) 8°

D) 10° E) 18°

PROBLEMA N° 215

En el gráfico, $LD = 10$. Calcule el menor valor entero de HC .

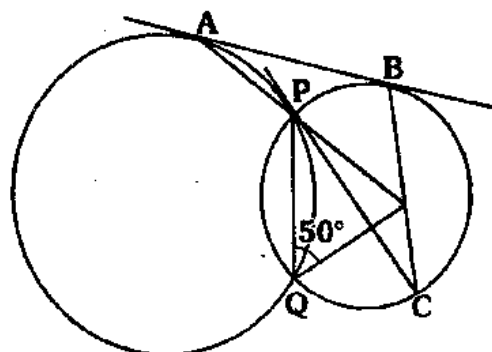


A) 9 B) 10 C) 11

D) 13 E) 15

PROBLEMA N° 216

A , B y P son puntos de tangencia.
 Calcule $m\widehat{PQC}$.



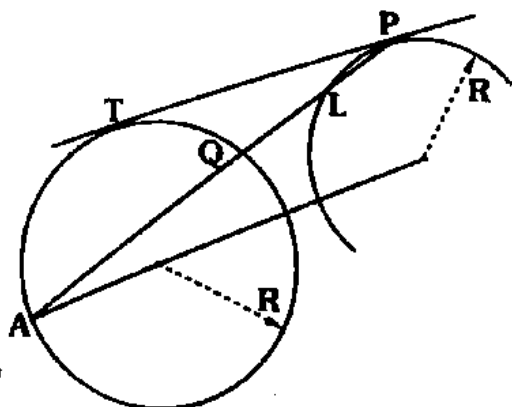
A) 100° B) 180° C) 160°

D) 140° E) 190°

PROBLEMA N° 217

T y P son puntos de tangencia. Si $AQ = PQ$, calcule $m\angle ALT$.

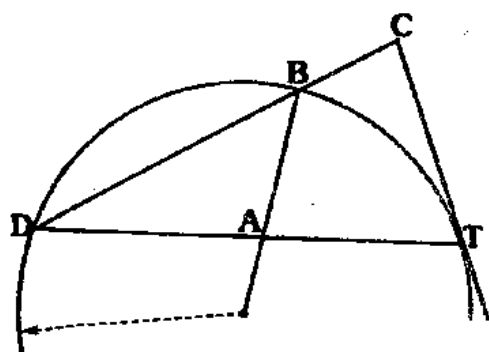
- A) 30°
B) 15°
C) 18°
D) $18^\circ 30'$
E) $27^\circ 30'$



PROBLEMA N° 218

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $m\widehat{BT} = 60^\circ$ y $6(BC) = 5(AB)$. Calcule $m\widehat{DB}$.

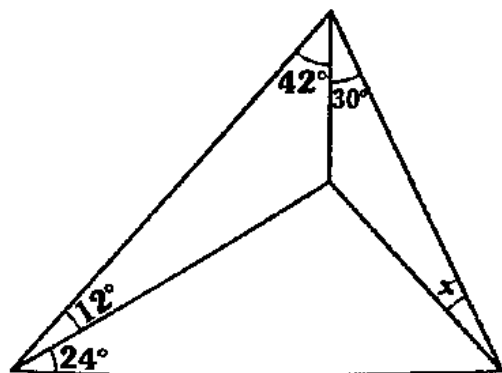
- A) 74° B) 53° C) 76°
D) 84° E) 82°



PROBLEMA N° 219

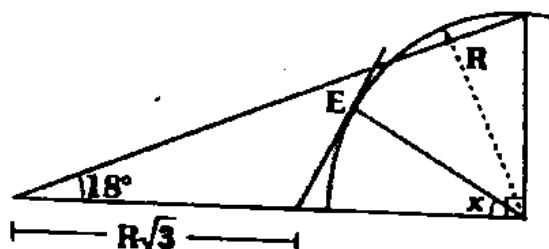
Calcule "x" en:

- A) 12
B) 10°
C) 15°
D) 18°
E) 30°



PROBLEMA N° 220

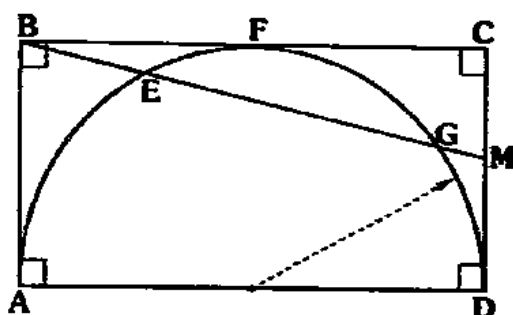
En el gráfico, E es punto de tangencia. Calcule "x".



- A) 36° B) 18° C) 36°
D) 42° E) 30°

PROBLEMA N° 221

F es punto de tangencia y $m\widehat{EF} = m\widehat{GD}$. Calcule $m\widehat{EF}$.



- A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 15°

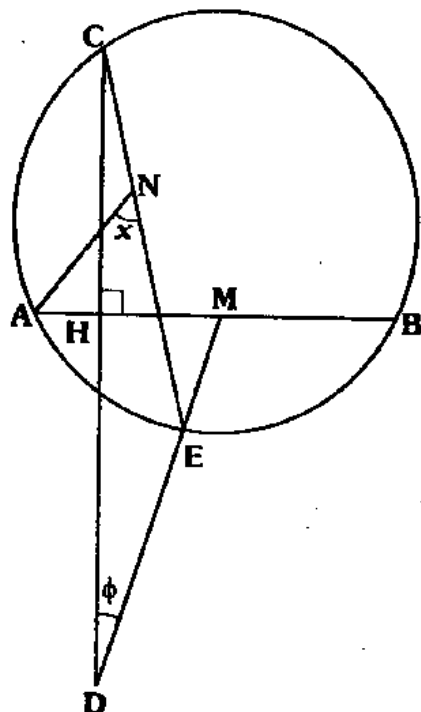
PROBLEMA N° 222

En el problema anterior, calcule BE/GM .

- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3} + 2$
D) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

PROBLEMA N° 223

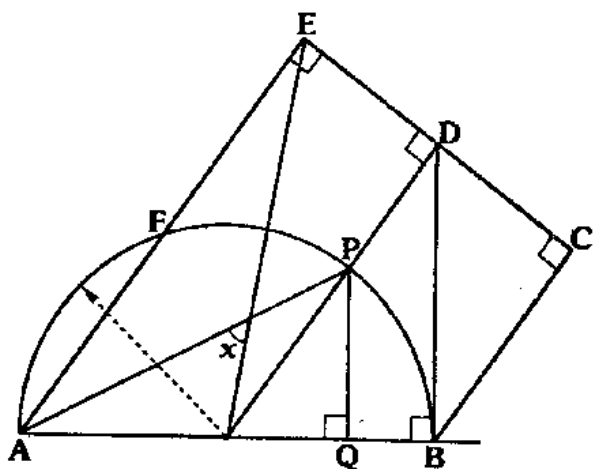
Si $AM=MB$, $CN=NE$ y $CH=HD$.
Calcule "x", en función de ϕ



- A) ϕ B) 2ϕ C) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$
D) $90^\circ - \phi$ E) $90^\circ - 2\phi$

PROBLEMA N° 224

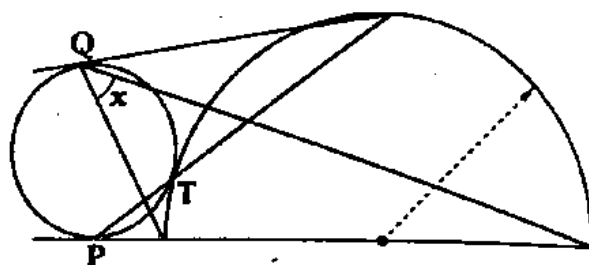
En el gráfico, $PQ=EF$.
Calcule "x".



- A) 37° B) 53° C) 45°
D) 49° E) 75°

PROBLEMA N° 225

P, Q y T son puntos de tangencia.
Calcule "x".



- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA N° 226

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una
circunferencia, M y N son puntos medios
de los arcos AB y BC respectivamente.
Si $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ trisecan a $\overline{MN}$. Calcule
 $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 79° E) 90°

PROBLEMA N° 227

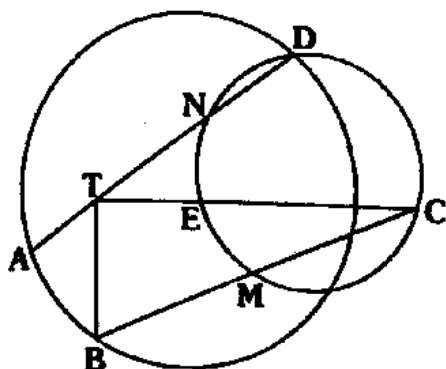
Se tiene el triángulo ABC donde se ha tra-
zado la circunferencia inscrita, la cual es
tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en F, D y E
respectivamente. Se ubica H en las pro-
longaciones de $\overline{DF}$ y $\overline{DE}$ respectivamen-
te, tal que DHAI es un paralelogramo,
 $\overline{AB} \cap \overline{HI} = \{M\}$ y $\overline{AC} \cap \overline{HI} = \{N\}$.

Calcule $\frac{MN}{BC}$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N° 228

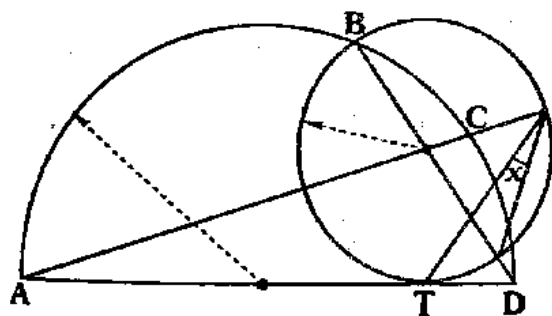
En el gráfico, $m\widehat{DNM} = 2(m\angle BTA)$ y $m\widehat{AB} = 24^\circ$.
Calcule $m\widehat{ME}$.



- A) 12° B) 24° C) 36°
D) 48° E) 54°

PROBLEMA N° 229

Si $m\widehat{BC} = 36^\circ$ y T es punto de tangencia.
Calcule "x".



- A) 16° B) 18° C) 20°
D) 22° E) 24°

PROBLEMA N° 230

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, P está en $\widehat{BC}$ tal que la recta de Simson de P respecto del triángulo corta a la prolongación de $\overline{AB}$ en S.

Si $m\angle ASL = \theta$.

- A) θ B) 2θ C) 3θ
D) $90^\circ - \theta$ E) $180^\circ - 2\theta$

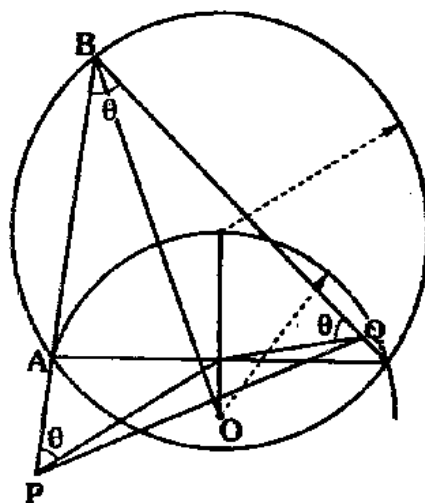
PROBLEMA N° 231

Se tiene el cuadrilátero ABCD, H está en $\overline{BD}$ y L en la prolongación de $\overline{AB}$ tal que BLCH es un cuadrado. La recta LH corta a $\overline{AC}$ en su punto medio M.
Calcule $m\angle CMD$.

- A) 60° B) 45° C) 90°
D) 120° E) 135°

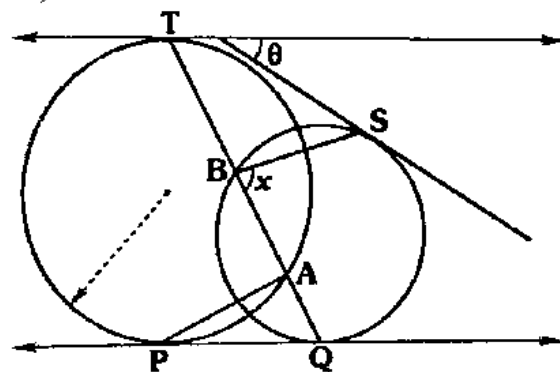
PROBLEMA N° 232

Demostrar que $\overline{PQ} \perp \overline{OB}$.



PROBLEMA N° 233

P, Q, S y T son puntos de tangencia. Si $\overline{PA} \parallel \overline{BS}$, calcule x en función de:



- A) θ B) 2θ C) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$
D) $90^\circ - \frac{\theta}{4}$ E) $45^\circ - \theta$

PROBLEMA N° 234

Se tiene el pentágono convexo ABCDE talque $AE=ED$, $BC=AB+CD$ y $m\angle BAE + m\angle CDE = 180^\circ$.

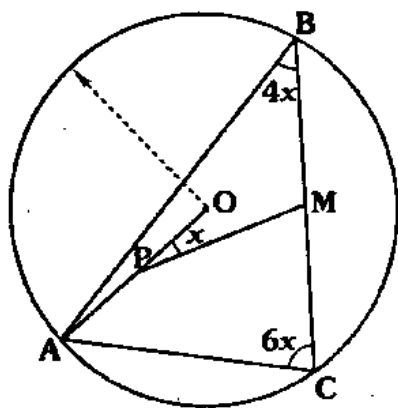
Calcule: $\frac{m\angle AED}{m\angle BEC}$.

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) 3 E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA N° 235

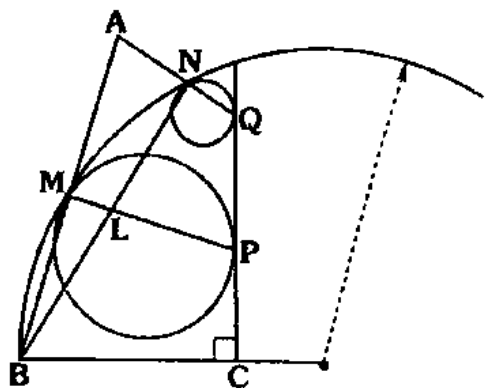
En el gráfico, $AP=PO$ y $BM=MC$. Calcule "x".

- A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 6°
E) 8°



PROBLEMA N° 236

M, N, P y Q son puntos de tangencia y $m\angle BM = 20^\circ$. Calcule $m\angle LAM$.



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA N° 237

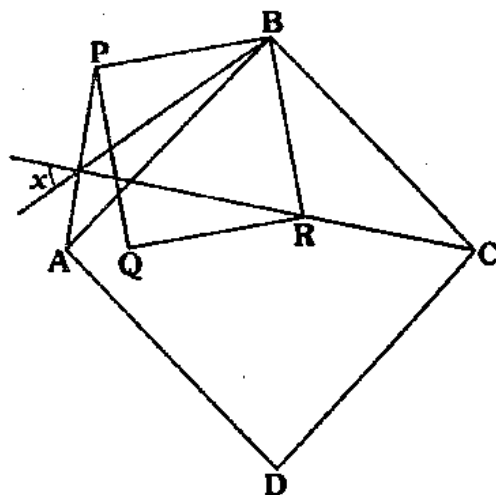
Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y en ella se ubica Q, luego con diámetro QB se traza una circunferencia secante AB en L; O es centro de la circunferencia y la recta tangente a la semicircunferencia trazada por Q y es paralela a OL.

Calcule la medida del ángulo entre la circunferencia y la semicircunferencia.

- A) 20° B) 18°
C) 37° D) 60°
E) 30°

PROBLEMA N° 238

ABCD y PBRQ son cuadrados. Calcule "x".



- A) 30° B) 15° C) 45°
D) 75° E) 36°

PROBLEMA N° 239

ABCD es un cuadrado, T y P son puntos de tangencia, $AM \parallel LN$ y $BM=NC$. Calcule "x".

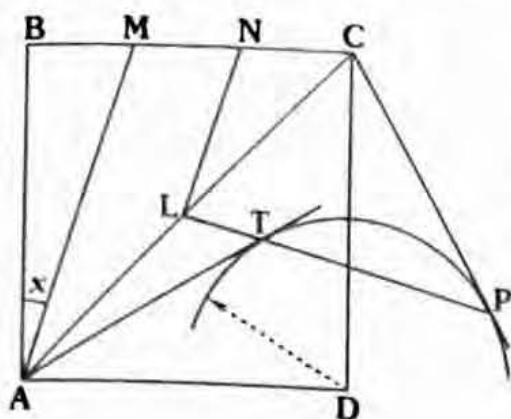
A) 30°

B) 8°

C) 37°

D) $37^\circ/2$

E) $53^\circ/2$



PROBLEMA N° 240

P, Q y T son puntos de tangencia.
Calcule "x".

