
CONTRASTE DE HIPÓTESIS

El último tema que nos queda por tratar relativo a la Inferencia Estadística es el relacionado con **decidir** si un valor obtenido a partir del estudio de una muestra es probable que sirva o pertenezca a la población.

En general, cuando calculamos la media (o proporción) en una muestra sacada de una población, ésta suele ser distinta a la media poblacional de la cual se extrae la muestra. Pero lo normal es que tal diferencia entre la media muestral y poblacional sea pequeña y debida al azar. Sin embargo, podría suceder que dicha diferencia no esté justificada por el azar y se deba a un cambio en la población, y debamos modificar los datos que conocemos previamente.

Veamos algunos ejemplos

- ✱ Hace algunos años, la media de estatura de los españoles adultos varones era de 170 cm y su desviación típica 9 cm. Pasado el tiempo, un muestreo realizado a 36 adultos da una medida de 172 cm. ¿Puede afirmarse que esa diferencia de 2 cm es debida al azar o realmente la estatura media ha aumentado?
- ✱ El porcentaje de aprobados en las PAU en un determinado distrito universitario ha sido del 82%. En una ciudad de ese distrito, el porcentaje de aprobados fue del 86%. ¿Puede afirmarse con un nivel de confianza del 90% que los resultados en esa ciudad son superiores a la media?

Los métodos que se utilizan para dar respuestas a estas preguntas están relacionados con los que hemos usado para estimar los parámetros de una población usando los intervalos de confianza, unidos a otros conceptos nuevos que vamos a usar

Hipótesis estadísticas

Lo que vamos a intentar hacer es usar los datos obtenidos de una muestra para tomar decisiones sobre una población. Para ello, debemos realizar supuestos o conjeturas sobre las poblaciones. Estos supuestos, que pueden ser o no ciertos, se llaman **hipótesis estadísticas**.

Por tanto, el procedimiento estadístico por el cual vamos a decidir si lo que afirmamos sobre la población es cierto o falso se llama **contraste de hipótesis**

Estas conjeturas o hipótesis las vamos a realizar siempre sobre la media poblacional μ o la proporción poblacional p .

Llamaremos **hipótesis nula**, y se representa por H_0 , a la que se formula y por tanto se quiere contrastar o rechazar, e **hipótesis alternativa**, y se representa por H_1 , a cualquier otra hipótesis que sea contraria a H_0 , de modo que si se acepta H_0 implica el rechazo de la alternativa H_1 y viceversa, el rechazo de H_0 implica la aceptación de H_1 .

Ejemplo

Un investigador afirma que la temperatura del cuerpo humano en un adulto sano se distribuye según una normal de media $\mu = 37^\circ \text{C}$ y desviación típica $\sigma = 0,9^\circ \text{C}$. Formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa

Solución

A la vista de los datos, el investigador afirma que la temperatura media del cuerpo humano es 37° , es decir la hipótesis o conjetura que formula es:

$$H_0 : \mu = 37 \text{ (hipótesis nula)}$$

Como hipótesis alternativa, hemos de tomar aquella contraria a ésta, es decir, que la media sea distinta de 37°C :

$$H_1 : \mu \neq 37 \text{ (hipótesis alternativa)}$$

Si el investigador hubiese establecido como la hipótesis nula $H_0: \mu \leq 37$, la hipótesis alternativas sería: $H_1: \mu > 37$

Tipos de error

Al tomar cualquier decisión estadística puede ocurrir que:

1. Aceptemos H_0 siendo ésta verdadera
2. Aceptemos H_0 siendo ésta falsa
3. Rechacemos H_0 siendo ésta verdadera
4. Rechacemos H_0 siendo ésta falsa

En los casos 1 y 4 se está tomado una decisión acertada, pero en los casos 2 y 4 se esta cometiendo un error.

- ✖ El error es "Tipo I" si se rechaza H_0 siendo ésta verdadera (caso 3)
- ✖ El error es "Tipo II" si se acepta H_0 siendo ésta falsa (caso 2)

La probabilidad de cometer el error Tipo I se denota por " α " y se denomina "nivel de significación". Lógicamente α es una probabilidad pequeña (0,1; 0,05;...)

La probabilidad de cometer el error Tipo II se denota por " β " y al valor $(1-\beta)$ se le denomina "potencia" del test de hipótesis.

Región crítica y de aceptación

Sabemos ya formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Lo que necesitamos ahora es un criterio para saber si debemos aceptar una u otra, es decir, ¿con cuál de las dos hipótesis nos quedamos?.

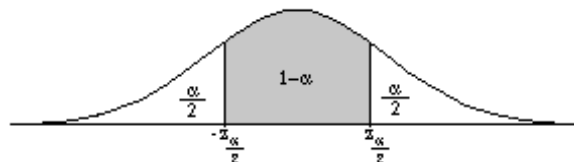
Al tener ya formulada la hipótesis nula, es necesario que las evidencias sean muy fuertes para rechazarla; es decir, puede que haya cambios debidos al azar, en cuyo caso el cambio no es significativo, y no cambiamos. Pero puede que los cambios sean debidos a otras causas. En este último caso es cuando el cambio sí es significativo y rechazaremos.

Por lo tanto, lo primero que debemos hacer es fijar un cierto intervalo dentro del cual es normal que haya cambios, es decir, una región tal que si el parámetro se mantiene en dicho intervalo, nos seguimos quedando con H_0 . Ese intervalo o región se denomina "*región de aceptación*", y será mayor o menor dependiendo del nivel de confianza que precisemos, $1 - \alpha$.

