Vectores

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

Un vector fijo es **nulo** cuando **el origen y su extremo coinciden.**

Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

Es la **longitud del segmento AB**, se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.

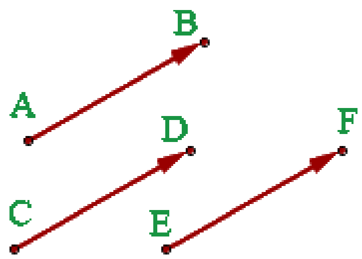
Dirección del vector $\overrightarrow{AB}$

Es la **dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.**

Sentido del vector $\overrightarrow{AB}$

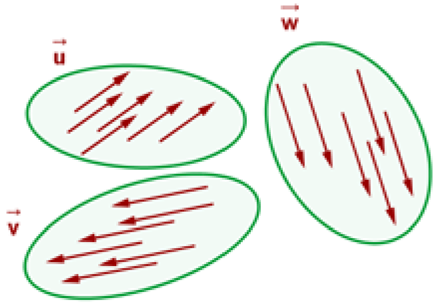
El que va del origen A al extremo B.

Vectores equipolentes



Dos vectores son **equipolentes** cuando tienen igual **módulo, dirección y sentido**.

Vector libre



El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama **vector libre**. Cada *vector fijo* es un representante del **vector libre**.

Vector de posición de un punto en el plano de coordenadas

El vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas **O** con un punto **P** se llama vector de posición del punto P.

Coordenadas de un vector en el plano

Si las coordenadas de A y B son:

$$A(x_1, y_1)\ B(x_2, y_2)$$

Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Módulo de un vector

Si las coordenadas de A y B son:

$$A(x_1, y_1)\ B(x_2, y_2)$$

Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, \; y_2 - y_1)$$

Si tenemos las componentes de un vector:

$$\vec{u} = (u_1, \; u_2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que tiene de extremos dichos puntos.

$$A(x_1, y_1) \qquad\qquad B(x_2, y_2)$$

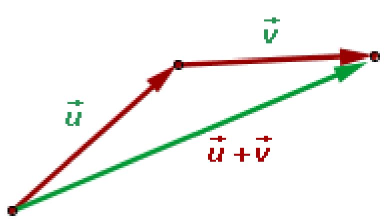
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vector unitario

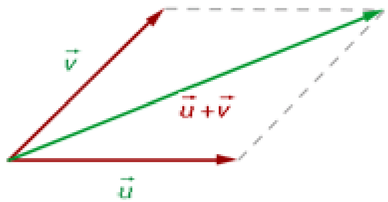
Los vectores unitarios tienen **de módulo la unidad.**

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Suma de vectores



Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.



Regla del paralelogramo

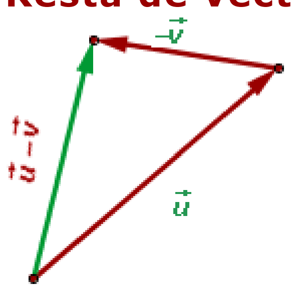
Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \ u_2 + v_2)$$

Resta de vectores



Para restar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **se suma** $\vec{u}$ **con el opuesto de** $\vec{v}$.

Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, \; u_2 - v_2)$

Producto de un número por un vector

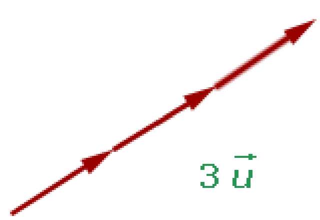
El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector:

De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.

Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo**.

De **sentido contrario** del vector $\vec{u}$ **si k es negativo**.

De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$



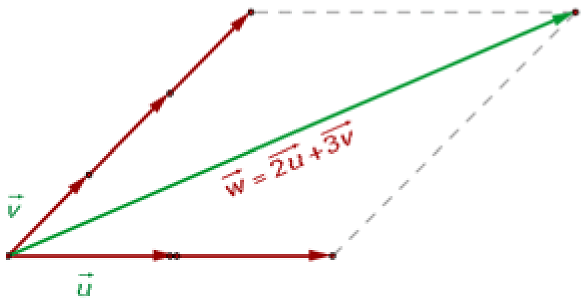
Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$k \cdot (u_1, u_2) = (k \cdot u_1, \; k \cdot u_2)$

Combinación lineal de vectores

Dados dos vectores: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números: a y b, el vector $a\,\vec{u}+b\vec{v}$ se dice que es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

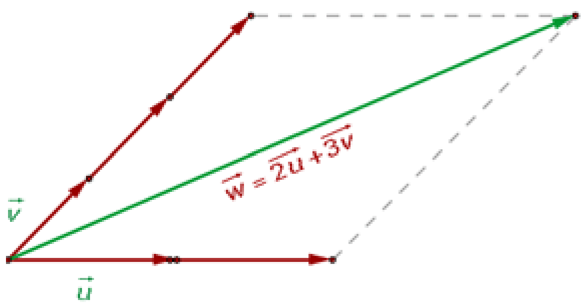


Cualquier vector se puede poner como combinación lineal de otros dos que tengan distinta dirección.

$$\vec{w}=\overrightarrow{2u}+\overrightarrow{3v}$$

Esta combinación lineal es única.