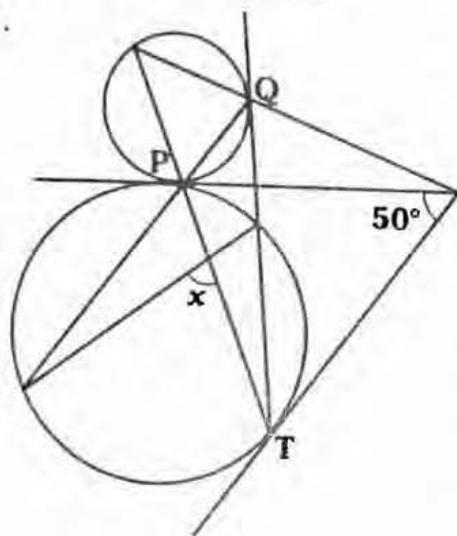
A) 90°

B) 40°

C) 80°

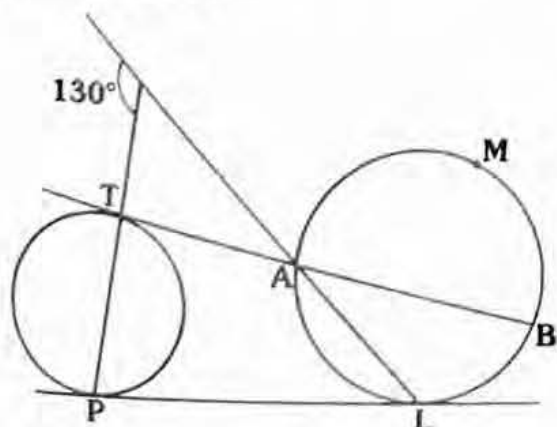
D) 50°

E) 100°



PROBLEMA N° 241

T, P y L son puntos de tangencia.
Calcule $m\widehat{AMB}$.



A) 180°

B) 182°

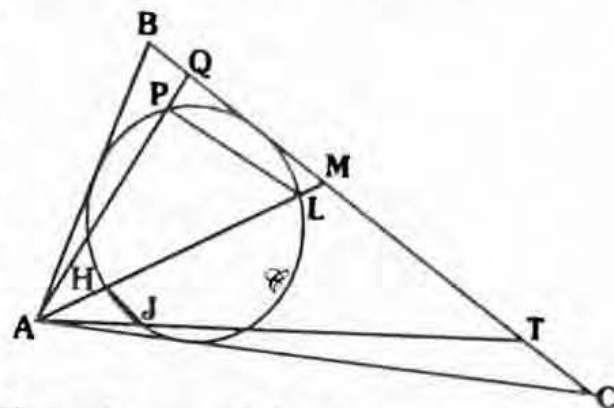
C) 260°

D) 230°

E) 200°

PROBLEMA N° 242

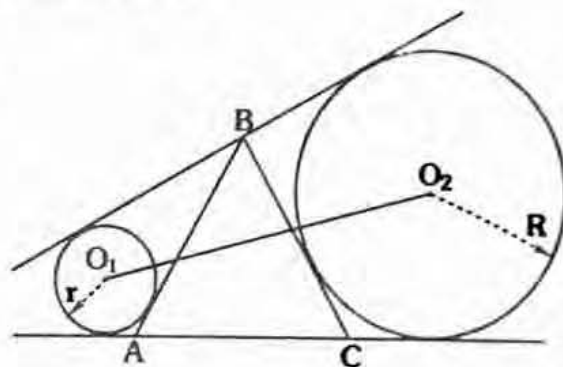
En el gráfico, ϵ es la circunferencia inscrita, $BM=MC$ y $\overline{HJ} \parallel \overline{PL} \parallel \overline{BC}$.



Demostrar que $BQ=TC$.

PROBLEMA N° 243

Si el triángulo ABC es equilátero.
Calcule O_1O_2 .



A) $\frac{2}{3}\sqrt{R^2+r^2}$

B) $(R+r)\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{\frac{R^2+r^2+Rr}{2}}$

D) $2\sqrt{R^2+r^2+Rr}$

E) $(R-r)\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N° 244

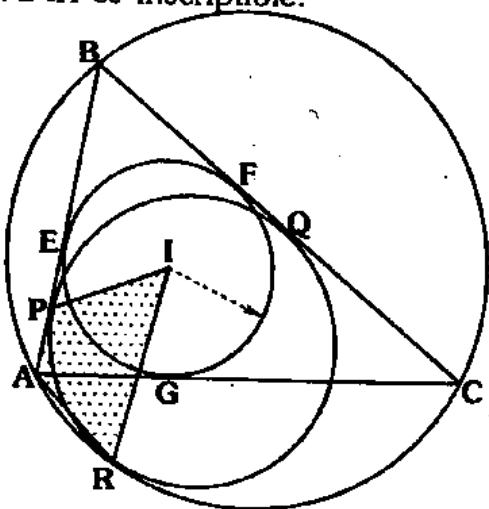
Se tiene el triángulo isósceles ABC ($AB=BC$),
M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$
respectivamente. P está en la región exte-

rior relativa a $\overline{AB}$, si B es punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{PB} \perp \overline{BA}$ y $\overline{CM} \perp \overline{AP}$.

Demostrar que $m\angle ANP = 90^\circ$.

PROBLEMA N° 245

En el gráfico, E, F, G, P, Q y R son puntos de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero APIR es inscriptible.

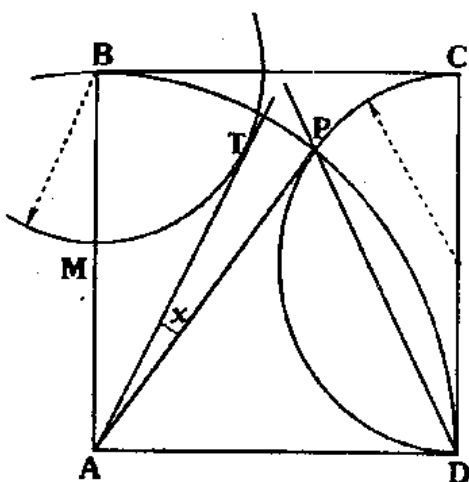


PROBLEMA N° 246

ABCD es un cuadrado $AM=MB$ y T es punto de tangencia.

Calcule "x".

- A) 8°
- B) 7°
- C) 6°
- D) 14°
- E) 17°



PROBLEMA N° 247

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, donde: $m\angle BAC = 10^\circ$, $m\angle CAD = 70^\circ$,

- $m\angle ADB = 60^\circ$ y $m\angle BDC = 20^\circ$.
- Calcule $m\angle ACB$.
- A) 35° B) 25° C) 20°
- D) 30° E) 10°

PROBLEMA N° 248

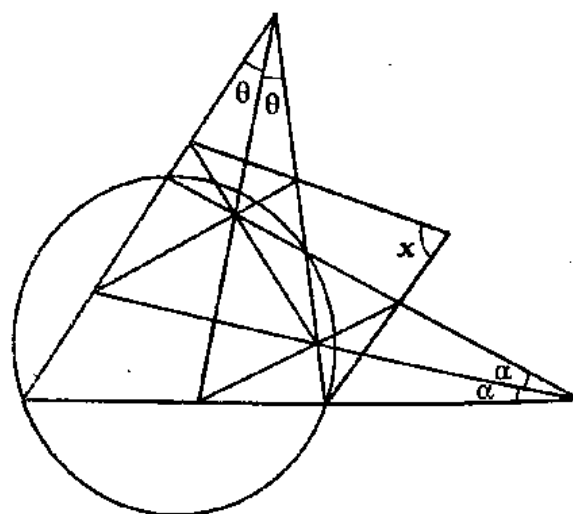
Se tiene el triángulo ABC ($AB \neq BC$), se traza la bisectriz interior BD, Q y P son las proyecciones ortogonales de A y C sobre BD. L es la proyección ortogonal de D sobre BC.

Calcule $\frac{m\angle QLD}{m\angle DLP}$.

