· TEMA 3 ·
Vibraciones y Ondas

La vida es un raro estado de la materia inerte.
La inteligencia es un raro estado de la materia viva.
La cultura es un raro estado de la materia inteligente.
La civilización es un raro estado de la materia culta.

Normalmente, el estudio del movimiento suele ser en los estudios de física, uno de los temas más recurrentes. Al mismo tiempo, comprender ese fenómeno físico y las posibles consecuencias que de él se deriven permite abordar otras cuestiones que en principio poco parecen tener que ver entre sí. Casi siempre que suele comenzarse el movimiento por el estudio de las variables involucradas y la clasificación posterior que se hace. Con todo, ese estudio no llega a ser nunca del todo completo. Así, por ejemplo, en el curso pasado se estudiaron los casos más universales de movimiento de un modo más o menos pormenorizado, pero dejando atrás otros casos igual de interesantes. Uno de esos casos interesantes lo constituye el llamado "*movimiento armónico*" y, posteriormente, el conocido como movimiento ondulatorio (armónico). De nuevo aquí volveremos a tropezarnos con conceptos vistos el curso pasado, que haremos extensivo a nuevas situaciones.

Si recuerdas, todos los movimientos estudiados el curso pasado, bien eran uniformes o bien poseían aceleraciones constantes. Queda por tratar aquellos casos de movimientos con aceleración variable.

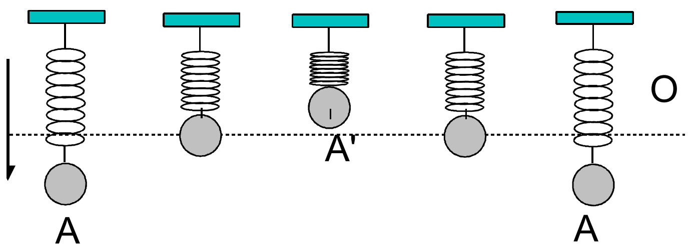
Nuestra andadura se va a iniciar con un nuevo tipo de movimiento: el oscilatorio. Estudiaremos sus características y magnitudes fundamentales y lo completaremos abordando el movimiento ondulatorio.

1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

"Un objeto oscila cuando se mueve de forma periódica alrededor de su posición de equilibrio"

El movimiento oscilatorio o vibratorio, es uno de los más importantes que existen en la Naturaleza. Por ejemplo, un cuerpo colgado de un muelle oscila alrededor de su posición de equilibrio al separarlo de ésta y dejarlo en libertad, un péndulo al moverse realiza un movimiento oscilatorio; los átomos de un sólido vibran alrededor de su posición de equilibrio, etc. Además, este tipo de movimiento es la base de los fenómenos ondulatorios, que estudiaremos luego.

Al dejar oscilar libremente al objeto de la figura, éste describe un movimiento de oscilación: un movimiento armónico simple (en adelante, MAS).

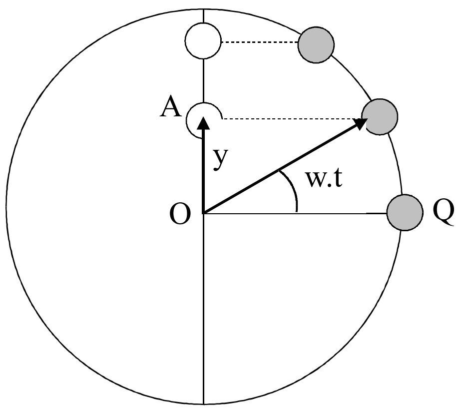


Si O es la posición de equilibrio, al soltar el objeto desde la posición A, comenzará a moverse hacia O con cierta aceleración; rebasará la línea O, va disminuyendo su velocidad hasta llegar a A', en donde se detendrá. Luego, volverá a moverse hacia O, y así sucesivamente. Si se desprecian los rozamientos, el objeto continuará oscilando indefinidamente, siendo los puntos A y A' posiciones simétricas respecto de O.

Antes de comenzar a describir matemáticamente el movimiento, conviene definir algunas de sus magnitudes importantes:

- **LA ELONGACIÓN** (y) → *es la distancia que separa en cada instante al cuerpo que oscila de su posición de equilibrio.*
- **LA AMPLITUD** (A) → *es la elongación máxima (distancia de la posición de equilibrio al punto A, en la figura)*
- **EL PERIODO** (T) → *es el tiempo empleado en producirse una oscilación completa (es decir el tiempo en ir desde el punto A y regresar a él)*
- **LA FRECUENCIA** (f) → *es la inversa del periodo. Representa, por lo tanto, el número de oscilaciones dadas en un segundo.*

El movimiento vibratorio representado en la figura anterior, es un movimiento rectilíneo que se produce verticalmente. Por ello, podremos situar el origen del S.R: en el punto O. De este modo, la posición del objeto que vibra vendrá dada en cada momento, por la ordenada correspondiente. Así, el movimiento quedará descrito cuando obtengamos una ecuación (ecuación del MAS) que nos permita conocer su posición en cada instante. Es decir, buscaremos una función del tipo y = y(t).



Obtener matemáticamente la ecuación del movimiento armónico, es complicado para este curso. Sin embargo, nos valdremos de un procedimiento que nos dará buenos resultados. Para ello, (ver la figura), basta observar que el movimiento de "vaivén" del cuerpo que oscila del muelle, puede ser reproducido como "la sombra sobre el eje OY (o sobre el eje OX, es indistinto) de un cuerpo que rota en movimiento circular y uniforme con rapidez angular ω". De esta forma, obtenemos sobre un diámetro un MAS cuyo periodo coincidirá con el del movimiento circular. Por lo tanto

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Suponiendo que en el instante inicial el objeto que describe el MAS está en O (el objeto que describe el movimiento circular estaría en Q) su posición en un instante posterior vendrá dado, utilizando trigonometría elemental, por

$$\mathbf{y = A\ sen\ (\omega\ t)}$$

siendo A la amplitud.

Si tenemos presente el valor de ω, podremos escribir que:

$$y = Asen\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = Asen(2\pi ft)$$

Así pues, la ecuación de un movimiento oscilatorio que describe un MAS de periodo T y amplitud A, viene dada por la expresión:

$$y = Asen\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Hay que destacar un último aspecto importante antes de seguir; y es que **EL MOVIMIENTO CIRCULAR SÓLO SE HA UTILIZADO COMO AYUDA** para describir el MAS y que NADA TIENE QUE VER con él ("El MAS es un movimiento rectilíneo")

Como se puede apreciar de la ecuación del movimiento del MAS, la posición del objeto que se mueve así, va variando en función del tiempo de forma periódica sinusoidal.

Como se recordará, a partir de la ecuación del movimiento, podremos obtener las expresiones para la rapidez y la aceleración con ayuda del cálculo de derivadas:

* ***Para la velocidad*** *(rapidez):*

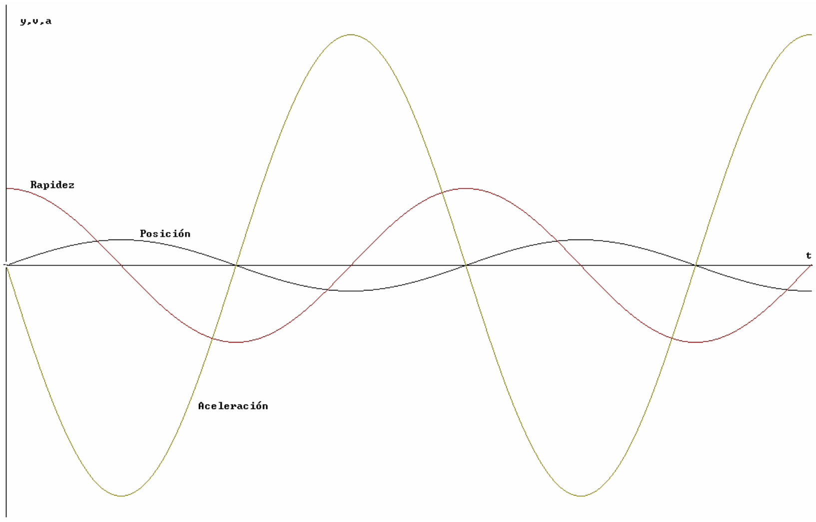
$$v = \frac{dy}{dt} = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

y

* ***Para la aceleración:***

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 sen\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow a = -(2\pi/T)^2 y \Rightarrow a = -\omega^2 y$$

Hay que destacar que la aceleración es directamente proporcional a la elongación (y) y de sentido contrario; y que además, por tanto, **NO ES CONSTANTE**. En general, todo movimiento cuya aceleración sea de la forma a = -ky donde K = cte, será un MAS.



Representaciones de la posición, rapidez y aceleración en un MAS. Observar sus relaciones.

UN EJEMPLO INTERESANTE:

"Un objeto colgado de un muelle describe un MAS de amplitud 10 cm y periodo 0,1 s. En el instante inicial, el muelle está estirado, ocupando el cuerpo la posición más baja de su oscilación. Determinar la ecuación del movimiento".

En este caso, las condiciones del problema no son las que se han utilizado en nuestro desarrollo para obtener la ecuación general. Es decir, según lo anterior, la ecuación debería ser, simplemente, y = 0,1 sen(2πt/0,1) = 0,1 sen (20πt).

Sin embargo, esta expresión no cumple las condiciones iniciales impuestas: para t = 0, y = -0,1 m. Para salvar este tipo de dificultad, ha de añadirse a la ecuación general una constante, δ, denominada fase **inicial**, que se determina exigiendo que la nueva ecuación cumpla las condiciones del enunciado. Por ello, tendremos: y = 0,1.sen(20πt + δ). Como para t = 0 debe ser que y = -0.1, se tendrá que:

$$-0.1 = 0.1.\text{sen}(0 + \delta) \Rightarrow \delta = 3\pi/2$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento quedará como y = 0,1 sen(20πt + 3π/2)

Q1. Siguiendo con el ejemplo, determina A) la posición que ocupará el objeto transcurridos 10 s desde que se inició la oscilación; B) La velocidad y la aceleración en ese instante; C) Demostrar que la máxima velocidad se alcanza cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio.

Q2. Un objeto describe un MAS que responde a la expresión y = 0,2 sen (2πt + π/2). Determinar: A) amplitud, periodo y frecuencia de ese movimiento; B) posición inicial del objeto; C) puntos en los que la aceleración es máxima.

Q3. A partir de la ecuación de la velocidad de un MAS, demostrar que ésta es nula en los puntos en que la elongación es máxima

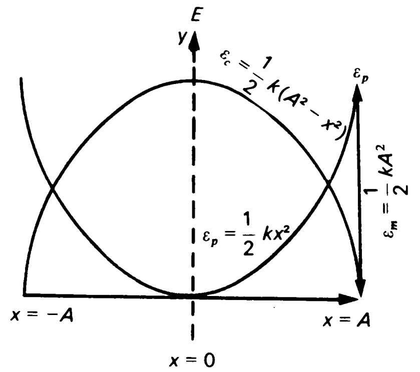
ASPECTOS ENERGÉTICOS DEL MAS.

En el caso de un movimiento armónico simple, el cuerpo que oscila experimenta cambios de posición respecto del equilibrio, y a lo largo de su recorrido experimenta, también, variaciones de energía cinética y potencial, pues hay que recordar que la fuerza elástica "recuperadora" es conservativa. Veamos el valor de esas energías y de la energía mecánica total.

Por definición, la Energía cinética es:

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos \omega t)^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} mA$$

$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 - \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 sen^2 \omega t = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$



Pero por otro lado, sabemos que

$$F = -K \cdot y = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot y \Rightarrow K = m \cdot \omega^2$$

y la expresión anterior podemos ponerla como:

$$Ec = \frac{1}{2} K \cdot A^2 - \frac{1}{2} K \cdot y^2$$

⊕ *Según la expresión anterior, estudiar los valores máximos y mínimos de Ec y cuándo se producen.*

Como ya se ha estudiado en un curso anterior, la energía potencial elástica viene dada por la expresión

$$Ep = \frac{1}{2}K \cdot y^2 = \frac{1}{2}K(A \cdot sen\omega\, t)^2$$

La energía mecánica total, es por definición, la suma de ambos términos, por lo que dará:

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}K \cdot A^2 - \frac{1}{2}K \cdot y^2 + \frac{1}{2}K \cdot y^2 = \frac{1}{2}K \cdot A^2 = cte.$$

⊕ Estudiar las variaciones energéticas de un cuerpo que oscila respecto de su posición de equilibrio. Ayúdate de la gráfica anterior.

SELECTIVIDAD JUNIO'99.
Un bloque de masa m cuelga del extremo inferior de un resorte de masa despreciable, vertical y fijo por su extremo superior.

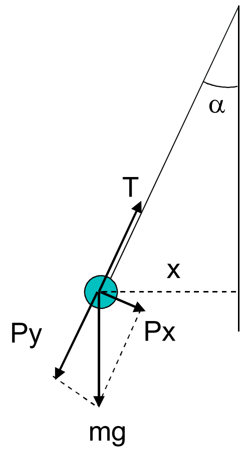
Indique las fuerzas que actúan sobre la partícula explicando si son no conservativas.

Se tira del bloque hacia abajo y se suelta, de modo que oscila verticalmente. Analice las variaciones de energía cinética y potencial del bloque y del resorte en una oscilación completa.

ESTUDIO DEL PÉNDULO SIMPLE COMO EJEMPLO DE M.A.S.

El movimiento de un péndulo simple es un ejemplo más de los movimientos armónicos, para pequeñas separaciones del cuerpo de su posición de equilibrio. Es un dispositivo formado por un objeto de cierta masa atado al extremo de una cuerda, de masa despreciable e inextensible, de cierta longitud L. Desde su posición de equilibrio se lo separa un cierto ángulo alfa y se lo deja oscilar libremente. En estas condiciones, el comportamiento de la masa puede describirse, en muy buena aproximación, como un ejemplo más de movimiento armónico.