Base

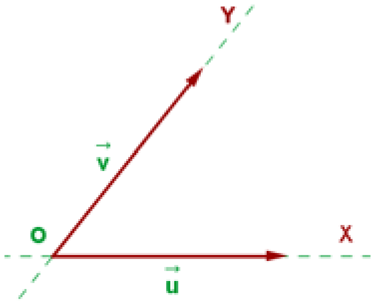


Cualquier vector se puede poner como combinación lineal de otros dos que tengan distinta dirección.

$$\vec{w}=\overrightarrow{2u}+\overrightarrow{3v}$$

Esta combinación lineal es única.

Sistema de referencia



En el plano, un sistema de referencia **está constituido por un punto O del plano y una base** ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

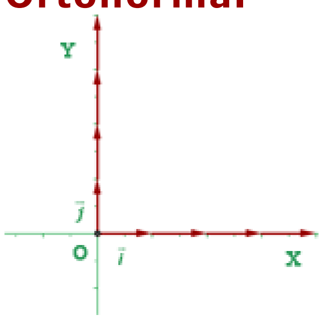
El punto O del sistema de referencia se llama **origen**.

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ no paralelos forman la base.

Ortogonal

Los vectores base son perpendiculares, pero de distinto módulo.

Ortonormal



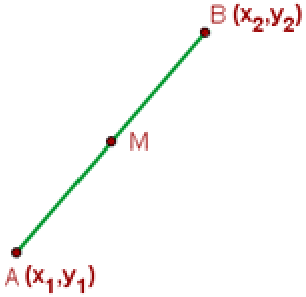
Los vectores de la base son perpendiculares, iguales y unitarios, es decir, de módulo 1.

Se representan por las letras $\vec{i}, \vec{j}$.

$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{i} = (1, 0)$

$\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{j} = (0, 1)$

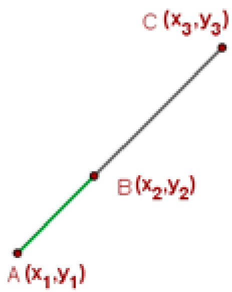
Coordenadas del punto medio de un segmento



Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

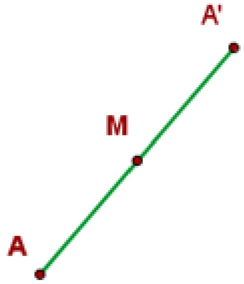
Condición para qué tres puntos estén alineados



Los puntos A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) y C(x_3, y_3) **están alineados** siempre que l**os vectores** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ **tengan la misma dirección**. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

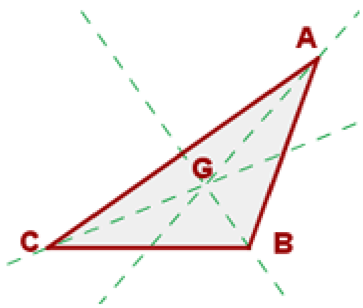
Simétrico de un punto respecto de otro



Si A' es el simétrico de A respecto de M, entonces M es el punto medio del segmento AA'. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

Coordenadas del baricentro



Baricentro o centro de gravedad de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.

Las coordenadas del baricentro son:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

División de un segmento en una relación dada

Dividir un segmento AB en una relación dada r es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento AB, de modo que las dos partes, PA y PB, están en la relación r:

$$\frac{PA}{PB} = r$$

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores es un número real que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

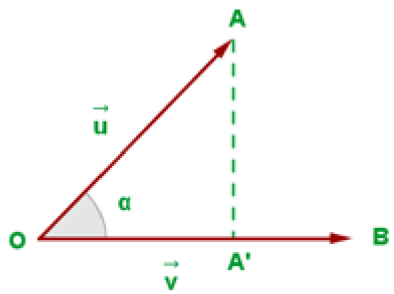
$$\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

Condición analítica de la ortogonalidad de dos vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad\qquad u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

Proyección

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$\cos\,\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \qquad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos\,\alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA' \qquad OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Propiedades del producto escalar

1Conmutativa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2 Asociativa

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

3 Distributiva

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4

El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$