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
- D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA N° 249

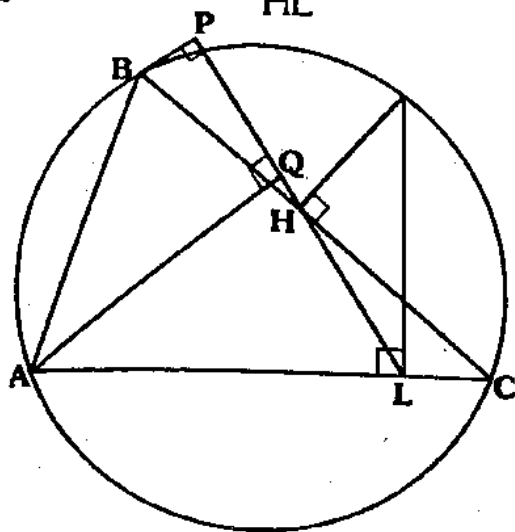
Del gráfico, calcule "x".



- A) 60° B) 45°
- C) 90° D) 75°
- E) 135°

PROBLEMA N° 250

Del gráfico, calcule. $\frac{PQ}{HL}$



- A) ED. B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 251

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica E y F en $\overline{BC}$ (en el orden B, E, F y F), si $m\angle BAE = m\angle CDF$ y $m\angle EAF = m\angle FDE$. Si $m\angle FAC = 40^\circ$, calcule $m\angle EDB$.

- A) 50° B) 20° C) 40°
D) 80° E) 60°

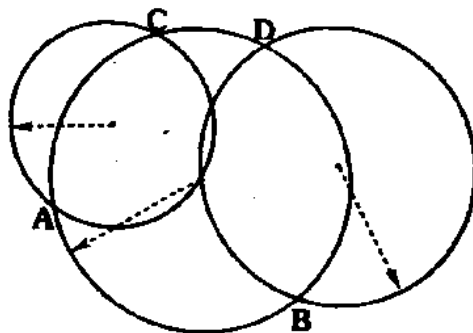
PROBLEMA N° 252

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se tocan en A y B, sea $\overline{PQ}$ una recta que pasa por A tal que P está en $\mathcal{C}_1$ y Q en $\mathcal{C}_2$. Halle el lugar geométrico del punto medio de $\overline{PQ}$ al variar esta recta.

- A) Una recta
B) Un segmento
C) Una circunferencia
D) Solo puntos de una circunferencia
E) Una elipse

PROBLEMA N° 253

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 80^\circ$ y $m\widehat{CD} = 20^\circ$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.



- A) 50° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 254

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, las diagonales se cortan en M. Si $m\angle DCA = m\angle ACB = x$; $m\angle DAC = 2x$; $m\angle ABD = 3x$ y $m\angle DBC = 4x$. Calcule "x".

- A) 18° B) 15° C) 12°
D) 10° E) 20°

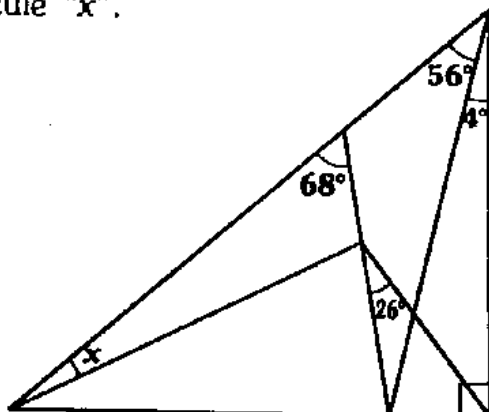
PROBLEMA N° 255

En el rectángulo ABCD, se ubica el punto medio M de $\overline{AB}$, con centro en B y radio BM se traza el cuadrante MBN ($N \in \overline{BC}$) y una semicircunferencia de diámetro $\overline{CD}$, si $3(AB) = 2(BC)$. Calcule la medida del ángulo formado por las tangentes trazadas desde A a dichos arcos.

- A) 23° B) $22^\circ 3'$ C) $26^\circ 3'$
D) 30° E) 31°

PROBLEMA N° 256

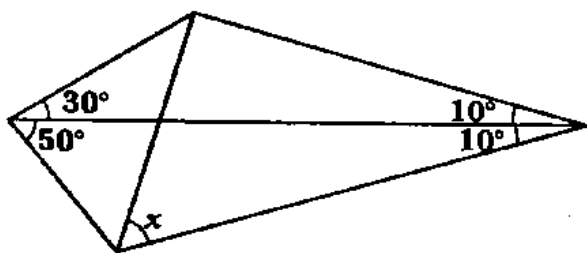
Calcule "x".



- A) 15° B) 18° C) 22°
D) 25° E) 24°

PROBLEMA N° 257

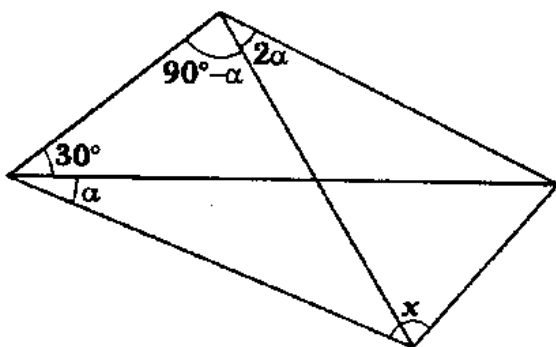
Calcule "x".



- A) 30° B) 45° C) 49°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA N° 258

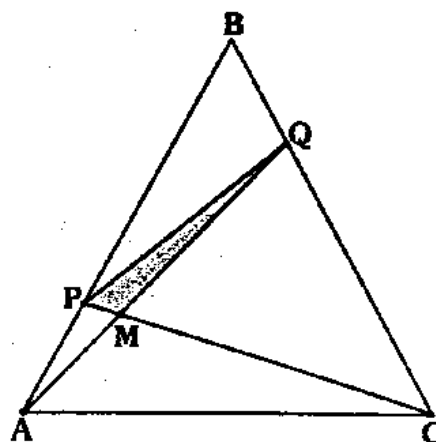
Calcule "x".



- ❖ A) 135° B) 120° C) 116°
❖ D) 106° E) 127°

PROBLEMA N° 259

- ❖ En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero tal que $AP=BQ$. Si $AB=\ell$, calcule la distancia del circuncentro del $\triangle MPQ$ hacia $\overline{AC}$.



- ❖ A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$
❖ C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2\ell}{3}$
❖ E) $\frac{2\ell}{3}\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 260

- ❖ Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$. Sea $\overline{\mathcal{L}}_A$ la recta de Simson de A respecto del triángulo BCD, análogamente se definen $\overline{\mathcal{L}}_B$, $\overline{\mathcal{L}}_C$ y $\overline{\mathcal{L}}_D$.
❖ Demostrar que $\overline{\mathcal{L}}_A$, $\overline{\mathcal{L}}_B$, $\overline{\mathcal{L}}_C$ y $\overline{\mathcal{L}}_D$ concurren.

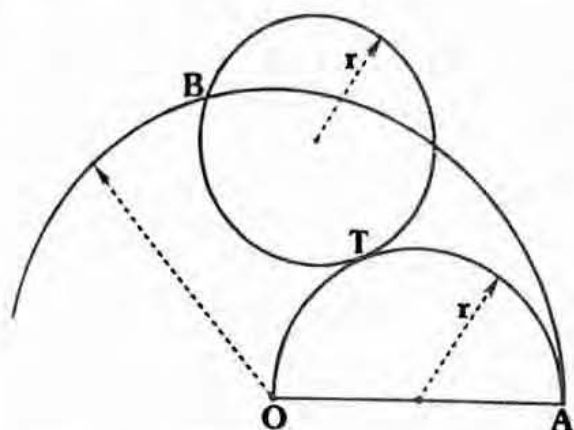


Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 261

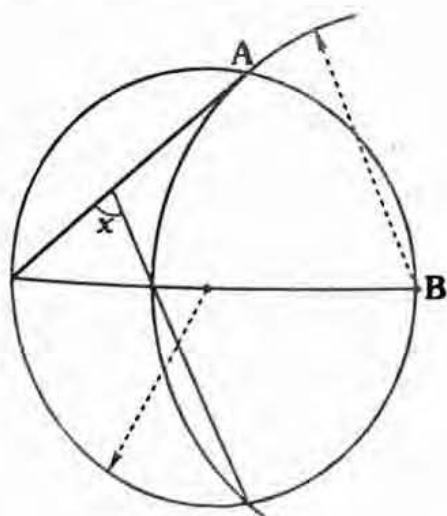
En el gráfico, T es punto de tangencia si $m\widehat{OT} = 40^\circ$. Calcule $m\widehat{TB}$.