En efecto, comenzaremos haciendo un análisis de las fuerzas que actúan sobre la masa m cuando se la separa de su posición. Ese análisis está recogido en la figura.



En este caso, la "fuerza recuperadora" es la titulada como px en el dibujo.

Para pequeñas variaciones de la posición de equilibrio, se ha de tener en cuenta que sen $\alpha \approx \alpha$ en radianes, por lo que:

$$sen\alpha = \frac{x}{L} = \frac{Px}{mg} \Rightarrow Px = mg\frac{x}{L}$$

para $\alpha \to 0$ se tiene que px es una fuerza que obedece la ley de Hooke

$$mg\frac{x}{L} = K \cdot x \Rightarrow K = \frac{mg}{L} = m\omega^2$$

es decir:

$$\frac{g}{L} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

que es la expresión del periodo para un péndulo simple.

Para otros aquéllos casos en que no pueda hacerse la consideración de ángulos pequeños, la situación cambia. En cualquier caso, siempre que se habla de periodos de péndulos simples, se asume que las separaciones de la posición de equilibrio son pequeñas, por lo que la expresión para T sigue siendo válida.

Para cuando α NO es despreciable frente a 0, la T es variable según el valor de ese ángulo, es decir, según la posición que adopta el péndulo. Ahora P_y y T NO están contrarrestadas, sino que su resultante es responsable de una aceleración centrípeta. Aplicando la segunda ley de Newton, nos queda para T la expresión:

$$T = m \cdot (\frac{v^2}{L} + g\cos\alpha) \neq cte.$$

Θ Estudiar para qué posiciones de un péndulo, la tensión del hilo es mínima y máxima.

2. MOVIMIENTO ONDULATORIO.

Muchos de los fenómenos que se producen frecuentemente en nuestra vida diaria son de naturaleza ondulatoria. Así, por ejemplo, el sonido que oímos tras poner en marcha un aparato de radio o televisión, la luz natural o artificial, las olas del mar o el rizado del agua de un estanque al dejar caer en él una piedra son ejemplos de fenómenos ondulatorio.

La perturbación introducida en el punto en el que ha caído la piedra en el estanque produce en ese punto un movimiento vertical de vaivén (MAS) que, sucesivamente, se va transmitiendo a los puntos que lo rodean. Cualquiera de esos puntos, al ser alcanzado por la perturbación efectúa un movimiento de vaivén, pero sin desplazarse de la posición que ocupa (un corcho en el agua, se mantiene prácticamente en su sitio aunque realizando un movimiento vertical).

Este hecho nos ayuda a comprender la definición de **movimiento ondulatorio como un fenómeno consistente en la propagación de una perturbación en el espacio (en un medio elástico) en la que se produce una transmisión de energía, pero no hay transporte neto de materia**.[1]

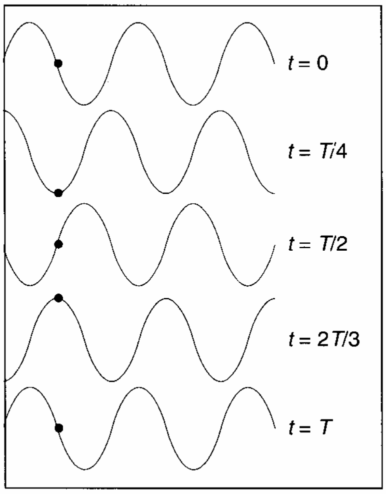
Cuando la perturbación consiste en un movimiento vibratorio armónico simple, la onda se llama **ONDA ARMÓNICA** (a veces, también sinusoidal o cosenoidal)

Un aspecto importante a considerar es **la diferencia entre ondas y partículas**. Ya se ha señalado que en un movimiento ondulatorio, se produce un transporte de energía de unos puntos a otros sin transporte de materia. Igual puede decirse de la cantidad de movimiento: en el movimiento ondulatorio hay transmisión o propagación de cantidad de movimiento sin un desplazamiento neto de materia. Otro rasgo de interés es el relacionado con la *localización espacial*: una partícula en reposo o en movimiento ocupa en cada instante una determinada posición en el espacio (está "localizada"). En cambio, una onda se extiende por una región del espacio afectando a muchos puntos al mismo

[1]Hay algunos datos para avalar esta última afirmación. Por ejemplo, cuando la membrana del altavoz de la radio vibra, produce compresiones y dilataciones en el aire que se halla en su cercanía. Esta perturbación es la que, al propagarse a través del aire constituye el sonido (que viaja a unos 340 m/s). Si hubiera transporte de materia, no tendríamos sonido, sino un "huracán" con vientos de gran velocidad. También resulta evidente que si antes de se alcanzados por la perturbación, el corcho del estanque o el tímpano del oído estaban en reposo y después se mueven, es porque el movimiento ondulatorio supone transmisión de energía.

tiempo (esta "deslocalizada"). Precisamente, si unimos con una línea los puntos alcanzados por la perturbación, se obtiene una figura denominada frente de ondas.
En principio, podemos diferenciar dos tipos de ondas:

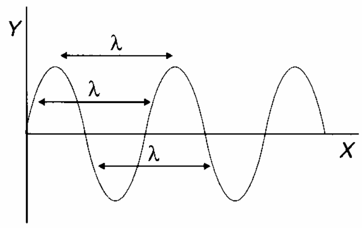
Ondas Mecánicas: *son las que necesitan un medio para propagarse (sonido, ondas a través de un muelle, etc.)*
Ondas Electromagnéticas: *no precisan de ningún medio para propagarse (la luz)*



Durante un tiempo igual al período, cada partícula de la cuerda pasa por todas las posiciones en torno al centro de oscilación.

Otro criterio de clasificación de las ondas atiende a la dirección en que se produce la perturbación. Por ejemplo, en el caso de las ondas que viajan por una cuerda, se observa que la perturbación original (desplazamiento) tiene lugar verticalmente (le damos a la cuerda una sacudida vertical), mientras que la onda avanza en sentido horizontal. En este caso, se dice que **la onda producida es transversal**. Sin embargo, si estudiamos las ondas producidas al comprimir y dilatar un muelle, se observa que la perturbación original (compresión-dilatación) tiene la misma dirección que la de avance de la onda. En este caso se dice que **la onda es longitudinal.**

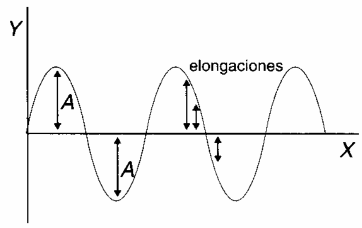
> *Todos estamos familiarizados con la idea de onda. Así, al dejar caer una piedra en un estanque, las ondas de agua marchan radialmente hacia afuera; al tocar el piano, vibran las cuerdas y las ondas sonoras se extienden por la habitación; cuando una estación de radio está transmitiendo, las ondas eléctricas se transmiten a través del espacio. Todos estos son ejemplos de movimiento ondulatorio, de modo que podemos decir:* ***una onda es una perturbación que producida en un punto, llamado foco, se propaga en el espacio.***



La longitud de onda es la distancia que hay entre dos puntos consecutivos que se encuentran en el mismo estado de vibración.

2.1. MAGNITUDES PARA DESCRIBIR EL MOVIMIENTO ONDULATORIO ARMÓNICO.

Imaginemos una trozo de cuerda sujeto por un extremo a la pared. El otro extremo está libre y lo tenemos sujeto con la mano de forma que mantenemos la cuerda en posición horizontal. Si damos una sola sacudida vertical, se produce una perturbación (onda) en la cuerda. Más correctamente: hemos producido un pulso. si en lugar de dar una sola sacudida, repetimos ésta de forma periódica, por la cuerda viajarán un conjunto de pulsos: en este caso, habremos generado un tren de ondas periódico.



Amplitud es la máxima separación de las partículas del centro de la oscilación.

Todas las ondas que estudiaremos serán, en realidad, trenes de ondas periódicos, aunque por comodidad se los suele denominar, simplemente, ondas. Para esos trenes de ondas, se definen una serie de magnitudes fundamentales:

EL PERIODO de la onda es el tiempo que transcurre entre dos pulsos sucesivos. Suele representarse con la letra T y se mide en segundos.

LA LONGITUD DE ONDA es la distancia que existe entre dos pulsos sucesivos. Genéricamente se suele representar por la letra λ y se mide en metros.

Si admitimos que los diferentes pulsos se propagan con la misma velocidad (denominada velocidad de propagación), la longitud de onda será la distancia que avanza la onda en un periodo. De esta forma se puede escribir que:

$$v = \lambda/T$$

LA FRECUENCIA, f, es la inversa del periodo. Representa el número de pulsos producidos en la unidad de tiempo. Su unidad en el S.I. es el hertzio (hz). Se cumplirá que

$$v = \lambda.f$$

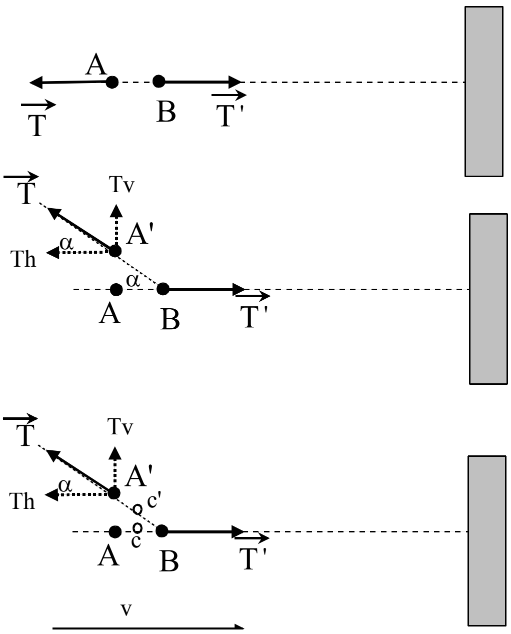
Q4. Salvo excepciones, el oído humano es capaz de detectar sonidos cuya frecuencia está comprendida entre 20 y 20000 Hz. ¿Qué longitud de onda corresponde a cada una de estas frecuencias, cuando el sonido se propaga en el aire?

Q5. Calcular la longitud de onda que corresponde a las ondas electromagnéticas que emite una emisora de radio, si la sintonizamos en 97.5 MHz?

3. VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS y SU DEPENDENCIA DEL MEDIO.

La velocidad de propagación de una onda mecánica depende de las características del medio. Por ejemplo, el sonido, se propaga a una velocidad de unos 340 m/s en el aire, pero a unos 1500 m/s en el agua o a unos 5000 m/s en el acero. Pero además, cuando en el mismo medio se propagan ondas transversales y longitudinales, lo hacen, en cada caso, con diferente velocidad.

La obtención teórica y rigurosa de una expresión para la velocidad de propagación de una onda mecánica en un medio determinado, no es sencillo. Nosotros, vamos a hacerlo en forma elemental para el caso de una onda transversal que se propaga por una cuerda fina y homogénea cuya densidad lineal (masa por unidad de longitud) sea μ y sometida a una tensión T, que inicialmente la mantiene recta como en la figura de la página siguiente.



Sean A y B dos puntos cercanos entre sí. Si la tensión es **T**, dado el equilibrio inicial del pequeño trozo de cuerda comprendido entre A y B, la tensión en B será **T'**, igual y opuesta a **T**.

Supongamos que tras sufrir una perturbación, el segmento AB se encuentra desviado de su posición inicial un pequeño ángulo α. Entonces, la componente vertical de **T**, vale T.sen α, y puesto que el ángulo es muy pequeño, se puede sustituir el seno del ángulo por la tangente: Tv = T.tag α.

Vamos a fijarnos en "el centro de masa" del trozo de cuerda AB (punto c) de masa m. Por la ecuación fundamental de la dinámica se le podrá escribir que:

$$T_v = m.a_{(cdm)}$$

Con esa aceleración, el punto c se habrá desplazado hasta c′ en un cierto tiempo t, el mismo que ha empleado el punto A en desplazarse hasta A′, o cualquier punto del segmento AB en desplazarse desde su posición inicial hasta la nueva posición. Como todos los puntos del segmento AB se han visto afectados por la perturbación, podemos razonar que ese tiempo t es el empleado en la propagación de la perturbación desde el punto A hasta el punto B.

La velocidad de propagación del movimiento ondulatorio en la cuerda, que es justo lo que buscamos, será, por lo tanto:

$$v = \frac{\overline{A}\overline{B}}{t}$$

El desplazamiento entre las posiciones c y c′, que se ha producido con la aceleración $a_{(cdm)}$ en el tiempo t vale:

$$\overline{C}\overline{C}' = \frac{1}{2} a_{cdn} t^2$$

por lo que

$$2\overline{C}\overline{C}' = a_{cdm} t^2 = \overline{A}\overline{A}'$$

pero como

$$tag\alpha = \frac{\overline{A}\overline{A}'}{\overline{A}\overline{B}} = \frac{a_{(cdm)} . t^2}{vt}$$

y como la masa del trozo de cuerda es μAB, podemos sustituir y tener que:

$$T_v = \overline{A}\overline{B} \mu a_{(cdm)} = vt \mu a_{(cdm)} = T \frac{a_{(cdm)} . t^2}{vt} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

que es la expresión de propagación de una onda transversal por una cuerda tensa, y cuyo valor concuerda con el que experimentalmente se obtiene.

De la misma manera que para una cuerda tensa se ha obtenido **que la velocidad de propagación depende de la tensión y de la densidad lineal**, se puede deducir la velocidad de propagación de las demás ondas mecánicas. En cualquier caso, resulta dependiente de la densidad y de las constantes elásticas del medio. Así, a título de curiosidad, para una onda longitudinal en un sólido (una barra, por ejemplo), la velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{\varphi}{\rho}}$$

donde φ es una constante del sólido, llamada **módulo de elasticidad de Young,** y ρ es la densidad de ese sólido.