La región que quede fuera de la región de aceptación indica que en este caso los cambios no se pueden atribuir al azar, y por tanto hemos de rechazar H_0 y aceptar H_1 . Tal región se llama *región crítica o de rechazo*.

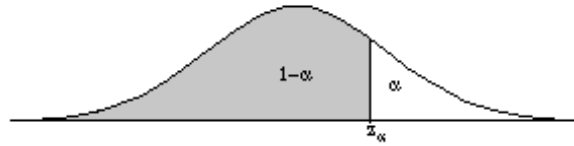
Llegados a este punto, hemos de distinguir entre dos tipos de contraste o test, que determinan la región de aceptación y la región de rechazo.

- ✖ **Contraste bilateral (o de dos colas):** Dicho caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0: \mu = k$ (o bien $H_0: p = k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1: \mu \neq k$ (o bien $H_1: p \neq k$). La región crítica para un cierto nivel α sería, en la $N(0;1)$:

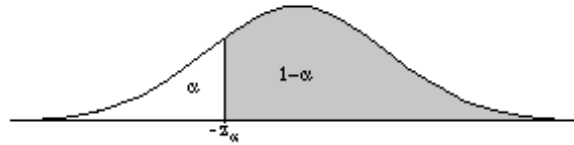


- ✖ **Contraste unilateral (o de una cola):** Este caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0: \mu \geq k$ (o bien $H_0: p \geq k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1: \mu < k$ (o bien $H_1: p < k$). A nivel de confianza $1 - \alpha$, las regiones serían, en la $N(0;1)$:

- Unilateral por la derecha



- Unilateral por la izquierda



Elaboración de un test de hipótesis

Los pasos a dar para elaborar un test de hipótesis son los siguientes:

1. Enunciar la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 .
Deben ser excluyentes entre sí. Además habrá que concretar si el contraste es bilateral o unilateral
2. Determinar el valor de $z_{\alpha/2}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_{α} (para contrastes unilaterales),
3. Determinar la distribución que sigue el parámetro muestral (x o $\hat{p}$) y, escribir las correspondientes regiones de aceptación y rechazo.
4. Calcular el estadístico usado en la prueba (en nuestro caso, calcular media muestral x o proporción muestral $\hat{p}$, a partir de la muestra).
5. Aplicar el test, es decir, dependiendo de si el estadístico cae en la región de aceptación o de rechazo, tomar la decisión de aceptar una de las dos hipótesis.

Ejemplos

1. La vida media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una empresa es de 1570 horas, una desviación típica de 120 horas. Si es la vida media de los tubos de dicha empresa, ¿se puede afirmar a nivel de significación 0'05 que la duración media de los tubos es de 1600 horas?
Determinar los errores de tipo I y II
2. Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6'5 años con una desviación típica de 4. ¿Sirve esta afirmación para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justificar adecuadamente la respuesta.
3. Un investigador, utilizando información de anteriores comicios, sostiene que, en una determinada zona, el nivel de abstención en las próximas elecciones es del 40% como mínimo. Se elige una muestra aleatoria de 200 individuos para los que se concluye que 75 estarían dispuestos a votar. Determinar, con un nivel de significación del 1%, si se puede admitir como cierta la afirmación del investigador
4. Se sabe que la desviación típica de las notas de cierto examen de Matemáticas es 2,4. Para una muestra de 36 estudiantes se obtuvo una nota media de 5,6. ¿Sirven estos datos para confirmar la hipótesis de que la nota media del examen fue de 6, con un nivel de confianza del 95%?
5. Un sociólogo ha pronosticado, que en una determinada ciudad, el nivel de abstención en las próximas elecciones será del 40% como mínimo. Se elige al azar una muestra aleatoria de 200 individuos, con

- derecho a voto, 75 de los cuales estarían dispuestos a votar. Determinar con un nivel de significación del 1%, si se puede admitir el pronóstico.
6. Un informe indica que el precio medio del billete de avión entre Canarias y Madrid es, como máximo, de 120 € con una desviación típica de 40 €. Se toma una muestra de 100 viajeros y se obtiene que la media de los precios de sus billetes es de 128 €. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0,1, la afirmación de partida?
 7. Una marca de nueces afirma que, como máximo, el 6% de las nueces están vacías. Se eligieron 300 nueces al azar y se detectaron 21 vacías.
 - × Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca?
 - × Si se mantiene el porcentaje muestral de nueces que están vacías y $1-\alpha = 0.95$, ¿qué tamaño muestral se necesitaría para estimar la proporción de nueces con un error menor del 1% por ciento?
 8. La duración de las bombillas de 100 W que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas de duración. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?
 9. Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2400 horas, con una desviación típica igual a 300. Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra tiene una duración media de 2320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%?
 10. El control de calidad una fábrica de pilas y baterías sospecha que hubo defectos en la producción de un modelo de batería para teléfonos móviles, bajando su tiempo de duración. Hasta ahora el tiempo de duración en conversación seguía una distribución normal con media 300 minutos y desviación típica 30 minutos. Sin embargo, en la inspección del último lote producido, antes de enviarlo al mercado, se obtuvo que de una muestra de 60 baterías el tiempo medio de duración en conversación fue de 290 minutos. Suponiendo que ese tiempo sigue siendo Normal con la misma desviación típica:
 - × ¿Se puede concluir que las sospechas del control de calidad son ciertas a un nivel de significación del 2%?
 11. Se cree que el nivel medio de protombina en una población normal es de 20 mg/100 ml de plasma con una desviación típica de 4 miligramos/100 ml. Para comprobarlo, se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18.5 mg/100 ml. ¿Se puede aceptar la hipótesis, con un nivel de significación del 5%?