- A) 100° B) 140° C) 160°
D) 80° E) 120°

PROBLEMA N° 262

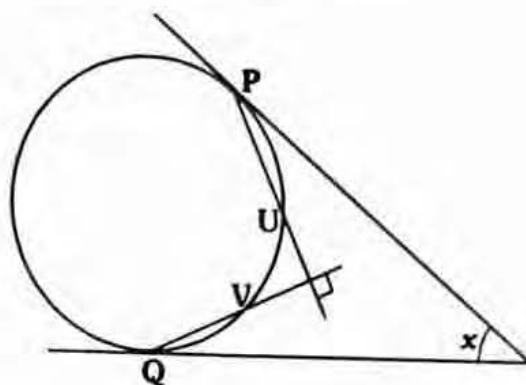
Si $m\widehat{AB} = \alpha$, calcule "x".



- A) $135^\circ - \frac{3\alpha}{4}$ B) 2α C) $90^\circ - \alpha$
D) $180^\circ - \alpha$ E) $180^\circ - 2\alpha$

PROBLEMA N° 263

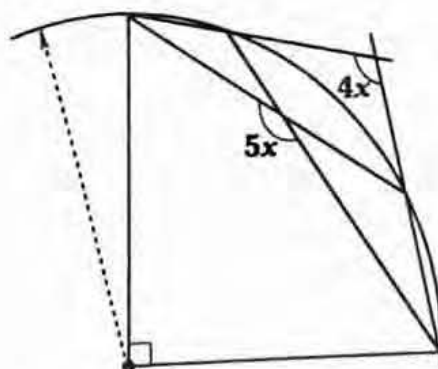
P y Q son puntos de tangencia, si $m\widehat{UV} = 30^\circ$. Calcule "x".



- A) 30° B) 45°
C) 60° D) $67,5^\circ$
E) 75°

PROBLEMA N° 264

Calcule "x", en:

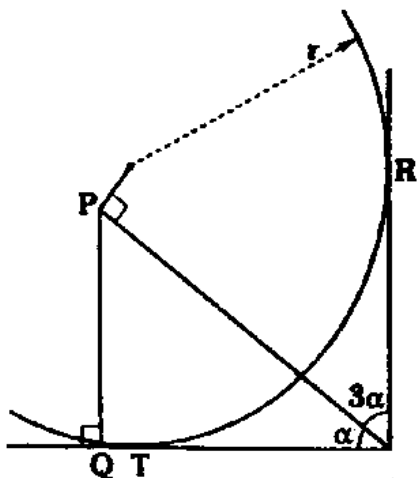


- A) 20° B) 8° C) 10°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N° 265

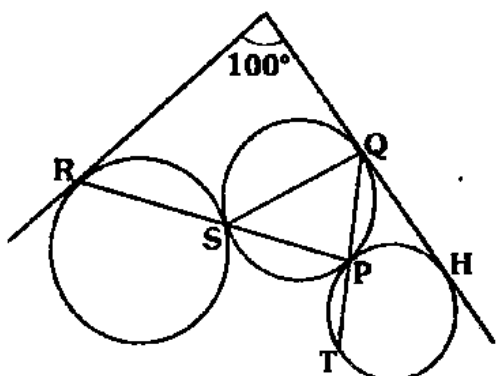
T y R son puntos de tangencia, si $PQ=6$, calcule r .

- A) 3
- B) $3\sqrt{2}$
- C) 6
- D) $6\sqrt{2}$
- E) 12



PROBLEMA N° 266

H, P, Q, R y S son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PT}$.

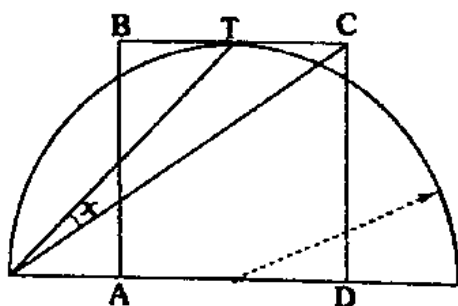


- A) 50°
- B) 90°
- C) 100°
- D) 80°
- E) 55°

PROBLEMA N° 267

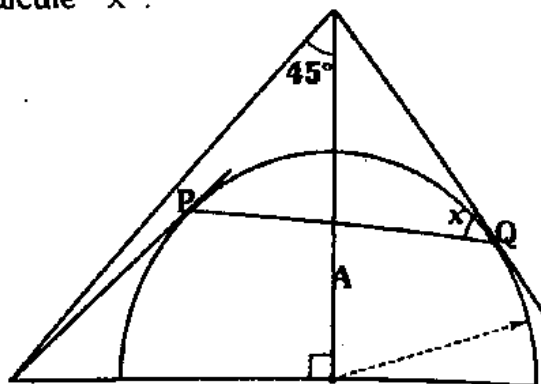
T es punto de tangencia, ABCD es un cuadrado. Si $BT=2$ y $TC=1$. Calcule " x ".

- A) 8°
- B) 10°
- C) 15°
- D) $37^\circ/2$
- E) $53^\circ/2$



RESOLUCIÓN N° 268

Si P y Q son puntos de tangencia. Calcule " x ".

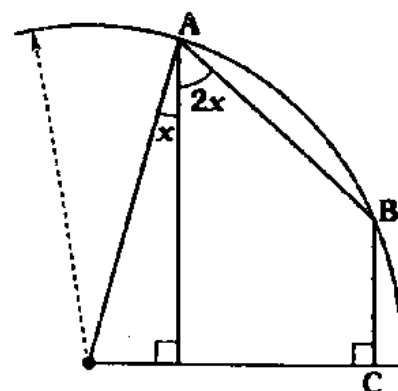


- A) 30°
- B) 60°
- C) 45°
- D) 35°
- E) 50°

PROBLEMA N° 269

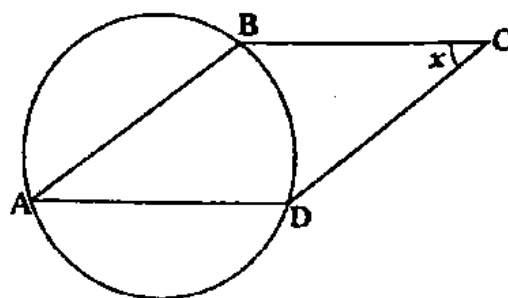
Si $AB=2(BC)$. Calcule " x ".

- A) $22^\circ 30'$
- B) 15°
- C) 20°
- D) $53^\circ/2$
- E) $37^\circ/2$



PROBLEMA N° 270

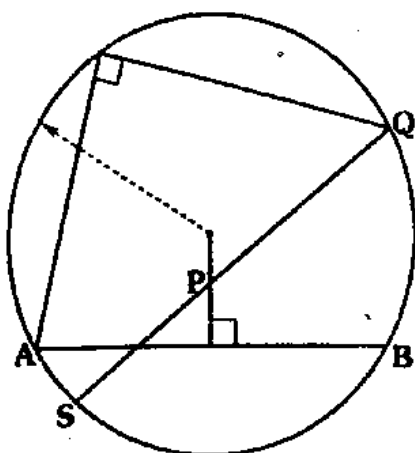
Si ABCD es un rombo; $m\widehat{AD}=134^\circ$. Calcule " x ".



- A) 67°
- B) 48°
- C) 38°
- D) 46°
- E) 52°

PROBLEMA N° 271

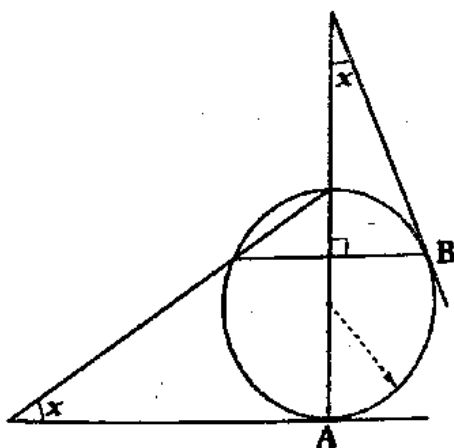
Si $AB = 1,2(PQ)$. Calcule $m\widehat{BS}$.