Las ondas elásticas transversales en una barra sólida, se propagan con una velocidad dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{\zeta}{\rho}}$$

donde ζ es otra constante para el sólido denominada *módulo de torsión.*

Dado que para un mismo sólido, los valores del módulo de Young y del módulo de torsión no son iguales, las velocidades de las ondas longitudinales y transversales que se propagan por ese sólido, es diferentes. En general, el valor del módulo de Young es mayor que el del módulo de torsión, por lo que, para el mismo sólido, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es superior a la de las transversales. Por ejemplo, para el cobre, los valores de φ y ζ son, respectivamente, $1{,}25.10^{11}$ Nm^{-2} y $0{,}46.10^{11}$ Nm^{-2}, por lo que para este metal, la velocidad de las ondas longitudinales es casi dos veces mayor que la de las transversales.

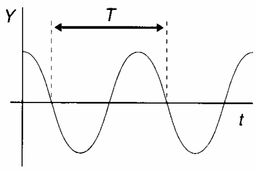
Aunque las ondas superficiales en la superficie de un líquido sean las más simples de observar, su tratamiento matemático es bastante complicado. En la superficie de un líquido actúan ciertas fuerzas. Entre ellas, la tensión superficial, que permiten los desplazamientos verticales de las moléculas cercanas a la superficie. La amplitud de estos desplazamientos verticales varía con la profundidad y, como es lógico, las moléculas del fondo del recipiente no los experimentan.

La velocidad con que se propagan estas ondas superficiales es:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\xi}{\rho\lambda}}$$

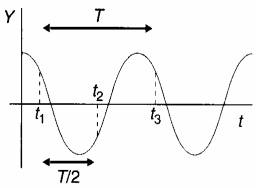
donde λ es la longitud de onda y ξ es la tensión superficial.

El aspecto más importante de esta ecuación (que no ha aparecido en los casos anteriores) es que **la velocidad de propagación depende de la longitud de la onda.** Como sabemos, la longitud de onda está relacionada con la frecuencia. Por lo tanto, la velocidad dada por esta ecuación depende de la frecuencia. Cuando sucede esto (la velocidad de propagación de una onda en un medio depende de la frecuencia) decimos que hay dispersión o que el medio es dispersivo.



Los estados de vibración de una partícula se repiten en el tiempo con un período *T*.

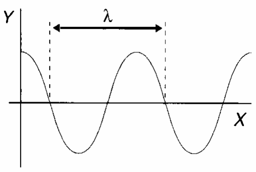
De este modo, si una onda que es resultante de la superposición de varias (como sucede, por ejemplo con la luz blanca) y penetra en un medio dispersivo, se produce una dispersión debida a que cada componente se propaga con diferente velocidad. Este fenómenos aparece con frecuencia en la propagación de las ondas electromagnéticas a través de la materia y es el que explica la producción del arco iris o el color azul del cielo (fenómeno conocido como *scátering de Thomson*)



Los estados de vibración en los instantes t_1 y t_3 están en fase y a su vez en oposición de fase al del instante t_2.

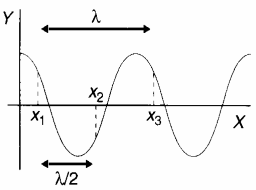
4. ECUACIÓN DE LAS ONDAS ARMÓNICAS (o función de Onda).

Ya hemos comentado con anterioridad qué es una onda armónica. Por otra parte, según el **teorema de Fourier**, cualquier movimiento periódico se puede expresar como una superposición de movimientos armónicos simples, y por lo tanto, todo movimiento ondulatorio periódico se puede expresar como una superposición de movimientos ondulatorios armónicos. Este teorema justifica el que consideremos sólo ondas armónicas, sin perder, por ello, generalidad.



Los estados de vibración de las partículas se repiten a distancia con un período λ.

Describir matemáticamente el movimiento ondulatorio, requiere encontrar una ecuación que nos permita conocer, en cada punto, el valor de la perturbación introducida. Para encontrarla, vamos a volver a considerar el caso de las ondas armónicas producidas en una cuerda y que se propagan a una velocidad v. Esto supone admitir que cada punto de la cuerda describe un MAS; por lo que nos interesa poder determinar el estado de perturbación que tendrá cada punto P del entorno del foco de perturbación en cualquier instante.



Los estados de vibración de las partículas x_1 y x_3 están en fase y a su vez en oposición de fase con el de la partícula x_2.

La perturbación tardará en llegar a P un tiempo t′ = x/v que dependerá de la velocidad de propagación (v) y de la distancia al punto P (x). Lo que sí sabemos es que si el foco tiene una perturbación tipo MAS, el punto P acabará teniendo la misma perturbación MAS sólo que t′ segundos más tarde. Es decir, que para un punto cualquiera P, tendremos que su estado de vibración, yP(t), será idéntico al estado que tenía el foco en el instante t-t′. Esto es:

$$y_P(t) = y_0(t-t')$$

Ya que estamos suponiendo que la perturbación que se propaga es de tipo MAS, tendremos

$$y_P(t) = Asen\left[\omega(t-t')\right] = y_0(t-t') = Asen\left[\omega(t-\frac{x}{v})\right]$$

Si la perturbación se desplazara en el sentido negativo de las X tendríamos de la misma forma $y_P(t) = y_0(t-t')$ pero la expresión final, sería

$$y_P(t) = Asen\left[\omega(t-t')\right] = Asen\left[\omega(t+\frac{x}{v})\right]$$

La expresión anterior nos da el estado de perturbación de cualquier punto en cualquier momento, por lo tanto, podemos escribir:

$$y\ (x,t) = Asen\left[\omega(t-\frac{x}{v})\right]$$

que recibe el nombre de **ECUACIÓN DE UNA ONDA ARMÓNICA**, y en ellas se mantiene constante la amplitud. No todas las ondas son armónicas, pero sí todas las armónicas son, evidentemente, ondas. Nuestro estudio se centrará sólo en las que sí lo son.

La particularidad más importante de la expresión anterior es que es **doblemente periódica**. En efecto, basta observar la ecuación para percatarse de que se trata de una función de dos variables. Así, si se mantiene fija la variable x, es decir, si consideramos un punto determinado de la cuerda, la ecuación nos indica cómo varía la posición de ese punto con el tiempo. Si por el contrario, lo que fijamos es la variable t, la ecuación nos proporciona la posición, en un instante dado, de todos los puntos los puntos de la cuerda.

4.1. SOBRE LA DOBLE PERIODICIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO ARMÓNICO.

Es ésta una de sus características principales.
En efecto. Sabemos que la función seno es una función periódica. Al estudiar el MAS, como la posición o elongación sólo dependía del tiempo, existía un periodo temporal, T. En este caso, hemos visto que el valor de la perturbación depende del instante, pero también del punto en que se analice la perturbación. Por lo tanto, habrá un segundo periodo ESPACIAL, λ, que se denomina longitud de onda. La longitud de onda, representa, por tanto, la distancia recorrida por la perturbación en un periodo T, es decir: $\lambda = v.T$.

El significado físico de la longitud de onda es muy similar al del periodo temporal T. Sabíamos que el periodo T era el tiempo que transcurre para que se alcance de nuevo las mismas condiciones de movimiento ("el mismo estado de movimiento"). En nuestro caso, el periodo T representa el tiempo que ha de transcurrir para que un punto repita el mismo estado de perturbación. Es evidente que en un tiempo T, el valor de la perturbación se habrá trasladado una distancia igual a la longitud de onda. Por lo tanto, DOS PUNTOS DISTANCIADOS UNA LONGITUD DE ONDA POSEEN EL MISMO ESTADO DE PERTURBACIÓN. Es decir, la λ juega el papel de un periodo espacial, tal que todos los que se encuentren separados por esa distancia λ tienen el mismo valor de perturbación.

Dicho de otro modo: $y(x,t) = y(x+\lambda,t) = y(x+2\lambda,t)$

La amplitud, A, el periodo T y la longitud de onda, λ, son parámetros constantes y característicos de la onda, de ahí que la ecuación del movimiento ondulatorio, suela escribirse, también de otra forma:

$$y(x,t) = Asen\left[\omega(t-\frac{x}{v})\right] = Asen\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{vT})\right] = Asen\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})\right]$$

$$y(x,t) = Asen\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = Asen(\omega t - kx)$$

es decir:

$$\boxed{y = A\ sen(\omega t - kx)}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ recibe el nombre de **número de ondas**.

Q6. Escribir la ecuación de una onda que se propaga por una cuerda, sabiendo que la amplitud es 2 cm, la velocidad de propagación 2 m/s y el periodo 0,1 s.

Q7. La ecuación de ondas que corresponde a una onda que viaja por una cuerda es de la forma:

$$y(x,t) = 0{,}03\ sen\ 2(x-0{,}1t)$$

Determinar las magnitudes características de la onda (λ,ω,T y f)

Como en el caso del MAS, en ocasiones, a una onda puede exigírsele unas condiciones iniciales diferentes a las hasta aquí prefijadas:

"Considerar una onda cuyas características son A = 2 cm; v = 2 m/s; T = 0,1 s. En el instante inicial, el punto cuya abcisa es nula, tiene una elongación de 1cm. ¿Cuál es la ecuación para esta onda?"

En un principio, prescindiendo de la condición impuesta, la ecuación general del movimiento ondulatorio no satisface por completo las premisas iniciales, de ahí que (como en el MAS) haga falta agregar una nueva constate, δ, para que la ecuación recoja la situación para t = 0. Procediendo de igual modo a como se hizo en el MAS, resulta que en este caso, δ ha de ser igual a 0,52 rad.

De esta forma, un modo más general de escribir la ecuación del movimiento ondulatorio, sería del modo:

$$\mathbf{y = A\ sen\ (\omega t - kx + \delta)}$$

OTRO CASO.

"La ecuación de una onda que viaja por una cuerda es

$$y = 0{,}02\ sen\ 10\pi\ (x - 2t).$$

A) Determinar la diferencia de fase que habrá entre dos puntos separados una distancia de 20 cm; B) Calcula la distancia que separa dos puntos de la cuerda si la diferencia de fase entre ellos es π radianes."

Si x1 y x2 son los puntos que se indican en el apartado A), para cada uno de ellos se podrá escribir que:

$$y = 0{,}02\ sen\ 10\pi(x1 - 2t)$$
$$y' = 0{,}02\ sen\ 10\pi\ (x2 - 2t)$$

La diferencia de fase entre ellos será:

$$10\ \pi(x1 - 2t) - 10\pi(x2 - 2t) = 10\ \pi(x1 - x2)$$

Si los puntos están separados 20 cm se tendrá que $10\pi(0,2) = 2\pi$ rad.
Cuando la diferencia de fase entre dos puntos es 2π decimos que los puntos están en fase y su estado de vibración es el mismo, ya que al ser periódica la función seno, y su periodo 2π, la elongación es la misma: y = y' (HACER EL APARTADO B. Sol.: 0,1 m)

OTRAS EXPRESIONES PARA LA ECUACIÓN DE ONDA.

Es frecuente encontrarse en los libros expresiones para la función de ondas que no responden a la que ya conocemos. Es el caso de expresiones en las que hallamos la función coseno, o una constante dentro del argumento del seno. Estas ecuaciones, son igualmente válidas y representan una onda armónica.

La razón por la que se elige la función seno o coseno para representar la ecuación de ondas depende de las condiciones iniciales que se establezcan, y por el mismo motivo podemos hallar una constante en el argumento del seno o del coseno.
Con todo, conviene recordar que relaciones trigonométricas entre coseno y seno:

$$sen(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha = -sen(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

Del mismo modo, en ocasiones la ecuación del movimiento ondulatorio aparece de la forma

$$y = A\ sen\ (kx - \omega t)$$

basta hacer un pequeño estudio para deducir las mismas características anteriores.

Q8. Una onda armónica se propaga con una velocidad de 3 m/s. Su frecuencia es 2 Hz y la amplitud 5 cm. Un punto que dista 10 cm del origen (foco) tiene una elongación nula en el instante inicial. Hallar su ecuación.

Q9. Una onda se mueve hacia la derecha a lo largo de una cuerda con una velocidad de 5 m/s. Su frecuencia es de 60 Hz y su amplitud 0,2 m. A) Encontrar una función de onda adecuada para esta onda; B) ¿podrías hallar otra función diferente que describa este tipo de onda? ¿Cómo?

Q10. La ecuación de cierta onda es

$$\psi = 10\ sen\ 2\pi(2x - 100t)$$

(SI). Hallar la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, y la velocidad de propagación de la onda.

Q11. La ecuación de una onda plana es y = 1,5 cos π (0,55x - 90t) (cgs). Determinar la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la velocidad de propagación de esta onda.

Q12. En el centro de una piscina circular de 10 m de radio, dejamos caer una piedra que origina una onda sinusoidal en la superficie del agua. La longitud de onda de este movimiento es de 0,75 m y la onda tarda 10 s en llegar a la orilla. Calcula: A) el periodo y la frecuencia; B) la elongación máxima, sabiendo que al cabo de 0,25 s de producirse la perturbación, la elongación en el centro de la piscina es de 4 cm. C) Elongación de un punto a 6 cm del foco al cabo de 12 s; D) Velocidad de ese punto en ese momento.

Q13. (DE SELECTIVIDAD. Año 1984)

Una onda está expresada por la ecuación $Y = 2\cos 2\pi\left[\frac{t}{4} + \frac{x}{160}\right]$ (CGS).

Determinar:

a) El carácter de la onda y su velocidad de propagación.

c) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 segundos.

d) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 120 cm en la dirección de avance de la onda.

Q14. La ecuación de una onda es $y(x,t) = 6.10^{-6}\cos(1900t + 5.72x)$ (CGS). Calcula la frecuencia, longitud de onda y la velocidad y sentido de propagación de la onda.

Q15. Una onda armónica de 20 cm de amplitud y 0,5 s de periodo se propaga con una velocidad de 24 m/s en el sentido positivo del eje OX. Si para el instante t = 0,125 s es nula la elongación de un punto situado en x = 4 m, hallar la ecuación de esta onda.

Q16. (DE SELECTIVIDAD) Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de desplazamiento máximo y el de elongación nula de un punto de la cuerda es 0,17 s. Calcula: A) periodo y frecuencia de la onda; B) velocidad de propagación de la onda si su longitud de onda es de 1,4 m.

Q17. Comprobar que la ecuación y = 0.2 sen 24π(x - 5t) corresponde a una onda de 0,2 m de amplitud y 60 Hz de frecuencia que se mueve en el sentido positivo del eje OX con una velocidad de 5 m/s. Encontrar otra expresión distinta que describa a esta misma onda.

UNA BREVE CONSIDERACIÓN SOBRE LAS ONDAS y SU ECUACIÓN.

La ecuación que aquí se ha deducido para las ondas es una "ecuación trigonométrica", viendo en ello una manera de simplificar nuestro estudio y calificándolas de armónicas. En realidad, las ecuaciones de onda suelen ser a veces, mucho más complejas y no tienen por qué ser "de tipo trigonométrico". En general, la ecuación de las ondas unidireccionales son del tipo y(x,t)= F(x +/- vt), donde F puede ser una función matemática cualquiera. Precisamente, según cuál sea esa F "la forma de la onda" será diferente. En los casos analizados, F ha sido una función seno ó coseno, de ahí la forma típica de ondas que hemos venido contemplando y por tanto, de la doble periodicidad de la que hemos estado hablando. Estrictamente, la ecuación y(x,t) = F(x +/- vt) es solución de una ecuación diferencial de segundo orden que no viene al caso comentar aquí, donde la fase (x +/- vt) nos informa de la velocidad de propagación de la onda y del sentido en que ésta se desplaza. Otra salvedad a tener presente es que aquí sólo hemos considerado "movimientos ondulatorios unidimensionales", que como puede entenderse fácilmente, no es más que un caso particular de los que pueden existir.

5. ENERGÍA ASOCIADA AL MOVIMIENTO ONDULATORIO.

Desde casi el comienzo de este tema se comentaba que, como característica a destacar del movimiento ondulatorio, en éste se transmitía energía sin transporte de materia.

Si como venimos haciendo, consideramos ondas armónicas, cada partícula del medio describe un MAS y comunica a sus vecinas ese movimiento. Por lo tanto, una partícula que así vibra poseerá tanto energía cinética como energía potencial, ya que la fuerza que provoca el MAS es una fuerza elástica del tipo F = -kx, que es una fuerza conservativa. Por tanto, cada partícula, a una determinada distancia del foco, vibrará con valores de energía propio a los de un MAS, pues es éste tipo de movimiento el que se transmite en las ondas armónicas.

Sin embargo, nuestro problema es determinar cuánta energía transporta o desplaza una onda. En este punto, hay que tener presente que cuando un punto del espacio comienza a vibrar, se convierte en foco emisor de energía que se va propagando con el frente de onda. Por lo tanto, el foco emitirá o irradiará energía en una cierta cantidad por unidad de tiempo (con una cierta potencia) dependiendo de su amplitud de oscilación y/o de su frecuencia. Como la energía "no se puede perder", avanzará con el frente de onda y se repartirá entre todas las partículas que componen el frente de onda. Esto quiere decir que conforme nos alejamos del foco, el frente de onda será cada vez más grande mientras que la energía a repartir debe ser la misma, por ello, las partículas de ese frente vibrarán cada vez con menos energía y repartirán cada vez menos energía. Es decir, que la energía transportada por la onda decaerá con la distancia. A este fenómeno se lo denomina **atenuación de la onda**.

Una magnitud adecuada para representar la rapidez con que se transfiere la energía es la denominada **INTENSIDAD DE ONDA**. La intensidad de onda en un punto, es la energía que atraviesa por unidad de tiempo, una superficie unidad colocada en ese punto, perpendicularmente a la dirección de propagación. Suele representarse por la letra I, y su unidad en el S.I. es el W/m^2.

Si admitimos que no hay pérdidas energéticas (por rozamiento[2], por ejemplo) si el foco emisor emite una cierta cantidad de energía en un determinado tiempo (esto es, emite con una determinada

[2]Una segunda causa por la que la intensidad de una onda disminuye a medida que se propaga es la pérdida energética ocasionada por rozamientos, viscosidad, etc. Esto supone que parte de la energía emitida por el foco va siendo absorbida por el medio y por tanto, la onda va debilitándose. A tal debilitamiento de la onda se le conoce con el nombre de ABSORCIÓN.

potencia, Pe), a cierta distancia, r, de ese foco (para, por ejemplo, una onda esférica propagada en un medio homogéneo e isótropo) la Intensidad de onda vendrá dada por:

$$I = \frac{P_e}{4\pi r^2}$$

siendo $4\pi r^2$ la superficie de la esfera de radio r centrada en el foco.

Si la distancia es r', la intensidad de la onda será: $I = \frac{P_e}{4\pi r'^2}$

Como puede verse, la intensidad de la onda disminuye con el cuadrado de la distancia al foco emisor. Esto es lo que antes hemos comentado que se conoce como *atenuación de la onda*.

Ya que la Intensidad depende del cuadrado de la amplitud (por definición), podemos concluir que la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor. Por lo tanto, dos puntos situados a sendas distancias r1 y r2 del centro emisor, tendrán una amplitud de oscilación A1 y A2 tales que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Q18. Un foco sonoro emite con una potencia de 20 W. Calcula la intensidad sonora en dos puntos situados a 10 y 20 m respectivamente del foco emisor. ¿Cuál será la relación que existe entre las amplitudes de la onda sonora en esos puntos?

Q19. Un altavoz emite el sonido con una potencia de 40 W. Determina A) La intensidad sonora a 10 m de distancia del altavoz; B) Expresa el nivel que corresponde a esa intensidad sonora en decibelios[3]

1) Hacemos oscilar el extremo de una cuerda con un mas de forma que realiza 40 oscilaciones en 10 segundos, siendo la distancia entre las posiciones extremas de cada oscilación de 40 cm. La cuerda mide 6 metros y la perturbación tarda 0,5 segundos en ir de un extremo al otro.
   a) Escribe la ecuación de la onda, suponiendo que en el instante inicial el extremo de la cuerda sobre el que actuamos está en su posición de equilibrio.
   b) Calcula la distancia entre dos puntos consecutivos que están en fase. Ídem para dos puntos consecutivos que estén en oposición de fase.
   c) Calcula la velocidad de un punto de la cuerda que se encuentra a 4 metros del extremo 6 segundos después de que se iniciara la perturbación.
   d) ¿Cómo podríamos conseguir que disminuyera la longitud de onda de la cuerda?

   Solución: y=0,2 sen((2π/3)x-8πt);3 m; 1,5 m;-2,5 m/s; aumentando f y disminuyendo v
2) Una onda armónica se propaga con una velocidad de 3 m/s. Su frecuencia es 2 Hz y la amplitud 5 cm. Un punto que dista 10 cm del origen (foco) tiene una elongación nula en el instante inicial. Hallar su ecuación.

   Solución: y=0,05sen ((4π/3)x-4πt-(4π/30))
3) Una onda se mueve hacia la derecha a lo largo de una cuerda con una velocidad de 5 m/s. Su frecuencia es de 60 Hz y su amplitud 0,2 m. A) Encontrar una función de onda adecuada para esta onda; B) ¿podrías hallar otra función diferente que describa este tipo de onda? ¿Cómo?

   Solución: y=0,2sen(24πx-120πt); y=-0,2sen(120πt-24πx)
4) La ecuación de cierta onda es

   Y = 10 sen 2π(2x - 100t) (SI).

   Hallar la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, y la velocidad de propagación de la onda.

   Solución: 10 m; 0,5 m; 100 Hz; 50 m/s
5) La ecuación de una onda plana es y = 1,5 cos π (0,55x - 90t) (CGS). Determinar la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la velocidad de propagación de esta onda.

   Solución: 3,64 cm; 45 Hz ; 0,022 s; 163,64 cm/s

[3] La intensidad sonora (variable, también con la frecuencia) posee un nivel a partir del cual produce dolor. En ocasiones, se habla del *nivel de intensidad (B)*. Su unidad es el decibelio, que se define como

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde I es el valor de la intensidad de un sonido e I_0 el valor que corresponde a un nivel arbitrario de referencia.
Para el aire $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

6) En el centro de una piscina circular de 10 m de radio, dejamos caer una piedra que origina una onda sinusoidal en la superficie del agua. La longitud de onda de este movimiento es de 0,75 m y la onda tarda 10 s en llegar a la orilla. Calcula: A) el periodo y la frecuencia; B) la elongación máxima, sabiendo que al cabo de 0,25 s de producirse la perturbación, la elongación en el centro de la piscina es de 4 cm.

Solución: a) 0,75 s; 4/3 Hz; b) 4,62 cm

7) Una onda está expresada por la ecuación $Y = 2\cos 2\pi\left[\frac{t}{4}+\frac{x}{160}\right]$ (CGS).

Determinar:
a) El carácter de la onda.
b) Su velocidad de propagación.
c) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 segundos.
d) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 120 cm en la dirección de avance de la onda.

Solución: Onda armónica; se desplaza en el eje X hacia la parte negativa; 40 cm/s; π rad; $3\pi/2$ rad

8) La ecuación de una onda es $y(x,t) = 6.10^{-6}\cos(1900t + 5.72x)$ (CGS). Calcula la frecuencia, longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

Solución: 302,4 Hz; 1,10 cm; 332,17 cm/s

9) Una onda de 500 ciclos/s (cps) tiene una velocidad de fase de 350 m/s. ¿Qué distancia hay entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de 60º? ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que ocurren en cierto punto con un intervalo de 1 ms)

Solución: 0,12 m; π rad

10) Una onda armónica de 20 cm de amplitud y 0,5 s de periodo se propaga con una velocidad de 24 m/s en el sentido positivo del eje OX. Si para el instante t = 0,125 s es nula la elongación de un punto situado en x = 4 m, hallar la ecuación de esta onda.

Solución: $y=0{,}2\ \text{sen}\ ((\pi/6)x-4\pi t-0{,}52)$

11) Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de desplazamiento máximo y el de elongación nula de un punto de la cuerda es 0,17 s. Calcula: A) periodo y frecuencia de la onda; B) velocidad de propagación de la onda si su longitud de onda es de 1,4 m.

Solución: a) 0,68 s; 1,47 Hz; b) 2,06 m/s

12) Comprobar que la ecuación $y = 0.2\ \text{sen}\ 24\pi(x - 5t)$ corresponde a una onda de 0,2 m de amplitud y 60 Hz de frecuencia que se mueve en el sentido positivo del eje OX con una velocidad de 5 m/s. Encontrar otra expresión distinta que describa a esta misma onda.

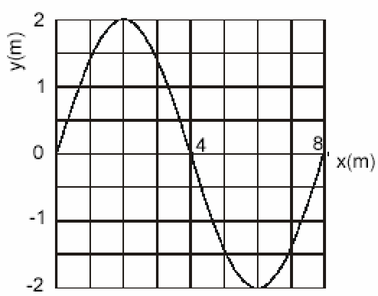
Solución: $y = 0.2\cos(24\pi x-120\pi t-\pi/2)$

13) Una onda sonora plana, sin amortiguamiento, se propaga en un medio gaseoso con velocidad v=350 m/s en la dirección OX; la frecuencia d la onda armónica es de 12 kHz y la amplitud de la oscilación de la molécula del medio $3\cdot10^{-5}$ metros. Si la elongación en el instante inicial es de $1{,}5\cdot10^{-5}$ metros en el punto (0,0,0); a) calcular la longitud de onda; b) deducir la ecuación de la onda sonora.

Solución: $2{,}9\cdot10^{-2}$ m; $y=3\cdot10^{-5}\ \text{sen}\ (24\cdot10^{3}\pi t-216{,}67x+\pi/2)$ m

De Selectividad

14) En la figura siguiente se representa una onda transversal que viaja en la dirección de las X positivas. Sabiendo que la velocidad de propagación es 4 m/s, escribe la ecuación que representa la mencionada onda. Determina en función del tiempo la velocidad de vibración del punto situado en x=4 metros, así como su valor máximo.



Solución: $y=2\text{sen}(\pi t-\pi x/4)$ m; $v_v=2\pi\cos(\pi t-\pi x/4)$ m/s; 2π m/s

15) Una onda se propaga en el sentido negativo de eje X, siendo 20 cm su longitud de onda. El foco emisor vibra con una frecuencia de 25 Hz, una amplitud de 3 cm y fase inicial nula. Determina: a) la velocidad con que se propaga la onda; b) la ecuación de onda; c) el instante en que un punto que se encuentra a 2,5 cm del origen alcanza, por primera vez, una velocidad nula.

Solución: 5m/s; $y=0{,}03$ sen $(50\pi t+10\pi x)$; 0,005 s

16) Una onda armónica cuya frecuencia es 50 Hz se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ radianes, determina: a) el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda; b) en un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre dos desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 segundos?

Solución: a) 0,02 s; 80 cm; 40 m/s; b) π radianes

17) Una onda plana viene dada por la ecuación: $y = 2 \cos (100t - 5x)$ SI; donde x e y son coordenadas cartesianas. A) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal y cuál es su sentido de propagación. B) Calcular la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda.