- A) 30° B) 60° C) 53°
D) 74° E) 37°

PROBLEMA N° 272

Si A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

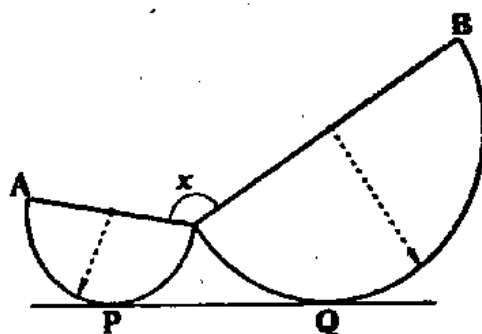


- A) $53^\circ/2$ B) $37^\circ/2$ C) 37°
D) 15° E) 30°

PROBLEMA N° 273

Si P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AP} + m\widehat{BQ} = 250^\circ$.

Calcule "x".



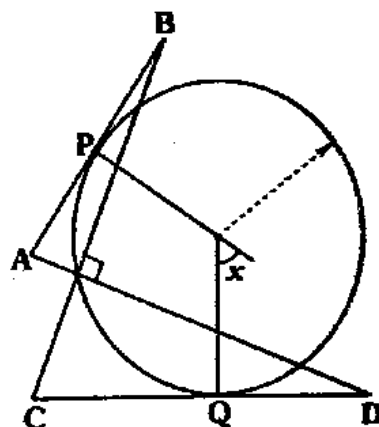
- A) 65° B) 125°
C) 110° D) 62°
E) 120°

PROBLEMA N° 274

Si P y Q son puntos de tangencia $AP = PB$;

$CQ = QD$.

Calcule "x".

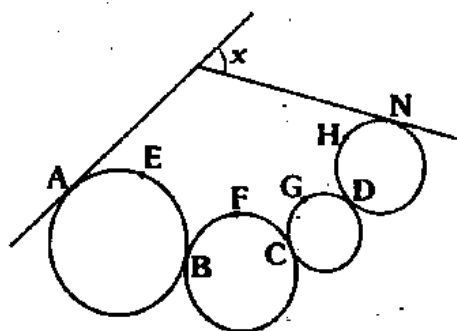


- A) 30° B) 45°
C) 75° D) 60°
E) 53°

PROBLEMA N° 275

Calcule "x" en el gráfico, si :

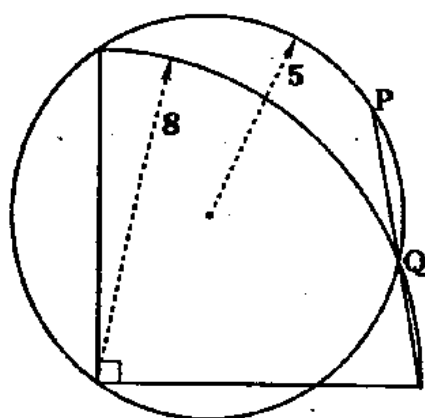
$$m\widehat{AEB} + m\widehat{BFC} + m\widehat{CGD} + m\widehat{DHN} = 570^\circ$$



- A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N° 276

Del gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.



- A) 37° B) 74° C) 53°
D) 45° E) 58°

PROBLEMA N° 277

En un triángulo rectángulo se traza una circunferencia que pasa por los tres puntos medios de sus lados. Calcular la medida del arco exterior a la hipotenusa si los arcos exteriores a los catetos miden 80° y 100° respectivamente.

- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 40°

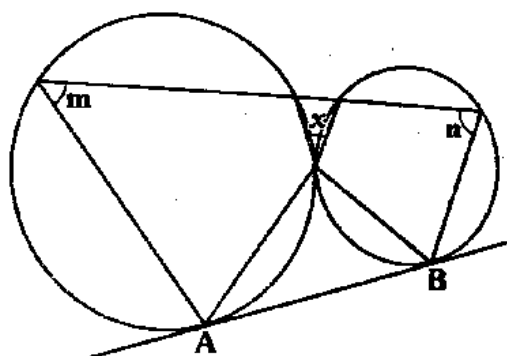
PROBLEMA N° 278

Dos circunferencias tangentes exteriores en el punto C, son tangentes interiores a una tercera circunferencia en los puntos A y B. Calcular: $m\widehat{AB}$; si $m\widehat{AC} + m\widehat{BC} = 260^\circ$ (A y B pertenecen a la circunferencia mayor).

- A) 60° B) 80° C) 90°
D) 70° E) 100°

PROBLEMA N° 279

Si $m + n = 140^\circ$, calcule "x". A y B: son puntos de tangencia.



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 280

En un triángulo ABC, recto en "B", se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, por D se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$, que intersecta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q. Calcular: AC, si $PQ = 5m$, $PD = 6m$.

- A) 13m B) 14m C) 15m
D) 16m E) 17m

PROBLEMA N° 281

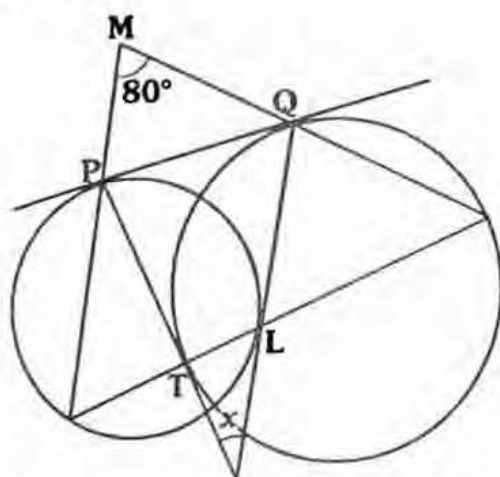
Se tiene un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{CD}$ y la ceviana $\overline{BE}$ intersectándose en P. Calcular: $m\angle DACB$, si: el cuadrilátero ADPE es inscriptible y $AD=DE$, $m\angle ABE = 20^\circ$.

- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N° 282

En el gráfico, P y Q y L son puntos de tangencia.

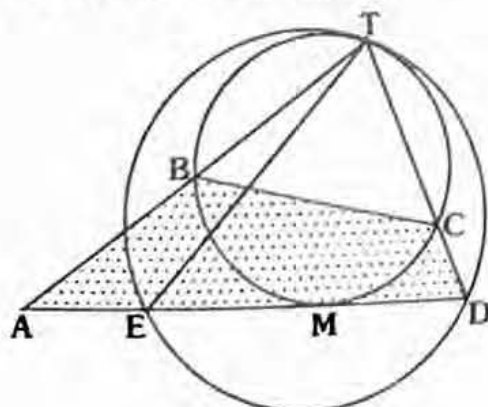
Calcule "x".



- A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 283

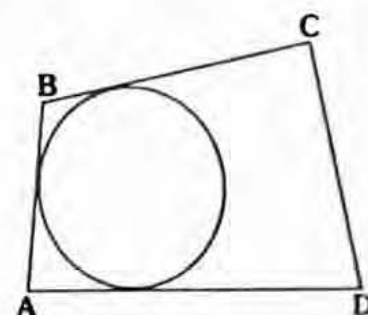
M es punto de tangencia, si $ET=TD$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD?



- ❖ A) Trapecio
- ❖ B) Trapezoide de simétrico
- ❖ C) Inscriptible
- ❖ D) Circunscriptible
- ❖ E) Bicéntrico

PROBLEMA N° 284

- ❖ En el gráfico, se muestra una circunferencia tangente a los lados CB, BA y AD
- ❖ Indique la relación correcta.



- ❖ A) $AB+CD = BC+AD$
- ❖ B) $AB+CD < BC+AD$
- ❖ C) $AB+CD > BC+AD$
- ❖ D) $AB+CD < BD+AC$
- ❖ E) No existe ninguna relación entre $AB+CD$ y $BC+AD$.

PROBLEMA N° 285

- ❖ P es un punto interior del triángulo isósceles ABC ($AB=BC$) talque:

$$m\angle PAC = m\angle PCB = m\angle PBA \quad y$$

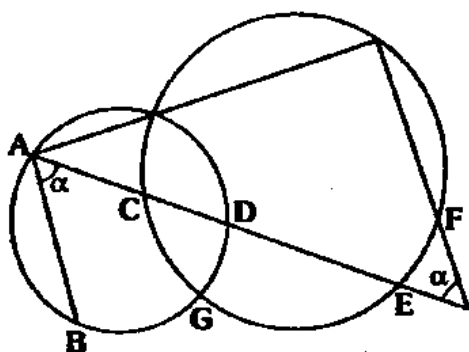
$$m\angle ABC = 37^\circ$$

- ❖ Calcule $m\angle PCA$.