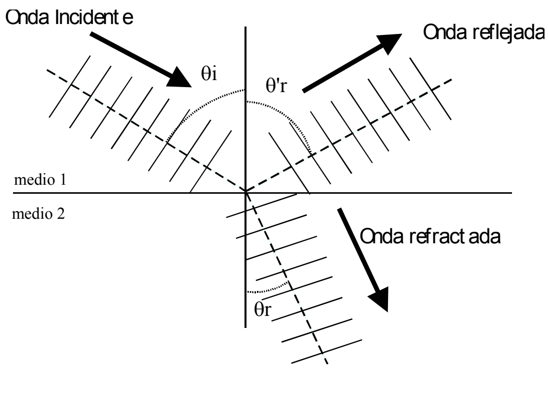
Solución: Transversal, dirección eje X hacia la parte positiva; $50/\pi$ Hz; $\pi/50$ s; $2\pi/5$ m; 5 m^{-1}; 20 m/s

18) A lo largo de una cuerda que coincide con el eje de coordenadas OX, se produce una onda armónica transversal, de frecuencia 300 Hz, que se transmite con una velocidad de 8 m/s en el sentido positivo de dicho eje. Si el desplazamiento máximo de cualquier punto de la cuerda es de 2,5 mm, se pide: a) la longitud de onda y expresar la ecuación de la onda; b) velocidad del punto de la cuerda situado en x=0 en el instante t=2s.

Solución: a) 0,027 m; $y=2{,}5\cdot 10^{-3}$sen$(600\pi t-300\pi x/4)$ m; b) 4,71 m/s

6. PROPAGACIÓN DE ONDAS. REFLEXIÓN y REFRACCIÓN.

Como ya se ha dicho, la velocidad de propagación de las ondas, depende de las características del medio.

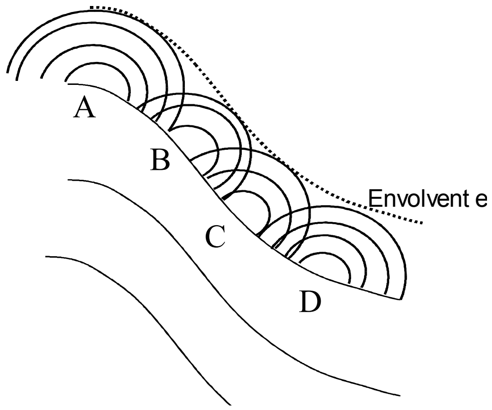


Este hecho, trae como consecuencia, que cuando una onda (onda incidente) alcanza la superficie de separación (interfase) entre dos medios en los que se propaga con diferente velocidad, se produzcan fenómenos de **reflexión** y de **refracción**.

* La **ONDA REFLEJADA** es la que, tras experimentar un cambio en su dirección, se propaga en el mismo medio en que se propagaba la onda incidente.

* La **ONDA REFRACTADA** es la que se propaga en el segundo medio, habiendo sufrido también un cambio en su dirección respecto de la de incidencia.

El físico danés *Christian Huygens* (1629-1695), a finales del siglo XVII, propuso un mecanismo que explicaba satisfactoriamente la propagación de las ondas mecánicas. En el caso de las ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío, la construcción de Huygens precisa una revisión, que fue llevada a cabo a finales del siglo pasado por el alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887).



La idea básica del mecanismo propuesto por Huygens se acostumbra a enunciar en forma de principio: **cada punto de un frente de ondas, se convierte en un foco emisor de ondas secundarias, cuya envolvente es un nuevo frente de ondas.** (La envolvente de una familia de curvas, es una curva tangente a todas ellas).

Conviene indicar que, por aplicación del principio de Huygens, se podrían producir nuevos frentes de onda en sentido contrario al de avance de la perturbación. Fue también Kirchhoff quien eliminó esta dificultad al establecer que las "ondas de retroceso" no existían al poseer energía nula. La demostración de Kirchhoff de este resultado y la que permite la ampliación del principio de Huygens a ondas electromagnéticas, es muy complicada y no entraremos en ella.

Como ejercicio de aplicación utilizaremos el principio de Huygens para deducir las leyes de la reflexión y de la refracción para una onda plana cuando la superficie de separación entre los dos medios, también es plana. (También siguen siendo válidas si estas premisas no se cumplen)

Estas leyes son:

** Las direcciones de la onda incidente, de la reflejada y de la refractada, están en un mismo plano perpendicular a la superficie de separación entre los dos medios.*

** El ángulo de incidencia es igual al de reflexión ($\theta_i = \theta'_r$). El ángulo de incidencia está determinado por la dirección de la onda incidente y una dirección perpendicular a la superficie de separación en el punto de incidencia a la que se la denomina **normal**. De modo equivalente, se determinan los ángulos de reflexión y refracción.*

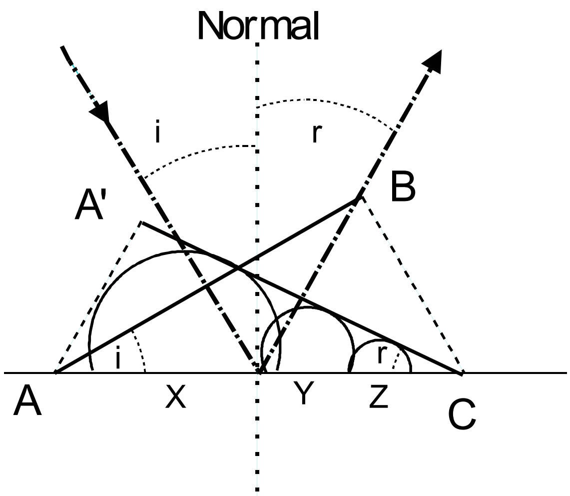
** El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el de refracción es constante. Esa constante es igual al cociente entre la velocidad de propagación de la onda en el medio en que viaja la onda incidente y la velocidad de propagación en el medio en que viaja la onda refractada. A esa constante se la conoce como **índice de refracción relativo** del medio de refracción respecto del medio de incidencia.*

Esta última ley, conocida como ley de Snell (o de Snell-Descartes) establece que:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{sen\,\theta_i}{sen\,\theta r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

de donde resulta claro que si v1 > v2 (n21 > 1) será sen θi > sen θr, es decir θi > θr, lo que significa que el rayo refractado (la dirección de la onda refractada) se acerca a la normal. Si sucede lo contrario, v1 < v2 (n21 < 1), el rayo refractado se aleja de la normal.

Estas leyes son conocidas desde muy antiguo, sin embargo, vamos a justificarlas utilizando el modelo de Huygens.



La primera ley puede justificarse simplemente por simetría, ya que el rayo incidente y la normal a la superficie determinan un plano, y no hay ninguna razón para que los rayos reflejados (y refractados) se aparten de ese plano.

La segunda ley no es difícil de justificar.

Supongamos un frente de onda AB plano (ver figura) que llega con cierta inclinación y a la superficie de separación de los dos medios. Cuando el punto A del frente de onda alcanza la superficie de separación, el punto B dista un segmento BC de la misma. En ese instante, el punto alcanzado por A se convierte en foco emisor de nuevas ondas. A medida que transcurre el tiempo, sucede los mismo con los puntos X, Y y Z. De esta manera, cuando el punto B llegue a la superficie de separación, las ondas emitidas por A, X, Y, Z, habrán originado un nuevo frente de ondas, envolvente de las ondas secundarias, el A'C, que constituye la onda reflejada.

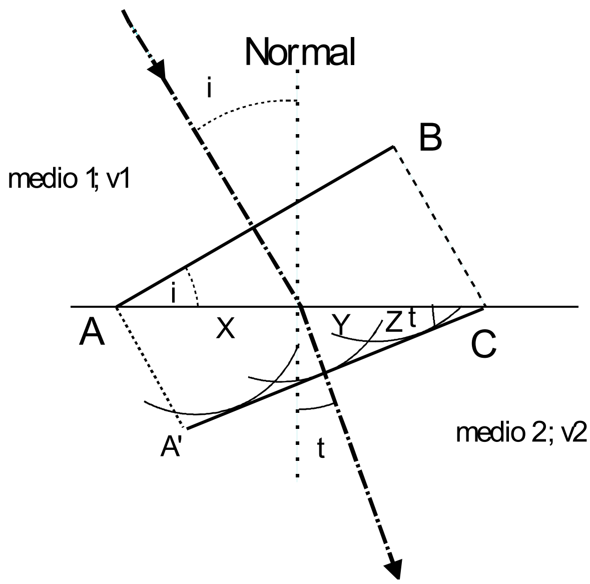
Por simple geometría, se aprecia que

$$\text{sen } i = BC/AC; \text{ sen } r = AA'/AC$$

Ya que la onda no cambia de medio EL MODULO DE LA VELOCIDAD NO SE MODIFICA, ya que la velocidad de propagación depende de las características del medio y por consiguiente, BC = AA', ya que se emplea el mismo tiempo en recorrerlas. Por lo tanto,

$$i = r.$$

La ley de Snell puede justificarse de modo similar, pero teniendo presente que ahora, la velocidad de la onda cambia al penetrar en el segundo medio (ver esta segunda figura).



Cuando el punto A es alcanzado por el frente de ondas, se comportará como foco emisor de ondas secundarias, en este caso hacia el segundo medio, y lo mismo sucederá con los puntos X,Y,Z a medida que son alcanzados por la onda.

Durante el tiempo que emplea B en llegar hasta C, se ha generado en el segundo medio un nuevo frente de ondas, el A'C, como se ve en la figura. De ella se deduce que:

$$\text{sen } i = BC/AC$$
$$\text{sen } t = AA'/AC$$

Si v1 y v2 son las respectivas velocidades de propagación en cada uno de los medios, se tendrá que:

$$BC = v1.t$$
$$AA' = v2.t$$

siendo t el tiempo que emplea la onda en pasar de A a A', idéntico al que emplea en pasar de B a C. Sustituyendo:

sen i = v1.t/AC
sen t = v2.t/AC

> **Q21.** En ocasiones decimos que el rayo refractado se acerca o se aleja de la normal. Señala en qué condiciones se acerca el rayo a la normal y en qué condiciones se aleja de ésta.
>
> **Q22.** Cuando el rayo refractado se aleja de la normal aparece el fenómeno conocido como *reflexión total* que se produce a partir de cierto ángulo conocido como **ángulo límite**. Calcula el ángulo límite para un rayo de luz que pase del vidrio (n = 1,5) al aire (n = 1). Analiza qué sucede con ángulos mayores o menores que el ángulo límite. ¿Conoces alguna aplicación práctica de este fenómeno? (Sol.: 41,81º)
>
> **Q23.** La velocidad de propagación de la luz en el agua es 0,75 c (siendo c la velocidad de propagación de la luz en el aire). Considera un recipiente de agua en el que se coloca un espejo en el fondo. Un rayo de luz penetra en el agua con una inclinación de 30º. Calcula la inclinación con que saldrá del agua tras reflejarse en el espejo del fondo. ¿Hay algún ángulo de incidencia para el cual no emerge ningún rayo tras reflejarse en el espejo del fondo?

dividiendo:

$$\frac{seni}{sent}=\frac{v_1}{v_2}$$

que resulta ser la ley de Snell (expresada de otro modo).

Si utilizamos los índices de refracción absolutos (es decir, referidos a otro medio escogido como patrón): n = c/v (siendo c la velocidad en ese medio patrón), podemos expresar la ley anterior como:

$$\frac{seni}{sent}=\frac{n_2}{n_1}$$

El hecho de que la velocidad de propagación de la onda sea diferente en los dos medios mientras que **la frecuencia se mantiene constante** trae como consecuencia que la longitud de onda de la onda refractada es diferente de la de la onda incidente. Dada la relación entre la longitud de onda, velocidad de propagación y frecuencia de la onda

$$\lambda = v.T = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

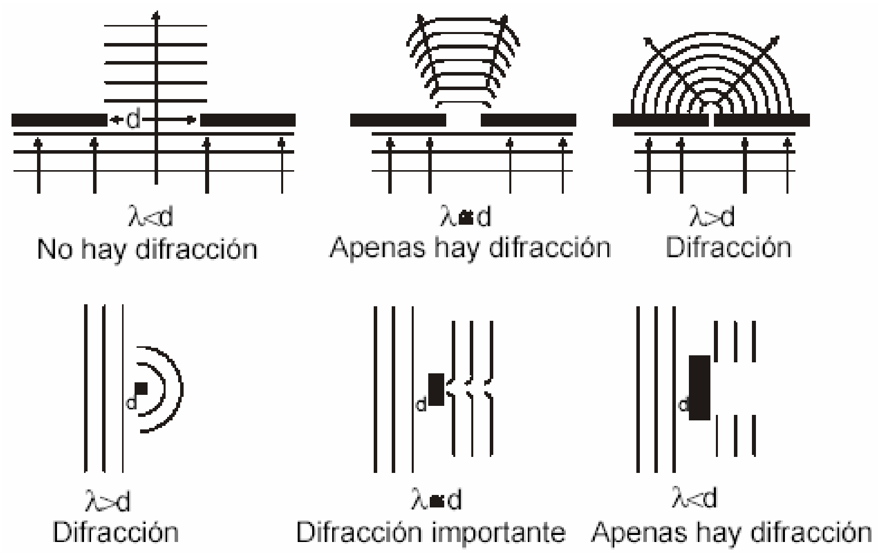
resulta claro que la longitud de onda es mayor en el medio en que se propaga la onda con mayor velocidad. Por otra parte, como ha de conservarse la energía transmitida por la onda, esa energía se debe repartir entre la onda reflejada y la refractada y como la energía en un movimiento ondulatorio depende del cuadrado de la amplitud, se comprende que las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y refractada sean diferentes. En algunos casos, por ejemplo en los espejos, es la onda reflejada la de mayor energía. En otros, por contra, la mayor parte de la energía la transporta la onda refractada. Para conocer la relación entre las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y refractada es necesario conocer las características de cada caso, lo que nos permitirá establecer las llamadas condiciones de contorno.