- ❖ A) 18° B) $26^\circ 30'$ C) $22^\circ 30'$
- ❖ D) 45° E) 37°

PROBLEMA N° 286

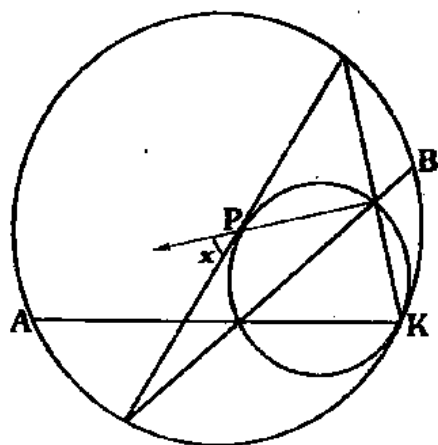
En el gráfico, $m\widehat{CG} + m\widehat{GD} + m\widehat{EF} = 120^\circ$.
Calcule $m\widehat{AB}$.



- A) 100° B) 80°
C) 140° D) 60°
E) 120°

PROBLEMA N° 287

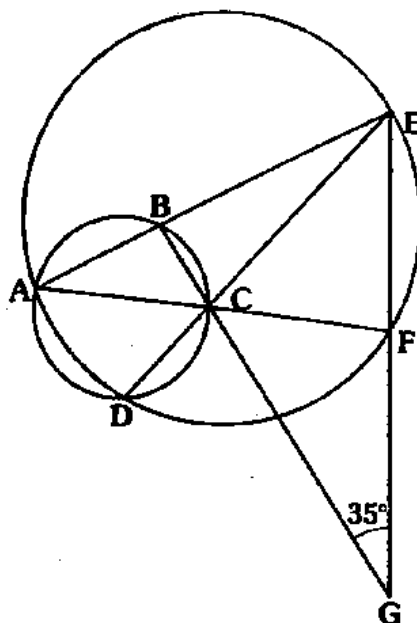
Calcule "x", si: $m\widehat{AB} = 130^\circ$, siendo "P" y "K" puntos de tangencia.



- A) 50° B) $32^\circ 30'$
C) 80° D) $22^\circ 30'$
E) 65°

PROBLEMA N° 288

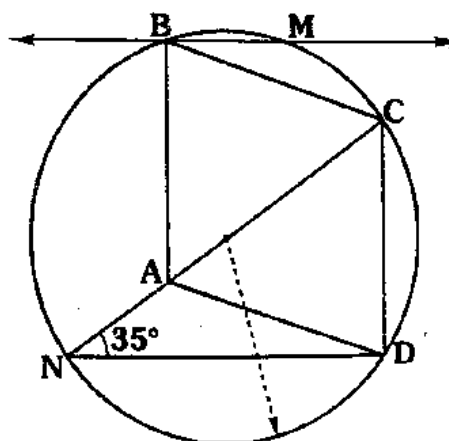
Según la figura, $m\angle BGE = 35^\circ$, calcule $m\widehat{BC}$.



- A) 35° B) 70° C) 80°
D) 55° E) 140°

PROBLEMA N° 289

Calcule $m\widehat{MC}$, si: $\overline{BM} \parallel \overline{ND}$ y ABCD es un paralelogramo.



- A) 40° B) 20° C) 80°
D) 35° E) 70°

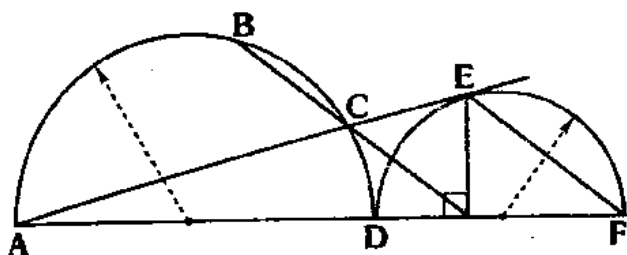
PROBLEMA Nº 290

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en el cual se ubican los puntos M y P, ("P" $\in \widehat{MB}$) y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, luego se ubica el punto "Q" en $\overline{AB}$, tal que: $3AQ = 5QB$. Calcule $m\angle PQB$, si $m\angle QMB = m\angle BMP$.

- A) 76° B) 31° C) 62°
D) 45° E) 14°

PROBLEMA N° 291

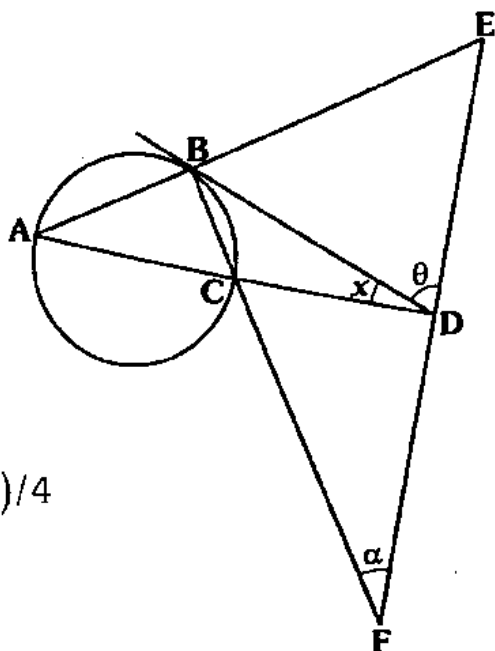
Según el gráfico, calcule $m\angle EFD$, si $m\widehat{BCD} = \alpha$. (D es punto de tangencia).



- A) $\alpha/4$ B) $\alpha/2$ C) α
D) $3\alpha/2$ E) 2α

PROBLEMA N° 292

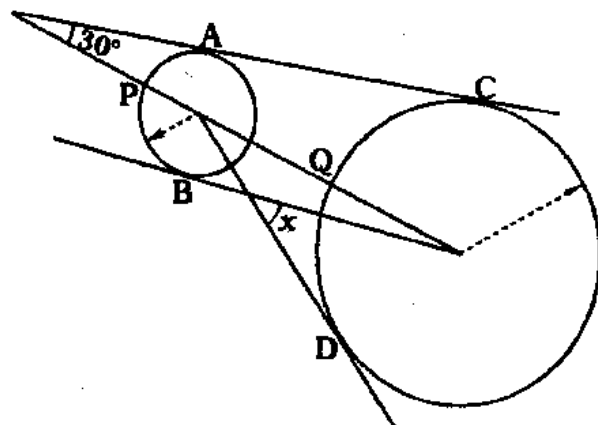
Halle "x", si $BE=ED$, B punto de tangencia. **E**



- A) α
B) θ
C) $\alpha/2$
D) $\theta/2$
E) $(\alpha + \theta)/4$

PROBLEMA Nº 293

En la figura mostrada. Calcule "x", si $\widehat{APB} = 160^\circ$, $\widehat{CQD} = 130^\circ$.



- A) 20° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 294

En el cuadrilátero convexo ABCD, $AC=CD$, $m\angle ABD=20^\circ$ y $m\angle DBC=80^\circ$.

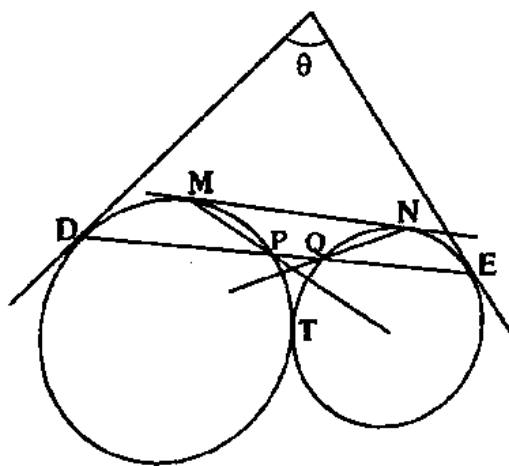
Calcule $m_{\angle ACD}$.

- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA N° 295

M, N y T son puntos de tangencia.

Calcule la medida del mayor ángulo entre $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{NQ}$.