7. FENÓMENOS DE DIFRACCIÓN.

¿Qué sucederá cuando una onda choca con una pared en la que se ha practicado una pequeña abertura? ¿Cómo se propaga la onda a partir de esa abertura?

Al realizar la experiencia con ondas planas, se aprecia que si la abertura es suficientemente grande, las ondas que la atraviesan apenas si se distorsionan. Sin embargo, conforme se va reduciendo el tamaño de la abertura (o del obstáculo), llega un momento en que el movimiento que se propaga tras ésta es diferente al que existía ANTES de atravesarla. Este hecho se hace aún más notable cuando el tamaño de orificio se acerca al de la longitud de onda.(ver figura) Este fenómeno se conoce con el nombre de **difracción**, y es de los más característicos del movimiento ondulatorio, tanto, que permite discernir si determinado fenómeno es o no de naturaleza ondulatoria (por ejemplo, experimentos con difracción de electrones para determinar su naturaleza ondulatoria).

Podemos definir la difracción como el fenómeno que se produce cuando en la propagación de una onda ésta encuentra un obstáculo o una abertura de tamaño comparable al de su longitud de onda.



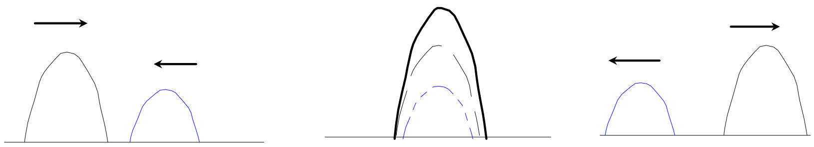
> *La difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda encuentra un obstáculo o una apertura al propagarse cuyo tamaño es comparable a su longitud de onda.*

Como vemos en la imagen, la distorsión aumenta a medida que se reducen las dimensiones de la abertura, siendo importante cuando la anchura de ésta se aproxima al valor de la longitud de onda. A este fenómeno se lo denomina difracción.

La aparente ausencia de difracción en la luz es en realidad un problema de tamaño: las longitudes de onda de la luz visible son del orden de 10^{-7} m y por lo tanto sólo aparecen figuras de difracción cuando los obstáculos tienen un tamaño comparable con esa longitud de onda. En efecto, y este hecho marca una limitación al tamaño de los objetos que podemos ver, tanto a simple vista como con el microscopio óptico. Así, si nos fijamos en el último esquema, vemos que cuando el objeto a ver (por un microscopio óptico, por ejemplo) es de mayor tamaño que la longitud de onda, ese objeto se nos hace visible (tercer caso del dibujo). En cambio, si ese objeto a ver por el microscopio es de un tamaño muy reducido en comparación con la longitud de onda, se nos hace totalmente invisible por la difracción de la propia luz que usamos. Es necesario, por tanto usar "otra luz" que tenga una longitud de onda menor que el propio objeto. Así nacieron los microscopios electrónicos, que aprovechan una "propiedad de los electrones" (su carácter ondulatorio) para poder ver los objetos.

8. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS. INTERFERENCIAS.

Aunque no se ha dicho, puede suponerse que un punto del espacio puede ser alcanzado al mismo tiempo, por dos o más movimientos ondulatorios diferentes producidos en distintos focos. En ese punto se superponen las perturbaciones que producirían en él cada uno de los movimientos ondulatorios. Se dice entonces que en ese punto se ha producido una interferencia. En este sentido, existe una propiedad muy importante de las ondas, conocida con el nombre de **PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN**. Es uno de los principios más importantes en el estudio del movimiento ondulatorio, por el cual, dos movimientos ondulatorios que se encuentran en un punto, se superponen dando lugar a otro nuevo, pero solamente en ese punto, continuando independientemente uno del otro.



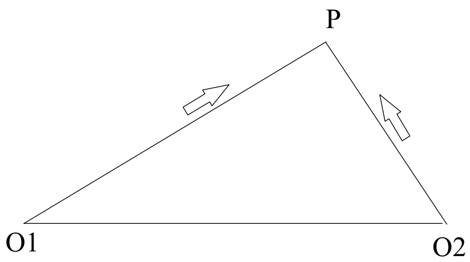
Aplicando este principio tenemos que la onda resultante se obtendrá (en cada instante) sumando, para cada punto, las elongaciones debidas a las ondas componentes.

Precisamente por el principio de superposición se puede analizar cualquier tipo de movimiento ondulatorio periódico. Fourier demostró que toda función periódica no sinusoidal puede obtenerse como suma o superposición de movimientos ondulatorios armónicos sinusoidales.

Este principio de superposición es similar al encontrado en otras situaciones similares ya estudiadas, como por ejemplo, la composición de movimientos. Conviene pensar, además, en lo característico de este principio: el hecho de que dos pulsos se crucen sin alterar su naturaleza es una propiedad fundamental de las ondas y caracterizan al movimiento ondulatorio. Pensemos en la enorme diferencia que existe entre este hecho y lo que sucede cuando chocan dos objetos: en ese caso desaparecen los movimientos originales.

La generalización del principio de superposición, constituye la esencia de las **INTERFERENCIAS.**

Para no complicar en exceso, supondremos dos ondas de igual frecuencia y amplitud generadas en focos independientes, y nos detendremos en observar los efectos de la superposición de estas ondas en un punto P situado a diferentes distancias de cada foco.



Estudiaremos analíticamente las condiciones que deben cumplir dos trenes de onda de igual frecuencia y amplitud, para que al interferir en un punto, se produzcan máximos y mínimos de interferencia.
(Ver figura)

Debido al primer movimiento, que se produce en O1 y sigue la trayectoria (que llamaremos x1) el punto P tiene un estado de vibración expresado por la ecuación

$$y_1 = Asen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}),$$

y por la misma razón, debido al movimiento iniciado en O2 y de camino x2:

$$y_2 = Asen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}).$$

Según el principio de superposición, el estado de P será[4]: $y = y_1 + y_2$

[4]recordar que sen a + sen b = 2 sen (a+b)/2.cos(a-b)/2

$$y = y_1 + y_2 = A\left[sen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}) + sen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda})\right] =$$

$$A\left[2sen\frac{2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}) + 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda})}{2}\cos\frac{2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}) - 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda})}{2}\right] =$$

$$2Asen\frac{2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_2}{\lambda}}{2}\cos\frac{2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_2}{\lambda}}{2} =$$

$$2A\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} sen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}) = A_0 sen2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda})$$

donde A_0 es la amplitud de la onda resultante en el punto del espacio en el que se produce la interferencia, y de valor

$$A_0 = 2A\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}$$

VAMOS A VER QUÉ CONDICIONES DEBEN DE CUMPLIR LOS VALORES X1 Y X2 EN ESTA EXPRESIÓN DE LA AMPLITUD PARA QUE EN P HAYA UN MÁXIMO O UN MÍNIMO.

A.- *HABRÁ UN MÁXIMO CUANDO LA AMPLITUD DE LA ONDA RESULTANTE SEA MÁXIMA*.

Como la amplitud es $A_0 = 2A\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}$, será máxima cuando el coseno tome valores +/-1; por lo tanto, tenemos que

$$\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = 0 + k\pi \Rightarrow x_2 - x_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$$

Por lo tanto, para **que haya un máximo de interferencia debe cumplirse que la diferencia de caminos recorridos por los dos movimientos sea igual a un número par de semilongitudes de onda**. (o, si se prefiere: un número entero de longitudes de onda). En estos puntos se dice que se produce una interferencia totalmente **CONSTRUCTIVA.**

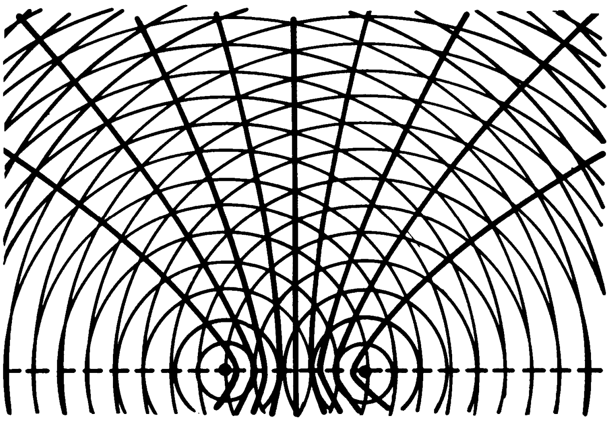
B.- *PARA QUE SE ANULEN LOS DOS MOVIMIENTOS* en el punto P, debe verificarse que

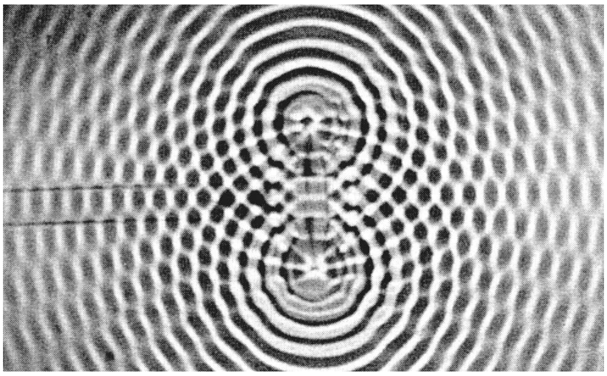
$$\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = \pi/2 + k\pi = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow x_2 - x_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Para que se anulen ambos trenes de onda en el punto P, la diferencia de caminos debe ser igual a un número impar de semilongitudes de onda. En estos casos, la interferencia es **DESTRUCTIVA**.

A los puntos en los que la amplitud de la onda resultante es nula, se les denomina **NODOS**, y las líneas que los unen, *líneas nodales*. Tales puntos NO se ven afectados por la propagación de los movimientos ondulatorios. Se encuentran "en estado estacionario".

Si analizamos detenidamente la Ecuación que nos el movimiento resultante de interferir dos movimientos ondulatorios en un punto cualquiera del medio, sacamos las siguientes conclusiones:





1) El periodo del movimiento resultante, es idéntico al de cada uno de los movimientos componentes.

2) La amplitud A0 del movimiento resultante es una función cosenoidal de la diferencia x2 - x1, de caminos recorridos.

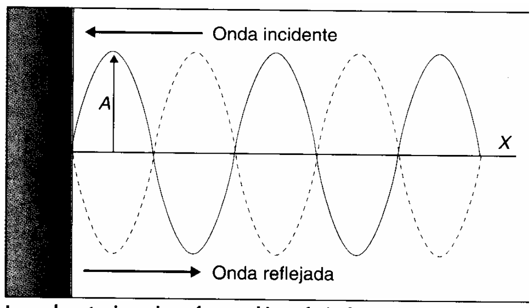
Precisamente, las condiciones de interferencia que hemos deducido, obedecen en realidad a ecuaciones de hipérbolas, que se hacen evidentes en una cubeta de ondas o en una representación de las mismas, como la que aquí se muestra.

Si los dos movimientos vibratorios de igual periodo y dirección que se superponen, **NO poseen la misma amplitud**, también existe interferencia, pero en los puntos de movimiento mínimo la amplitud no se anula como en el caso expuesto.

El fenómeno de interferencia es muy general. Se observa tanto en el dominio de las ondas mecánicas (ondas transversales en la superficie de un líquido o a lo largo de una cuerda, ondas sonoras en el aire, etc.) como en el dominio de las ondas luminosas y eléctricas. A partir de su estudio se pueden determinar las longitudes de onda.

9. ONDAS ESTACIONARIAS.

El fenómeno de interferencia de ondas presenta un interés especial cuando se superponen dos ondas de iguales características que se propagan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos. El resultado de esta situación puede constituir un ejemplo de las denominadas **ondas estacionarias**.



La onda estacionaria se forma al interferir dos ondas idénticas que se propagan en la misma dirección y sentidos contrarios.

Un ejemplo de esta situación se presenta cuando disponemos de una cuerda, fija por un extremo, y por el otro avanza un tren de ondas armónico. Cuando el tren de ondas llega al extremo fijo, se "refleja", y se propaga en sentido contrario, dirigiéndose ahora hacia el extremo libre. En realidad, las ondas estacionarias suelen estar asociadas a fenómenos de reflexión o rebote de una onda que avanza hasta llegar a un límite de separación con otro medio de características diferentes.

Al observar esta figura que reproduce el fenómeno, se observa que:

- *unos puntos sobre la horizontal permanecen siempre en reposo.*
- *los demás puntos sobre la cuerda presentan un movimiento oscilatorio armónico.*
- *la situación de la cuerda permanece inalterable con el tiempo.*

Nos interesa determinar cómo será la interferencia.

Sean las ecuaciones de las ondas incidentes y reflejadas las siguientes:

$$\psi_1 = A_1 sen\left[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})\right]$$

$$\psi_2 = A_2 sen\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})\right]$$

Dado que suponemos que en el extremo fijo (llamémosle punto O) la onda resultante NO podrá vibrar, y teniendo presente el principio de superposición, se deberá cumplir que:

$$\psi(x=0, t) = \psi_1(x=0, t) + \psi_2(x=0, t)$$

Haciendo x = 0 en las ecuaciones anteriores y sumando, se tiene que

$$\psi_{(x=0,t)} = A_1 sen\left[2\pi\frac{t}{T}\right] + A_2 sen\left[2\pi\frac{t}{T}\right] = 0 \Rightarrow (A_1 + A_2) sen(2\pi\frac{t}{T}) = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -A_2$$

lo que nos indica que la onda reflejada (en un límite fijo) tiene igual amplitud que la onda incidente, pero de sentido contrario. Es decir, está desfasada con la incidente, π rad. Por lo tanto, la onda resultante será[5]:

$$\psi = A\left\{sen\left[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) - sen 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})\right]\right\}$$

$$\psi = 2A sen(2\pi\frac{x}{\lambda})\cos(2\pi\frac{t}{T})$$

La última expresión es la correspondiente a la ecuación de la onda que se obtiene en este caso de interferencia. En ella observamos que no es una ecuación de ondas "ordinaria". En efecto, si fijamos un punto a una distancia x0 observamos que la magnitud ψ oscila con amplitud

$$2A \text{ sen } (2\pi x_0/\lambda)$$

en ese punto con un periodo T igual al de las ondas confluyentes. Por lo tanto, la ecuación anterior lo que más bien representa es una sucesión espacial de vibraciones armónicas oscilando con el mismo periodo T pero cada uno con una amplitud que depende de su distancia al origen O. Pero NO tenemos una onda que se propaga, ya que la fase vale

$$2\pi t/T$$

que sólo depende del tiempo y NO del espacio. Por lo tanto, lo que tenemos es una onda estacionaria, esto es, quieta.

También es fácil observar que la amplitud atraviesa por valores de máximos y mínimos.

[5] recordar que sen x - sen y = 2 sen (x - y)/2 cos (x + y)/2

* NODOS (O AMPLITUD NULA).

La amplitud será nula cuando suceda que

$$2Asen(2\pi\frac{x}{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots n\pi \Rightarrow (n = 0,1,2,3,\ldots n)$$

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

Esto es, se producirán **NODOS** a unas distancias del origen iguales a números enteros de semilongitudes de onda.

Lógicamente, si a lo largo de la cuerda existen puntos como estos NODOS que permanecen en reposo, es imposible transmitir energía más allá de esos nodos, por lo que *la onda estacionaria no es "una onda viajera"*; de ahí el nombre de estacionaria.

* VIENTRES (O AMPLITUD MÁXIMA).

La amplitud máxima resultante podrá ser ±2A que sucederá cuando

$$sen(2\pi\frac{x}{\lambda}) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \ldots\ldots \rightarrow n = 0,1,2,3\ldots$$

es decir, en aquellos puntos que estén situados a distancias del punto O iguales a número impares de cuartos de longitud de onda. Por lo tanto, los nodos y los vientres se suceden alternativamente a distancias de cuartos de longitud de onda.

9.1. ONDAS ESTACIONARIAS CONFINADAS ENTRE DOS LÍMITES.

Este caso puede ser el de, por ejemplo, una cuerda fija por sus dos extremos en la que se provoca una perturbación (por ejemplo, el hacer vibrar una cuerda de guitarra). Igual que antes se producen ondas estacionarias, ya que interfieren ondas idénticas que se propagan en sentidos opuestos.

Al estar fijos ambos extremos, si la cuerda es de longitud L, los puntos de x = 0 y x = L han de ser nodos de las ondas estacionarias. Por tanto, aplicando esa condición para x = L tendremos que

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\frac{L}{n}$$

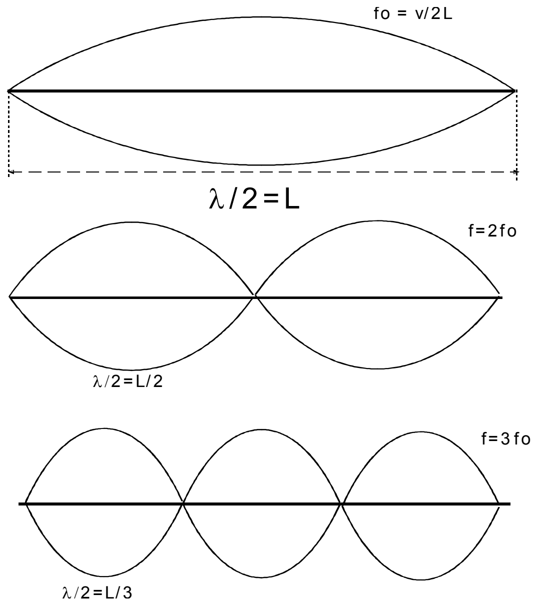
Si recordamos la relación entre longitud de onda y frecuencia, tendremos que

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}$$

donde v es la velocidad de propagación.

Denominamos **frecuencia fundamental de vibración** a $f = \frac{v}{2L}$ con n = 1

Conviene observar que sólo son posibles aquéllas ondas cuya frecuencia de vibración es un múltiplo de la frecuencia fundamental. Cada una de estas frecuencias va asociada a un movimiento; a cada uno de estos movimientos se les denomina modos de vibración. Habrá, por lo tanto, tantos modos de vibración como posibles valores de n, es decir, infinitos. En la figura, aparecen varios.



Al mismo tiempo, conviene ver que la frecuencia NO varía de forma contínua, sino que lo hace adquiriendo valores que se diferencian en v/(2L). Todas las demás frecuencias posibles (derivadas de la fundamental) reciben el nombre de ***armónicos.***

Q24. Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 1 m de longitud, sujeta por los dos extremos, observando que presenta 9 nodos. Si la amplitud máxima es de 1 cm, y la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda es de 8 m/s, determinar: A) la ecuación de la onda estacionaria; B) la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.

Q25. Una cuerda sujeta por ambos extremos, vibra según la ecuación (CGS)

$$y = 3 sen \frac{\pi x}{3} \cos 50\pi t$$

a) Determinar la amplitud y velocidad de las ondas cuya interferencia da lugar a la vibración anterior.
b) Calcula la distancia que existe entre dos nodos sucesivos.
c) Calcula la velocidad con que se mueve una partícula de la cuerda situada en x = 6 cm en el instante t = 2,5 s.

* * *

COMPLEMENTO. EFECTO DOPPLER y POLARIZACIÓN.

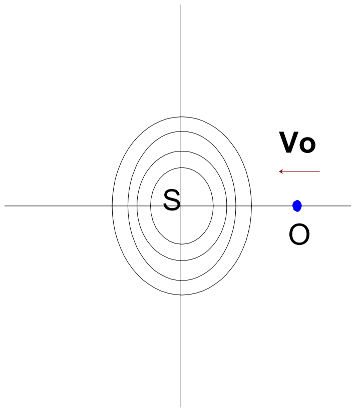
El efecto Doppler consiste en la variación que experimenta la frecuencia que se observa cuando existe un movimiento relativo entre el foco y el observador, de manera que:

* La frecuencia aparente de un foco emisor aumenta cuando la distancia relativa entre el foco y el observador disminuye; lo contrario sucede cuando la distancia crece.

Por ejemplo, cuando un observador que escucha se mueve hacia una fuente sonora en reposo, la altura (frecuencia) del sonido que se percibe es superior que cuando se halla en reposo. Si el observador se está alejando de la fuente fija, percibe un sonido más bajo que cuando está en reposo. Se obtienen resultados similares cuando la fuente se halla en movimiento, acercándose o alejándose de un observador en reposo. La altura del silbato de una locomotora es mayor cuando la fuente se acerca al observador que cuando lo ha pasado y se está alejando.

El efecto Doppler se aplica a toda clase de ondas en general. Lo aplicaremos ahora a ondas sonoras. Consideraremos solamente el caso especial en que la fuente y el observador se mueven a lo largo de la línea que los unen.

Consideremos un sistema de referencia en reposo en el medio por el que avanza el sonido. La figura muestra una fuente sonora S en reposo en ese marco y un observador O que se mueve hacia la fuente con velocidad V_o. Los círculos representan frentes de onda, que van avanzando por el medio. Si el observador estuviera en reposo en el medio, recibiría Vt/λ ondas en el tiempo t, siendo V la rapidez del sonido en el medio y λ la longitud de onda. Ahora bien, debido al movimiento del observador hacia la fuente, éste recibe V_ot/λ ondas adicionales en ese mismo tiempo t. La frecuencia f' que percibe es el número de ondas que percibe por unidad de tiempo, esto es:



$$f' = \frac{(vt/\lambda) + (v_0 t/\lambda)}{t} = \frac{v+v_0}{\lambda} = \frac{v+v_0}{v/f} \Rightarrow f' = f\frac{v+v_0}{v} = f(1+\frac{v_0}{v})$$

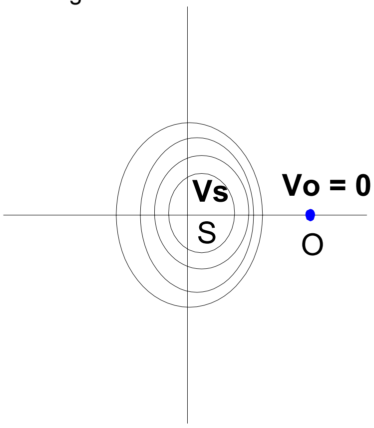
O sea, la frecuencia f' que percibe el observador es igual a la frecuencia ordinaria f que percibe en reposo mas el aumento fv_0/v que procede del movimiento del observador. Cuando éste se encuentra en movimiento **alejándose** de la fuente sonora, hay una <u>disminución</u> de frecuencia fv_0/v correspondientes a las ondas que no llegan al observador en cada unidad de tiempo debido a su movimiento de alejamiento. Entonces:

$$f' = f\frac{v-v_0}{v} = f(1-\frac{v_0}{v})$$

Por consiguiente, la relación general aplicable cuando la fuente se encuentra en reposo con respecto al medio pero el observador se está moviendo a través del medio es:

$$\boxed{f' = f\frac{v \pm v_0}{v}}$$

en la cual, el signo + es aplicable al movimiento **hacia** la fuente y el signo - el movimiento **de alejamiento** de la fuente. Nótese que la causa del cambio es el hecho de que el observador intercepta más o menos ondas en cada segundo debido a su movimiento.



Cuando la fuente se encuentra en movimiento <u>hacia</u> un observador en reposo, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda (ver figura) porque la fuente está avanzando detrás de las ondas que se acercan al observador. Si la frecuencia de la fuente es f y su velocidad v_s durante cada vibración avanza una distancia v_s/f y cada longitud de onda se reduce en esa cantidad. Por consiguiente, la longitud de onda del sonido que llega al observador no es $\lambda = v/f$, sino $\lambda' = v/f - v_s/f$. Por lo tanto, la frecuencia del sonido que percibe el observador **aumenta**:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v-v_s)/f} = f\frac{v}{v-v_s}$$

Si la fuente se mueve alejándose del observador, la longitud de onda emitida es v_s/f mayor que λ, de modo que el observador percibe una frecuencia reducida:

$$f' = \frac{v}{(v+v_s)/f} = f\frac{v}{v+v_s}$$

Por consiguiente, la relación general aplicable cuando el observador se encuentra en reposo con respecto al medio, pero la fuente se está moviendo a través de él es:

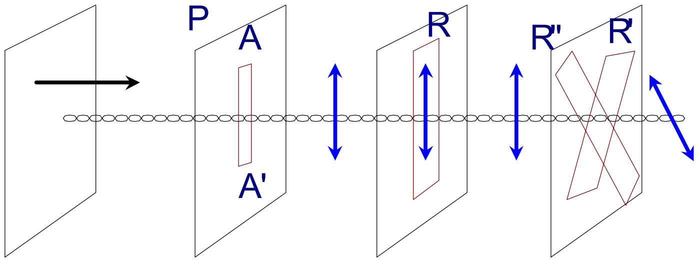
$$\boxed{f' = f\frac{v}{v \pm v_s}}$$

expresión en la que el signo - es aplicable cuando el movimiento es HACIA el observador, y el signo + cuando tal movimiento es alejándose del observador. Notar que la causa del cambio en este caso es el hecho de que el movimiento del foco a través del medio reduce o aumenta la longitud de onda transmitida a través del medio.

Hay muchos casos en los que la fuente se mueve a través de un medio con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la onda en ese medio. En tales casos, el frente de onda toma forma de cono, en cuyo vértice está el cuerpo en movimiento. Algunos ejemplos son la onda de proa de un bote veloz en el agua y la ***"onda de choque"*** de un avión o proyectil que se mueve con una velocidad mayor que la del sonido en ese medio (velocidades supersónicas).

POLARIZACIÓN.

Es un fenómeno característico de las ondas transversales. Se forma una onda transversal siempre que un punto material realiza un movimiento periódico (vibratorio armónico, como caso particular) contenido en un plano perpendicular a la dirección en que se propaga el movimiento ondulatorio.



En el caso más simple en que la partícula realice vibraciones lineales en la dirección AA' de la figura, las restantes partículas irán realizando vibraciones que también serán lineales y estarán contenidas todas en un mismo plano; se dice en este caso, que la onda transversal está *polarizada rectilíneamente*.

Cuando así sea, una rendija, R, colocada paralelamente a la dirección de vibración no perturbará el movimiento ondulatorio, pero si se dispone formando un ángulo α, tal como la R', con la dirección de vibración, actuará de filtro, reduciendo la amplitud de aquélla proporcionalmente al cosα, de modo que si α = 90 grados (rendija R''), ésta interceptará totalmente la propagación del movimiento ondulatorio.

Cuando el punto inicial, en lugar de realizar vibraciones rectilíneas, vibra circularmente, esto es, gira describiendo una circunferencia cuyo plano es perpendicular a la dirección de propagación del movimiento ondulatorio, los restantes irán realizando el mismo tipo de vibración; en este caso, se dice que la onda está polarizada circularmente.

Recuérdese que un movimiento circular puede considerarse como el resultado de la composición de dos movimientos armónicos perpendiculares, de igual periodo y amplitud, entre los que existe una diferencia de fase de 90grados ó 270; por consiguiente, cuando en un cuerpo se originan simultáneamente dos ondas transversales polarizadas rectilíneamente que cumplan esas condiciones, el resultado será una onda transversal polarizada circularmente.

Si la vibración inicial en lugar de ser circular, sobre el plano P, describe una elipse, diremos que la onda está polarizada elípticamente.