A) 20

B) $180^\circ - \theta$

C) $90^\circ + \theta$

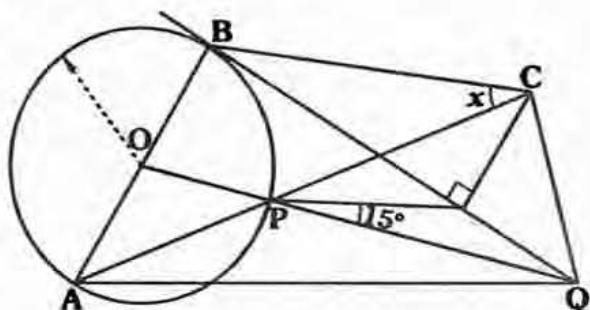
D) $90^\circ + \frac{\theta}{2}$

E) $\frac{3\theta}{2}$

PROBLEMA N° 296

En la figura mostrada, B es punto de tangencia, si $\overline{BP} \parallel \overline{CQ}$ y $m\widehat{AP} = 110^\circ$.

Calcule "x".



A) 20°

B) 25°

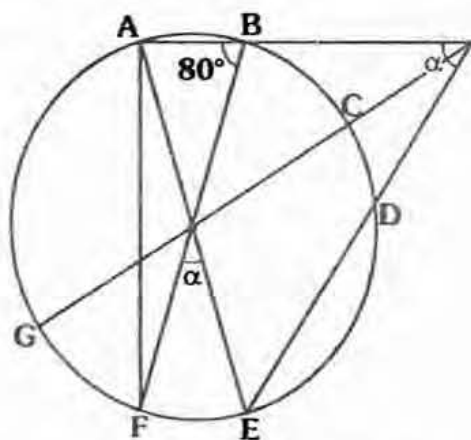
C) 35°

D) 40°

E) 50°

PROBLEMA N° 297

Calcule $m\widehat{GF}$, si $m\widehat{ABC} = 120^\circ$



A) 20°

B) 35°

C) 70°

D) 60°

E) 40°

PROBLEMA N° 298

Según el gráfico calcule "x", si: $m\widehat{PBR} = 160^\circ$ y A, B son puntos de tangencia.

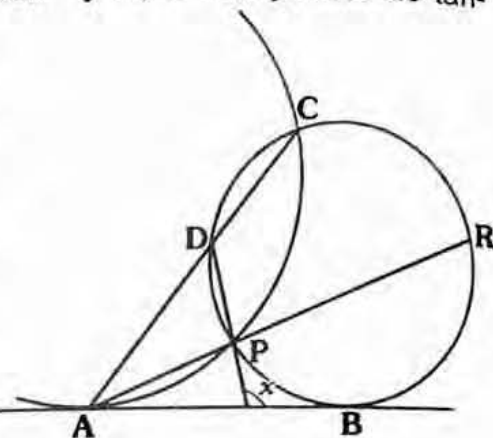
A) 160°

B) 120°

C) 100°

D) 80°

E) 130°



PROBLEMA N° 299

En la figura calcule "x", si $m\widehat{AF} = m\widehat{EO}$ y $m\widehat{CDE} = 80^\circ$.

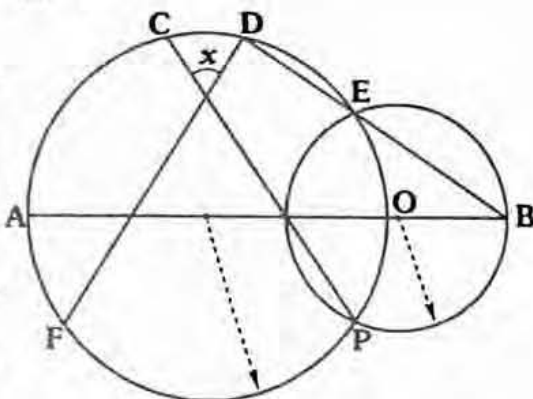
A) 160°

B) 80°

C) 100°

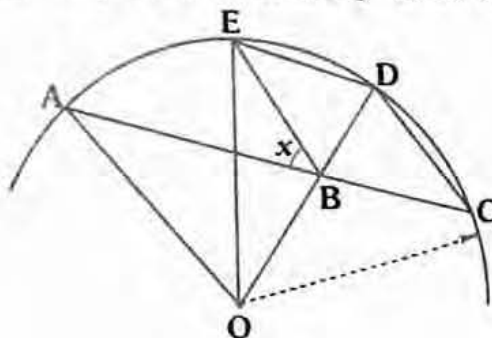
D) 160°

E) 130°



PROBLEMA N° 300

Calcule "x", BCDE: rombo y $\overline{OA} \parallel \overline{BE}$



A) 72°

B) 36°

C) 60°

D) 30°

E) 45°

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	13. A	25. C	37. B	49. A	61. A	73. D
2. B	14. A	26. D	38. C	50. C	62. C	74. C
3. B	15. E	27. E	39. E	51. E	63. C	75. E
4. C	16. C	28. E	40. A	52. B	64. C	76. B
5. D	17. A	29. C	41. A	53. A	65. B	77. E
6. E	18. B	30. C	42. B	54. C	66. A	78. B
7. B	19. C	31. A	43. B	55. B	67. C	79. A
8. B	20. B	32. B	44. C	56. D	68. B	80. A
9. C	21. D	33. D	45. C	57. D	69. D	
10. B	22. A	34. E	46. D	58. A	70. A	
11. C	23. *	35. E	47. C	59. C	71. C	
12. E	24. C	36. B	48. C	60. C	72. C	

CEPRE-UNI

81. A	89. A	97. E	105.	113. B	121. B	129. D
82. D	90. *	98. A	106. B	114. E	122. D	130. D
83. C	91. A	99. A	107. B	115. B	123. C	
84. A	92. D	100. E	108. A	116. D	124. E	
85. A	93. A	101. B	109. D	117. B	125. B	
86. C	94. D	102. C	110. C	118. B	126. E	
87. A	95. E	103. C	111. C	119. C	127. D	
88. C	96. A	104. *	112. B	120. B	128. D	

SEMESTRAL

131. E	141. E	151. E	161. B	171. B	181. B	191. B
132. B	142. C	152. D	162. E	172. C	182. *	192. D
133. B	143. D	153. A	163. C	173. D	183. A	193. C
134. E	144. B	154.	164. A	174. A	184. C	194. C
135. C	145. D	155.	165. B	175. D	185. D	195. C
136. E	146. B	156. E	166. C	176. D	186. E	196. A
137. C	147. D	157. D	167. E	177. E	187. C	197. D
138. A	148. C	158. A	168. E	178. D	188. D	198. B
139. D	149. D	159. C	169. E	179. D	189. B	199. A
140. A	150. C	160. D	170. C	180. E	190. B	200. B

SEMESTRAL INTENSIVO

201. A	210. *	219. *	228. B	237. E	246. B	255. A
202. B	211. *	220. C	229. B	238. C	247. C	256. D
203. B	212. C	221. A	230. *	239. D	248. A	257. E
204. B	213. D	222. C	231. B	240. C	249. C	258. B
205. A	214. E	223. C	232. *	241. E	250. C	259. C
206. D	215. C	224. D	233. *	242. *	251. C	260. *
207. B	216. C	225. C	234. B	243. D	252. C	
208. C	217. D	226. C	235. B	244. *	253. B	
209. E	218. A	227. B	236. A	245. *	254. A	

REPASO

261. B	267. A	273. C	279. C	285. D	291. B	297. E
262. D	268. C	274. D	280. E	286. E	292. A	298. C
263. A	269. A	275. C	281. C	287. B	293. B	299. B
264. E	270. D	276. E	282. D	288. B	294. C	300. A
265. E	271. D	277. A	283. C	289. A	295. D	
266. C	272. E	278. B	284. B	290. A	296. C	

Bibliografía

- **Radmila Bujajick**
José Gomez Ortega

Geometría / Cuaderno de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemática UNAM - 2004

- **Jaime Escobar Acosta**

Elementos de Geometría - 1990

- **Pogorelov, J**

Geometría Elemental
Editorial MIR - 1974

- **Apuntes de Patricia Jimenez Gallego - UAZ**

- **Apuntes de Diego Bravo Estrada - PUCP**

- **Material Bibliográfico de Diferentes Instituciones Educativas**

- **Cepre - Uni**

Recopilación de Seminarios, Prácticas calificadas y Exámenes parciales.

- **Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas**

- **www.perugeometrico.blogspot.com**