Finalmente, cuando la vibración inicial no es ni circular ni elíptica, sino que tiene lugar según una curva arbitraria cualquiera situada en el plano P, en el medio se propagará una onda transversal NO POLARIZADA y en cada punto se reproducirán a su vez, con el consiguiente retraso, los movimientos periódicos del primero.

Por consiguiente, si en la dirección de avance de una onda no polarizada interponemos una rendija, al otro lado de ésta, sólo se observará la onda correspondiente a la componente del movimiento según la dirección de la apertura, es decir, detrás de la rendija, la onda quedará polarizada rectilíneamente y el plano de polarización vendrá determinado por la rendija y la dirección de propagación; en consecuencia, dos rendijas situadas una tras otra y tales que sus direcciones sean normales entre sí, impedirán totalmente la propagación de cualquier onda transversal, puesto que la componente transmitida por una de ellas, es anulada por la siguiente.

PROBLEMAS.

1. Una horquilla, colocada verticalmente, está dotada de un movimiento vibratorio perpendicular a la superficie de un líquido, de frecuencia 100 Hz y amplitud 2 mm. Las perturbaciones producidas en dos puntos O1 y O2 se propagan por la superficie con una velocidad de 1 m/s. Calcula la ecuación de vibración del punto P, situado a 8 cm de O1 y 9 cm de O2.

2. (DE SELECTIVIDAD. Andalucía, Junio de 1996)
La expresión matemática de una onda en el SI es $y = 3 \text{ sen } 2\pi(0{,}05t - 0{,}01x)$.
a) Calcula la longitud de onda, el periodo y la velocidad de propagación.
b) Explicar si se trata de una onda longitudinal o transversal e indicar en qué sentido se propaga.

3. En una onda se propaga un movimiento ondulatorio dado por (SI):

$$y = 12 sen 2\pi(\frac{t}{5} - \frac{x}{8})$$

a) ¿Cuál es el valor de A, T, λ, ν, ω?
b) Determinar la elongación de un punto que dista del foco 42 cm, a los 30 segundos de iniciado el movimiento.

4. Se hace vibrar el extremo de una cuerda tensa con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 60 Hz. Si la velocidad de propagación es de 1200 m/s:
   a) ¿Cuál es la longitud de la onda?
   b) Escribir la ecuación de este movimiento.
   c) Representarlo gráficamente.

5. ¿Cuál es la longitud de onda en el aire, para el sonido de la nota "la" de 435 Hz? (Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s)

6. En un punto dado de una cuerda vibrante, es y = A = 20 cm. En el mismo momento, el punto más cercano en que y = 0, dista del anterior 40 cm. ¿Cuál es la longitud de onda del movimiento?

7. Un tren de ondas que se desplaza en un medio a la velocidad de 1500 m/s, incide en un segundo medio en el que la velocidad de propagación es de 2500 m/s. Si la frecuencia es de 500 Hz, calcular la longitud de onda en ambos medios.

8. (DE SELECTIVIDAD)
Calcular la perturbación resultante al superponerse las ondas

$$Y_1 = 4 \text{ sen}(2\pi t - \pi x); \quad Y_2 = 4 \text{ sen}(2\pi t - 0{,}5\pi x + \pi/6)$$

en el punto x = 4 m

9. (SELECTIVIDAD LOGSE. Universidad de Murcia)
Una onda en una cuerda viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 0{,}2\text{sen}(\pi x)\cos(100\pi t)$ (metros) en donde x está comprendido entre 0 y 6 metros. Calcule: a) la longitud de onda y la frecuencia angular; b) el número total de nodos (incluidos los extremos); c) la velocidad de propagación de las ondas de la cuerda.

10. En las ondas estacionarias de una cuerda, la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos es de 1,5 cm. ¿Cuál es la longitud de onda?

11. La ecuación de una onda transversal que avanza por una cuerda viene dada por la expresión $y = 60 \text{ sen}\{\pi/2(8t + 0{,}5x)\}$. Al llegar al extremo izquierdo de ésta, (el cual está fijo) se refleja completamente. Escribir: a) la ecuación de la onda reflejada; b) la ecuación de la onda estacionaria resultante.

12. La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos, de longitud L, es $y = 0{,}5.\text{sen } 0{,}02x \cos 30t$ (CGS). A) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia?; B) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda?; C) Si la ecuación anterior corresponde a la onda fundamental, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

(Sol: 100π cm; $15/\pi$ s^{-1}; 1500 cm/s; 50π cm)

13. La función de una onda que se propaga por una cuerda sujeta por ambos extremos es
$y = 30 \text{ sen } 0{,}0025x \cos 50t$ (con x en milímetros y t en segundos).
Determinar A) velocidad y amplitud de las ondas cuya combinación da como resultado la onda estacionaria; B) Distancia entre dos nodos sucesivos de la cuerda.

(Sol.: 20 m/s; 15 mm; 1,256 m)

14. La sección de un prisma de vidrio tiene forma de un triángulo equilátero. El rayo cae sobre una de las caras del primas perpendicularmente a ella. Hallar el ángulo B entre los rayos incidente y refractado por el prisma. El índice de refracción del vidrio es 1,5. (Sol.: 120°)

15. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es $y = 10 \cos \pi(2x - 10t)$ (CGS); A) Escribir la expresión de la onda que, al interferir con ella, produciría una onda estacionaria; B) Indicar la distancia entre nodos en esa onda estacionara y la amplitud en un vientre (o antinodo)

(Sol.: $y' = 10 \cos \pi(2x + 10\ t)$; 0,5 cm; 20 cm)

16. Una onda está representada por la ecuación $y = 2 \cos 2\pi\ (t/4 + x/160)$ (CGS). Determinar: A) el carácter de la onda; B) su velocidad de propagación; C) la diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 segundos; D) la diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 120 cm en la dirección de avance de la onda.

(Sol.: Onda armónica que se propaga en el sentido del eje OX; 0,4 m/s; π rad; $3\pi/2$ rad.)

17. Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 1 m de longitud, sujeta por ambos extremos y observamos que presenta un total de 9 nodos. Si la amplitud máxima es de 1 cm y la velocidad de propagación de las ondas en esa cuerda es de 80 m/s, calcular: A) la ecuación de la onda estacionaria en la cuerda; B) la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda correspondiente a esa frecuencia.

(Sol.: $y = 0{,}01\ \text{sen}(8\pi x) \cos(640\pi t)$; 40 Hz; 2 m)

18. La ecuación de una onda es $y = 0{,}2 \cos 0{,}5\pi x\ \text{sen} 30\pi t$ (SI). Determinar: a) magnitudes características de la onda; b) ¿en qué instantes será máxima la velocidad del punto x = 0,5 m?; c) amplitud y velocidad de fase de las ondas cuya superposición *podría* producirla. (SELECTIVIDAD, Sevilla, Junio'92)
(Sol.: $\omega = 30\pi\ s^{-1}$, T = 1/15 s; ν = 15 Hz; $k = 0{,}5\ \pi\ m^{-1}$; λ = 4 m; b) t_1 = 0s; t_2 = 1/30 s; t_3= 2/30 s...; c) A = 0,1 m; v = 60 m/s)

19. Dos focos A y B emiten ondas en fase que se superponen en el punto M. La distancia AM es 32 m y la distancia BM es 20 m. La velocidad de esas ondas es de 900 m/s y la frecuencia 150 Hz. La amplitud en M de la onda procedente de A es 0,4 m y la de la onda procedente de B es 0,3 m. Hallar la ecuación del movimiento del punto M.

20. Dos focos sonoros emiten ondas de la misma frecuencia, 100 Hz y amplitud, 4 cm; en fase. Si las distancias de cada uno de esos focos a un punto P son 75 m y 87,5 m, y la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, determinar la forma de vibración del punto P.

21 SELECTIVIDAD **JUNIO 2001.** Se hace vibrar transversalmente un extremo de una cuerda de gran longitud con un periodo de $0{,}5\pi$ segundos y una amplitud de 0,2 cm, propagándose a través de ella una onda con una velocidad de 0,1 m/s. A. Escriba la ecuación de la onda, indicando el razonamiento seguido; B. Explique qué características de la onda cambian si 1) se aumenta el periodo de la vibración en el extremo de la cuerda; 2) se varía la tensión de la cuerda.

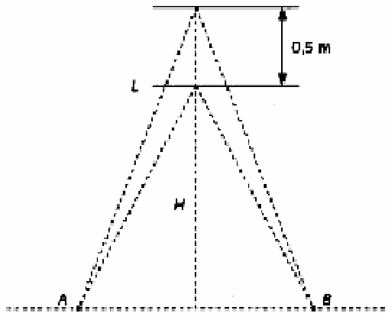
MÁS PROBLEMAS CON SOLUCIONES.

1) Dos focos en concordancia de fase emiten ondas de 4 cm de longitud de onda. Decir si hay refuerzo o debilitamiento en puntos situados: a) a 8 cm de cada foco; b) a 10 cm de uno y 6 cm de otro; c) a 12 cm de uno y 10 cm del otro.

Solución: a) y b) Refuerzo; c) Debilitamiento

2) Un emisor A y un receptor de ondas B están situados a una distancia de 1 m. Cuando las ondas emitidas se reflejan en la lamina *L* situada a una altura [H = 2 m, llegan en fase con las que se propagan directamente en la dirección AB. Si se separa *L* paralelamente a sí misma una distancia de 0,5 m, no se percibe ninguna señal en el receptor. Calcular la longitud de onda.

Solución: 1,9 m



3) En una cuerda de 2 m de longitud, sujeta por sus extremos, se propaga una onda estacionaria. Se observan 4 nodos contando los extremos, siendo la amplitud de los vientres igual a 10 cm. Sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 10 m/s, expresar la ecuación de la onda estacionaria.

Solución: $y = 0{,}10 \text{ sen } 1{,}5\pi x \cos 15\pi t$ (unidades SI)

4) La ecuación de una onda estacionaria es la siguiente: $y = 0{,}6 \cos \pi x \cos 50\pi t$ (unidades SI). Determinar:
   a) Distancia entre nodos consecutivos.
   b) Amplitud y longitud de onda de las ondas componentes.
   c) Velocidad en función del tiempo de una partícula de abscisa x = 2 m.

Solución: a) 1 m b) 0,3 m; 2 m; c) $-30\pi \text{sen} 50\pi t$

5) Se propagan en una cuerda dos ondas de las mismas características en la misma dirección y sentido. La diferencia de fase entre las ondas es de 3/4 rad y la amplitud de las mismas es de 5 mm. ¿Cuál es la amplitud de las ondas resultantes?

Solución: 9,3 mm

6) Dos ondas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02 metros. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante si las dos ondas difieren en fase: a) en 30º; b) en 60º.

Solución: 3,86 cm; 3,46 cm

7) Dos ondas que tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se están moviendo en la misma dirección y sentido. Si difieren en fase en 90º y cada una de ellas tiene una amplitud de 0,05 m, hallar la amplitud de la onda resultante.

Solución: 7,07 cm

8) Una cuerda de 3 metros de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es de 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es de 50 m/s. a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? b) Escribir la ecuación de onda correspondiente a este caso.

Solución: a) 2m; 25 Hz b) $y=4\cdot 10^{-3}\cos 50\pi t \text{ sen } \pi x$

9) O_1 y O_2 son fuentes de radiación coherentes y están en fase, emitiendo con la misma intensidad. Están separadas entre sí por una distancia de 2 metros. Emiten ondas cuya longitud es de 0,1 metros. Encontrar la posición del primer máximo.

Sol: Los primeros máximos serán los puntos de la recta y=1.

10) La ecuación de una onda transversal en una cuerda está dada por: y = 60 sen π/2 (0,5 x—2 t + 0,57) donde x, y se miden en metros y t en segundos. a) Escribir la ecuación de la onda que sumada a ésta produzca ondas estacionarias en la cuerda. b) ¿Cuál es la ecuación de la onda estacionaria obtenida?

Sol: a) y = 60 sen π/2 (0,5 x+2 t + cte); b) si cte = 0,57 y=120 sen [π/2(0,5x+0,57)] cos πt

11) La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos, de longitud L, es: y = 0,5 sen 0,02 x cas 30 t en donde y, x se miden en centímetros y t en segundos. a) ¿Cuál es la longitud de onda? ¿Y la frecuencia? b) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda? Si la ecuación anterior corresponde a la onda fundamental, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

Sol.: a) λ = 100 π cm; f = 15/πs^{-1}; b) 1500 cm/s; c) L = 50 π cm.

12) La función de una onda que se propaga por una cuerda sujeta por ambos extremos es: y=30sen0,0025xcos50t estando x, y en milímetros y t en segundos. a) Hallar la velocidad y amplitud de las ondas cuya combinación da como resultado la onda estacionaria. b) ¿Cuál es la distancia entre dos nodos sucesivos en la cuerda?

Sol.: a) 20 m/s; 15 mm; b) 1,256 m.

13) Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 1 metro de longitud, sujeta por los dos extremos, observando que presenta 9 nodos. Si la amplitud máxima es de 1 cm, y la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda es de 8 m/s, calcula: a) la ecuación de la onda estacionaria en la cuerda. b) la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.

Sol: y=0,01 sen πx cos 64πt; b) 2 m; 4 Hz.

14) Las ecuaciones de dos ondas armónicas son: $y_1 = 3\,\mathrm{sen}\left(10^3 t - 200x\right)$ e $y_2 = 3\,\mathrm{sen}\left(10^3 t + 200x\right)$ expresadas en unidades del SI. Calcula: a) la ecuación de la onda estacionaria resultante de su interferencia, por aplicación del principio de superposición; b) la amplitud de los nodos de la onda; c) el valor de la longitud de onda; d) la distancia que separa dos vientres consecutivos.

Sol: a) $y = 6\,\mathrm{sen}\left(10^3 t\right)\cos(200x)$; b) cero; c) $10^{-2}\pi$; d)0,005π m.